

# МНОГОЧАСТИЧНЫЕ ПЕРЕПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВЕТА С АТОМНЫМИ АНСАМБЛЯМИ

*В. Н. Горбачев\**, *А. И. Трубило\*\**

*Санкт-Петербургский университет аэрокосмического приборостроения  
190000, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 2 октября 2004 г.

Рассмотрены многочастичные состояния, возникающие при взаимодействии узкополосного света и ансамбля одинаковых двухуровневых атомов. В зависимости от исходной статистики света корреляция между атомами и фотонами может приводить к перепутанным состояниям этих систем. Найдено, что при освещении слабым одномодовым сжатым светом состояние любой пары атомов оказывается несепарабельным и устойчивым к процессу релаксации. Приведены схемы для приготовления перепутанных атомных ансамблей с помощью оптических проекционных измерений.

PACS: 03.67.-a

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Основным ресурсом большого числа квантовых информационных процессов являются перепутанные состояния, свойства которых и способы генерации являются предметом интенсивного обсуждения. Существуют два метода приготовления заданного состояния физической системы — квантовое проекционное измерение и эволюция. Для атомных систем оба метода уже получили экспериментальное решение. Так в работе [1] путем проекционного измерения получена пара Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР) из двух атомных ансамблей. Второй способ продемонстрирован в ряде работ: в [2] получены перепутанные состояния щелочных ионов за счет кулоновского взаимодействия, в [3] реализована ЭПР-пара из нейтральных ридберговских атомов в микромазерной схеме, а чтобы перепутать нейтральные атомы в оптической решетке, в [4] использовано резонансное диполь-дипольное взаимодействие. При приготовлении фотонных систем наиболее популярными остаются оптические реализации на основе параметрических процессов. Так, в работах [5] экспериментально получено перепутанное состояние — кутрит, — которое эквивалентно трехуровневой системе, и осуществлена его томо-

графия. Из приведенных примеров следует, что, используя определенное взаимодействие, уже экспериментально можно приготовить перепутанные состояния из двух объектов. Такие системы хорошо изучены, а для приложений важную роль играют два вопроса: первый — для каких целей можно использовать полученные состояния, и второй — какова их устойчивость к процессам декогеренции. В этой связи представляют интерес многочастичные системы, состояния которых оказываются много сложнее и богаче.

До сих пор основные усилия были сосредоточены на изучении перепутанности нескольких частиц. Так, в работе [6] введены трехчастичные состояния  $W$ -класса, среди которых находится симметричное состояние, реализованное экспериментально на основе поляризованных фотонов [7]. Обобщение для четырех частиц предложено в работе [8], где выделено девять неэквивалентных классов, которые не могут быть связаны между собой локальными операциями и квантовыми коммуникациями (Local Operations and Quantum Communication). Работ по многочастичным системам существенно меньше и, в основном, они посвящены поиску критериев перепутанности и приложению к задачам квантовой теории информации. В отличие от двухчастичного случая, где известен критерий Переса–Городецких [9],

\*E-mail: vn@vg3025.spb.edu

\*\*E-mail: Tai@at3024.spb.edu

впервые примененный к реальной физической ситуации в [10], в общем случае операциональный критерий перепутанности неизвестен, поэтому используются разные подходы. В работе [11] предпринята попытка классификации с помощью графов на основе концепции «перепутанных молекул» [12], где частицы представляются вершинами, а классическая или квантовая корреляция — ребрами, связывающими пары вершин. Такой граф описывает как чистые, так и смешанные многочастичные состояния, среди которых можно выделить несколько классов, различающихся топологическими свойствами своих графов. Для изучения симметричных состояний типа Дике в работе [13] использовано несколько мер перепутанности (entanglement entropy, negativity, entanglement formation), которые определяются собственными числами частично транспонированных матриц плотности. В результате численного анализа было установлено, что симметричные состояния обладают устойчивостью к потере частиц, даже если число частиц велико (до  $10^3$ ). Отметим, что в данном случае сама задача вычисления собственных чисел является сложной, поскольку число состояний системы экспоненциально растет с увеличением числа частиц. Такое свойство как устойчивость делает симметричные состояния привлекательными для приложений. Они могут быть использованы в протоколах клонирования и телеклонирования для перераспределения квантовой информации [14], в квантовой криптографии для задачи распределения секрета [15], в качестве квантового канала для телепортации и плотного кодирования [16]. Две предложенные модели квантового компьютера с односторонними вычислениями (one-way-computing) на основе процедур измерения в многочастичной перепутанной системе [17, 18] существенно стимулировали исследование свойств многочастичных систем, в частности, в моделях типа Изинга и Бозе–Хаббарда.

В нашей работе основное внимание уделено атомным состояниям типа Дике. Они возникают вследствие кооперативного поведения многоатомной системы, взаимодействующей с электромагнитным полем, которое рассмотрено еще Дике [19] и изучалось многими авторами (см., например, [20]). В такой системе есть много физических процессов, представляющих интерес для задач квантовой информации. В работе [21] рассмотрено пленение фотона в атомных цепочках. Если такую систему поместить в резонатор, то из-за этого эффекта уменьшится скорость выхода фотонов или время декогерентности резонаторной моды. В [22] эта особенность использована

для двух задач — генерации состояний  $W$ -класса и антисимметричного клонирования [23], которое может происходить с высоким качеством (fidelity) в режиме захвата фотона. В этих работах анализ ограничен вариантом однофотонного взаимодействия и начальными однофотонными состояниями света. Мы рассматриваем более общий случай многофотонных взаимодействий, считая статистику света произвольной.

Основными вопросами, которые обсуждаются в нашей работе, являются следующие. Первый — какие типы перепутанных состояний возникают при взаимодействии атомов с полем, второй — какие состояния можно приготовить из независимых атомных ансамблей, перепутанных со своим фотоном, третий — для каких задач они могут быть использованы. Мы рассматриваем пример резонансного взаимодействия узкополосного света и ансамбля одинаковых двухуровневых атомов, обладающих релаксацией, ограничиваясь простой моделью радиационного затухания. Чтобы описать различные многофотонные процессы, такие как комбинационное взаимодействие, использованы эффективные гамильтонианы. Они хорошо известны в квантовой оптике и могут быть получены методом унитарного преобразования [24]. Анализ проводится на основе теории возмущений по взаимодействию, в рамках которого исследуется поведение атомной системы при произвольной статистике света, в частности, для гауссова, когерентного и сжатого состояний. Найдены условия, при которых возникает несепарабельное состояние атомов. Для этого необходим слабый одномодовый сжатый свет. В отличие от случая, рассмотренного в работе [25], в нашем случае возникает стационарное состояние, устойчивое к процессу атомной релаксации. Если пренебречь релаксацией и ограничиться начальными однофотонными состояниями света, можно обсуждать простые точные решения [26]. Они описывают процессы обмена возбуждением между светом и атомами и могут быть использованы в задачах генерации и преобразования симметричных состояний Дике, а также для записи и хранения квантовой информации. Мы рассмотрели схемы с оптическими проекционными измерениями, которые позволяют приготовить перепутанные атомные ансамбли. Такие макроскопические ансамбли, образующие ЭПР-пару, реализованы экспериментально [1]. В наших схемах возникают новые состояния, которые имеют иерархическую структуру, что отличает их от кластерных или граф-состояний, введенных для односторонних вычислений в работе [27].

Статья построена следующим образом. Вначале сформулирована исходная модель, для которой записаны решения во втором порядке теории возмущений с учетом атомной релаксации. На их основе рассмотрены атомные состояния в зависимости от исходной статистики поля. Для некоторых начальных условий при отсутствии релаксации приведены точные решения, которые обсуждаются для задач генерации и преобразования симметричных состояний Дике. Наконец, для приготовления перепутанных атомных ансамблей рассмотрены схемы с оптическими проекционными измерениями.

## 2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим  $N$  одинаковых, но различимых двухуровневых атомов, взаимодействие которых с электромагнитным полем в дипольном приближении описывается гамильтонианом

$$H = i\hbar^{-1}\vartheta, \\ \vartheta = \sum_k g_k a_k S_k^\dagger - \text{H.c.},$$

где

$$g_k = \left( \frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}_k$$

— константа взаимодействия,  $\boldsymbol{\mu}$  — матричный элемент дипольного перехода,  $\mathbf{e}_k$  — вектор поляризации моды с волновым вектором  $k$ ,  $a_k, a_k^\dagger$  — фотонные операторы рождения и уничтожения,

$$S_k^\dagger = \sum_a s_{10}(a) \exp(ikr_a)$$

— коллективный атомный оператор,  $s_{xy} = |x\rangle_a \langle y|$ ,  $x, y = 0, 1$  — оператор атома, находящегося в точке  $r_a$ , у которого нижнее состояние 0, верхнее — 1. Если ограничиться одномодовым резонансным взаимодействием, можно заменить  $S_k \rightarrow S_{k=0}$ , что позволяет пространственно протяженную систему атомов рассматривать как точечную. Тогда

$$\vartheta = S_{10}B - S_{01}B^\dagger, \quad (1)$$

где

$$S_{10} = \sum_a |1\rangle_a \langle 0|, \quad B = ga.$$

Наряду с однофотонным резонансным взаимодействием мы будем использовать эффективный гамильтониан (1) для описания других многофотонных процессов, например, комбинационного рассеяния света, полагая  $B = fa_A a_S^\dagger$ , где частоты фотонов

$\omega_A, \omega_S$  связаны с частотой перехода  $\omega$  соотношением  $\omega = \omega_A - \omega_S$ . Такие гамильтонианы могут быть получены методом унитарного преобразования [24].

Для матрицы плотности  $\rho$ , описывающей систему из  $N$  атомов и поля, справедливо уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = [\vartheta, \rho] + \mathcal{L}\rho, \quad (2)$$

где оператор атомной релаксации взят в виде Линдблада:

$$\mathcal{L} = \sum_a \mathcal{L}_a,$$

$$\mathcal{L}_a = -\frac{\gamma_\uparrow}{2} [s_{01}(a)s_{10}(a)\rho - s_{10}(a)\rho s_{01}(a)] - \\ -\frac{\gamma_\downarrow}{2} [s_{10}(a)s_{01}(a)\rho - s_{01}(a)\rho s_{10}(a)] + \text{H.c.} \quad (3)$$

Такой выбор отвечает модели чисто радиационного затухания с продольной  $\gamma = \gamma_\downarrow + \gamma_\uparrow$  и поперечной  $\gamma_\perp$  константами релаксации, которые связаны соотношением  $\gamma_\perp = \gamma/2$ . В общем случае нужно заменить  $\gamma_\perp \rightarrow \gamma_\perp + \kappa$ , где  $\kappa$  — константа дефазированных столкновений, поэтому  $\gamma_\perp > \gamma/2$ .

В эффективном гамильтониане (1) поле может быть представлено многими модами, частоты которых  $\omega_k$  отличаются от частоты атомного перехода на величину  $\delta\omega_k$  и занимают некоторую полосу  $\Delta\omega$ . Если  $\Delta\omega, \delta\omega_k \ll \gamma_\perp$ , где  $\gamma_\perp$  — поперечная константа релаксации, то поле можно считать узкополосным и пользоваться резонансным приближением. В противном случае это не так, что приводит к необходимости задавать разновременные корреляционные функции поля.

Решение уравнения (2) является сложной задачей. Для матрицы плотности одного атома и поля  $\rho_a = Sp'_a \rho$ , где усреднение  $Sp'_a$  проводится по всем атомам за исключением одного, из (2) следует уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_a = [\vartheta_a, \rho_a] + \mathcal{L}_a \rho_a + N(N-1)Sp_{a'} [\vartheta_{a'}, \rho_{aa'}], \quad (4)$$

где  $\vartheta_a = s_{10}(a)B - \text{H.c.}$  и введена двухчастичная матрица плотности  $\rho_{aa'} = Sp'_{aa'} \rho$ . Присутствие в правой части (4) многочастичного вклада, пропорционального  $N(N-1)$ , связано с некоммутативностью матрицы плотности  $\rho_{aa'}$  и операторов поля. Это обстоятельство приводит к цепочке уравнений (Бардина — Боголюбова — Грина — Кирквуда — Ивона) для многочастичных матриц плотности  $\rho_a, \rho_{aa'}, \rho_{aa'a''}, \dots$ . С физической точки зрения это означает, что квантованное электромагнитное поле порождает корреляцию между атомами, причиной

которой служат флуктуации поля. Если его считать классическим и нешумящим, например, находящимся в когерентном состоянии, то за счет взаимодействия корреляция порождаться не будет, и атомы останутся независимыми, если и в начальном состоянии между ними не было корреляции. Далее будем использовать (2) для анализа процессов взаимодействия, в которых могут возникать симметричные состояния Дике.

### 3. СИММЕТРИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДИКЕ

Введем необходимые определения и одно представление для симметричных состояний Дике, которое явно показывает их связь с физическими процессами коллективного взаимодействия. Состояния Дике являются собственными векторами двух операторов  $J_z$  и  $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ :

$$\begin{aligned} J_z |jma\rangle &= m |jma\rangle, \\ J^2 |jma\rangle &= j(j+1) |jma\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$J_s = \frac{1}{2} \sum_k \sigma_{sk},$$

$\sigma_{sk}, s = x, y, z$  — операторы Паули двухуровневой частицы  $k = 1, \dots, N$  или атома,  $j, m$  — целые или полуцелые числа:  $|m| \leq j$ ,  $\max j = N/2$ . При  $j = N/2$  возникают симметричные состояния, для которых квантовое число  $a$ , учитывающее вырождение, можно опустить. Для  $h$  возбужденных атомов, где  $h = m + N/2$ , они имеют вид

$$\begin{aligned} |j = N/2; m\rangle &\equiv |h; N\rangle = \\ &= \sum_z P_z |1_1, 1_2, \dots, 1_h, 0_{h+1}, \dots, 0\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $P_z$  — одна из

$$C_h^N = \frac{N!}{h!(N-h)!}$$

различных перестановок частиц. Вектор  $|h; N\rangle$  описывает атомный ансамбль с  $h$  возбужденными атомами и нормирован условием  $\langle h; N | h; N \rangle = C_h^N$ . Симметричные состояния естественным образом могут возникать в многочастичной системе, где взаимодействие описывается коллективными операторами типа

$$S_{10} = \sum_a^N |1\rangle_a \langle 0|.$$

Так, справедливо следующее представление:

$$|h; N\rangle = \frac{1}{h!} S_{10}^h |0; N\rangle. \quad (7)$$

При  $h = 1$

$$|1; N\rangle = |10\dots 0\rangle + \dots + |00\dots 1\rangle. \quad (8)$$

Поскольку волновая функция  $|h; N\rangle$  не факторизуется, состояние является перепутанным. Однако корреляция частиц здесь существенно отличается от других перепутанных состояний, например,

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2} (|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N})$$

(Greenberger–Horne–Zeilinger), в котором любые  $M < N$  частиц имеют классическую корреляцию. Так, матрица плотности, которая описывает  $M \leq N$  частиц в состоянии  $|1; N\rangle$ , имеет вид

$$\rho(M \leq N) = \frac{1}{N} |1; M\rangle \langle 1; M| + \frac{N-M}{N} |0; N\rangle \langle 0; N|.$$

Ее энтропия фон Неймана определяется относительной долей частиц  $p = M/N$  и равна

$$S(\rho(M \leq N)) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p).$$

При  $p = 1/2$  энтропия принимает максимальное значение, равное 1. Для случая  $M = 2$  можно воспользоваться необходимым и достаточным критерием сепарабельности [9]. Согласно этому критерию, состояние будет несепарабельным, или перепутанным, если матрица плотности, транспонированная по одной из частиц, имеет хотя бы одно отрицательное собственное число. В рассматриваемом случае из четырех собственных чисел

$$\left\{ \frac{1}{N}; \frac{1}{N}; \frac{N-2}{2N}; \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{(N-2)^2}} \right] \right\}$$

одно является отрицательным. Заметим, что характер корреляции  $M$  частиц определяется относительной долей  $p = M/N$ . С ростом общего числа частиц  $N$  величина  $p \rightarrow 0$ , поэтому всякая корреляция пропадает, поскольку их состояние становится практически чистым  $\rho(M \leq N) \rightarrow |0; N\rangle \langle 0; N|$ . Приведем некоторые равенства, которые будут использоваться ниже:

$$\begin{aligned} S_{01} |0; N\rangle &= 0, \\ S_{10} |h; N\rangle &= (h+1) |h+1; N\rangle, \\ S_{01} |h; N\rangle &= (N-h+1) |h-1; N\rangle, \\ S_{01} S_{10} |h; N\rangle &= (h+1)(N-h) |h; N\rangle, \\ S_{10} S_{01} |h; N\rangle &= h(N-h+1) |h; N\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

#### 4. РЕШЕНИЯ ВО ВТОРОМ ПОРЯДКЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Уравнение (2) будем решать, используя теорию возмущений по взаимодействию:

$$\rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \rho^{(2)} + \dots, \quad (10)$$

где в качестве нулевого приближения  $\rho^{(0)}$  взято стационарное решение (2), в котором  $\vartheta = 0$ . Оно имеет вид  $\rho^{(0)} = |0\rangle\langle 0| \otimes \rho_f$ , где поле задается своей матрицей плотности  $\rho_f$ , а все атомы находятся на нижнем уровне  $|0\rangle = |0\rangle^{\otimes N}$ . Для  $\rho^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots$  следуют уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^{(k)} = [\vartheta, \rho^{(k-1)}] + \mathcal{L} \rho^{(k)} \quad (11)$$

с начальными условиями  $\rho^{(k)}(0) = 0$ .

Ограничимся вторым порядком теории возмущений, в котором проявляются статистические характеристики поля возбуждения. Матричное уравнение для  $\rho^{(2)}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \langle 1_k, 1_m; N | \frac{\partial}{\partial t} \rho^{(2)} | 0; N \rangle &= \\ &= -2\gamma_{\perp} \langle 1_k, 1_m; N | \rho^{(2)} | 0; N \rangle + \\ &+ \langle 1_k, 1_m; N | R | 0; N \rangle, \\ \langle 1_k; N | \frac{\partial}{\partial t} \rho^{(2)} | 1_m; N \rangle &= \\ &= -2\gamma_{\perp} \langle 1_k; N | \rho^{(2)} | 1_m; N \rangle + \\ &+ \langle 1_k; N | R | 1_m; N \rangle, \quad k \neq m, \\ \langle 1_k; N | \frac{\partial}{\partial t} \rho^{(2)} | 1_k; N \rangle &= -\gamma \langle 1_k; N | \rho^{(2)} | 1_k; N \rangle + \\ &+ \langle 1_k; N | R | 1_k; N \rangle, \\ \langle 0; N | \frac{\partial}{\partial t} \rho^{(2)} | 0; N \rangle &= \gamma \sum_k \langle 1_k; N | \rho^{(2)} | 1_k; N \rangle + \\ &+ \langle 0; N | R | 0; N \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь векторы

$$s_{10}(k) | 0; N \rangle = | 1_k; N \rangle,$$

$$s_{10}(k) s_{10}(p) | 0; N \rangle = | 1_k, 1_p; N \rangle$$

описывают состояние с одним возбужденным атомом  $k$  и двумя разными атомами  $k$  и  $p$ , оператор  $R = [\vartheta, \rho^{(1)}]$  имеет следующие ненулевые матричные элементы

$$\begin{aligned} \langle 1_k, 1_m; N | R | 0; N \rangle &= 2\kappa(t) B^2 \rho_f, \\ \langle 0; N | R | 0; N \rangle &= -\kappa(t) N (B^{\dagger} B \rho_f + \rho_f B^{\dagger} B), \\ \langle 1_k; N | R | 1_m; N \rangle &= 2\kappa(t) B \rho_{sf} B^{\dagger}, \end{aligned} \quad (13)$$

величина  $\kappa(t)$  определена соотношением

$$\kappa(t) = \frac{1}{\gamma_{\perp}} (1 - \exp(-\gamma_{\perp} t)).$$

В условиях чисто радиационного затухания  $\gamma_{\perp} = \gamma/2$  и выражение для матрицы плотности во втором порядке теории возмущений по взаимодействию принимает вид

$$\begin{aligned} \rho &= |0\rangle\langle 0| \otimes \rho_f + \kappa[|1; N\rangle\langle 0; N| \otimes B \rho_{sf} + \text{H.c.}] + \\ &+ \kappa^2[|2; N\rangle\langle 0; N| \otimes B^2 \rho_f + \text{H.c.}] - \\ &- N \gamma \mathcal{K} |0; N\rangle\langle 0; N| \otimes [B^{\dagger} B \rho_f - B \rho_f B^{\dagger} + \text{H.c.}] - \\ &- (1/2) N \kappa^2 |0; N\rangle\langle 0; N| \otimes [B^{\dagger} B \rho_f + \text{H.c.}] + \\ &+ \kappa^2 |1; N\rangle\langle 1; N| \otimes B \rho_f B^{\dagger}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\gamma_{\perp}} \left\{ \frac{1}{\gamma^2} [\gamma t + 1 - \exp(-\gamma t)] - \frac{\kappa^2}{2} \right\}.$$

Полученное выражение справедливо во втором порядке теории возмущений, где поле не должно быть слишком сильным в том смысле, что

$$N \kappa^2 \langle B^{\dagger} B \rangle \ll 1. \quad (15)$$

Если рассматривать простое одномодовое резонансное взаимодействие, для которого  $B = ga$ , то  $\kappa^2 \langle B^{\dagger} B \rangle = n/n_s$ , где  $n_s = (\gamma_{\perp}/g)^2$  — параметр насыщения,  $n = \langle a^{\dagger} a \rangle$  — среднее число фотонов. Тогда условие (15) принимает обычный вид для резонансного взаимодействия поля с двухуровневыми атомами:  $Nn/n_s \ll 1$ . Полученное решение (14) описывает совместную эволюцию атомной системы из основного состояния атомов и поля с произвольным начальным состоянием.

#### 5. СМЕШАННЫЕ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫЕ АТОМНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Во втором порядке теории возмущений возникает корреляция между атомами, которая определяется статистикой света. В результате могут возникать несепабельные или перепутанные атомные состояния. Чтобы рассмотреть свойства атомной системы, найдем матрицу плотности во втором порядке теории возмущений для  $M \leq N$  атомов,  $\rho_A(M \leq N)$ , полученную путем усреднения (14) по состоянию поля  $\rho_f$  и  $N - M$  частицам. Она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_A(M \leq N) &= |0\rangle\langle 0| [1 - M \kappa^2 \langle B^{\dagger} B \rangle] + \\ &+ \kappa [\langle B \rangle |1; M\rangle\langle 0| + \text{H.c.}] + \\ &+ \kappa^2 [\langle B^2 \rangle |2; M\rangle\langle 0| + \text{H.c.}] + \\ &+ \kappa^2 \langle B^{\dagger} B \rangle |1; M\rangle\langle 1; M|. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что состояние атомной системы, которое описывается матрицей плотности  $\rho_A (M \leq N)$ , является смешанным. В отличие от симметричных состояний Дике (6),  $\rho_A (M \leq N)$  не зависит ни от  $N$ , ни от отношения  $p = M/N$ . Поэтому для любых  $M < N$  атомов их корреляция одинакова и не зависит от общего числа частиц  $N$ . Это означает, что состояние будет устойчивым к потере частиц.

Из-за корреляции, которая обусловлена статистикой поля, атомная матрица плотности не факторизуется. Рассмотрим два атома, каждый из которых описывается своей наблюдаемой  $c_1$  и  $c_2$ ,  $[c_1; c_2] = 0$ . Тогда, полагая в формуле (16)  $M = 2$ , запишем двухатомную матрицу плотности:

$$\begin{aligned} \rho_A(2) = & |00\rangle\langle 00| (1 - 2\kappa^2 \langle B^\dagger B \rangle) + \\ & + \kappa \langle B \rangle (|10\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 00| + \text{H.c.}) + \\ & + \kappa^2 \langle B^2 \rangle (|11\rangle\langle 00| + \text{H.c.}) + \\ & + \kappa^2 \langle B^\dagger B \rangle (|10\rangle + |01\rangle) (\langle 10| + \langle 01|). \end{aligned} \quad (17)$$

С помощью соотношения (17) найдем, что ковариация операторов  $c_1, c_2$  определяется дисперсиями электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \langle c_1 c_2 \rangle - \langle c_1 \rangle \langle c_2 \rangle = & \kappa^2 [(\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2) \langle 0|c_1|1\rangle \langle 0|c_2|1\rangle + \\ & + (\langle B^\dagger B \rangle - \langle B^\dagger \rangle \langle B \rangle) \langle 1|c_1|0\rangle \langle 0|c_2|1\rangle + \text{c.c.}]. \end{aligned} \quad (18)$$

Если у поля нет флуктуаций в том смысле, что равны нулю его дисперсии, что в данном случае будет выполнено, например, для когерентного состояния, то  $\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = 0$  и т. д., тогда из (18) следует, что корреляции между атомами нет. Пусть  $c_k, k = 1, 2$ , являются операторами дипольного момента,

$$c_k = d_k = \mu (s_{01}(k) + s_{10}(k)),$$

где матричный элемент  $\mu$  выбран вещественным. Тогда корреляция двух дипольных моментов будет зависеть от статистических свойств поля. Введем квадратурный оператор

$$X_f = B^\dagger \exp(i\theta) + \text{H.c.}$$

Тогда из (18) следует, что ковариация дипольных моментов определяется нормально-упорядоченной относительно операторов поля  $B$  и  $B^\dagger$  дисперсией при  $\theta = 0$  квадратурного оператора

$$\langle d_1 d_2 \rangle - \langle d_1 \rangle \langle d_2 \rangle = \mu^2 \kappa^2 D_N,$$

где

$$D_N = \langle X_f^2 \rangle - \langle X_f \rangle^2 - \langle [B, B^\dagger] \rangle.$$

Дисперсия  $D_N = 0$  для когерентного состояния. Корреляция дипольных моментов будет возникать как для поля в сжатом состоянии, для которого  $D_N < 0$ , так и для поля в классическом состоянии, для которого  $D_N > 0$ .

Необходимые и достаточные условия несепарабельности смешанного состояния дает критерий [9], который справедлив для систем с размерностью гильбертова пространства  $2 \times 2$  или  $2 \times 3$ . Для нашего случая можно рассмотреть состояние двух атомов  $\rho_A(2)$ , которое будет несепарабельным или перепутанным, если некоторые собственные числа матрицы плотности, транспонированной по одной из частиц (например, по первой,  $\rho_A^{T_1}(2)$ ), будут отрицательными. Для примера рассмотрим свет в гауссовом и сжатом состояниях.

Считая поле гауссовым в том смысле, что  $\langle B \rangle = \langle B^2 \rangle = 0$ , из (17) найдем выражение для матрицы плотности, которая описывает смесь основного и перепутанного состояний:

$$\rho_A(2) = a|00\rangle\langle 00| + b(|01\rangle + |10\rangle)(\langle 01| + \langle 10|),$$

где  $a + 2b = 1$ ,  $a = 1 - 2\kappa^2 \langle B^\dagger B \rangle$ . Собственные числа матрицы  $\rho_A^{T_1}(2)$  равны

$$\lambda = \left\{ b, b, \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} \right\}.$$

Поскольку в используемых приближениях  $\sqrt{a^2/4 + b^2} \approx a/2$ , все собственные числа положительны:  $\{b, b, a, 0\}$ , и состояние будет сепарабельным.

Рассмотрим резонансное взаимодействие с одно-модовым сжатым светом,  $B = ga$ , источником которого является, например, параметрический генератор. Простую модель такого генератора можно описать эффективным гамильтонианом

$$H = i\hbar \frac{f}{2} (a^{\dagger 2} - \text{H.c.}).$$

Решение имеет вид

$$a = a_0 \text{ch } r + a_0^\dagger \text{sh } r,$$

где  $r = f\tau$  — параметр сжатия,  $\tau$  — приведенная длина нелинейной среды,  $a_0, a_0^\dagger$  — операторы поля на входе. Для исходного вакуумного состояния

$$\langle a \rangle = 0, \quad \langle a^2 \rangle = \langle a^{\dagger 2} \rangle = \text{ch } r \text{sh } r, \quad \langle a^\dagger a \rangle = \text{sh}^2 r.$$

Для этого случая из (17) следует выражение для двухчастичной матрицы:

$$\begin{aligned} \rho_A(2) = & |00\rangle\langle 00|[1 - 2\kappa^2\langle B^\dagger B \rangle] + \\ & + \kappa^2 \left[ \langle B^2 \rangle (|11\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11|) + \text{H.c.} \right] + \\ & + \kappa^2 \langle B^\dagger B \rangle \left( |10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 10| + \right. \\ & \left. + |10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 01| \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Четыре собственных числа транспонированной матрицы  $\rho_A^{T_1}(2)$  имеют вид

$$\lambda = \left\{ 0, \quad 1 - \frac{2}{n_s} \text{sh}^2 r, \quad \pm \frac{1}{n_s} \exp(\pm r) \text{sh} r \right\}. \quad (20)$$

Пусть для определенности  $r > 0$ , что отвечает состоянию, сжатому по каноническому импульсу или фазе. Тогда собственное число  $(-1/n_s) \text{sh} r \exp(-2r) < 0$ , однако ясно, что степень сжатия должна быть невелика, поскольку в используемых приближениях следует считать, что

$$\frac{\text{sh}^2 r}{n_s} \ll 1. \quad (21)$$

В итоге состояние атомов оказывается несепарабельным. Причина такого поведения заключается в следующем. Из-за флуктуаций света возникает межатомная корреляция, которая приводит к двухатомной когерентности. В условиях (21) она играет основную роль. Поскольку вклад от поглощения мал, атомы практически находятся на нижнем уровне и, в отличие от случая гауссовой статистики, матрица плотности имеет вид

$$\rho_A(2) \approx |00\rangle\langle 00| + \kappa^2 [\langle B^2 \rangle |11\rangle\langle 00| + \text{H.c.}].$$

Отметим две особенности рассмотренного примера. Во-первых, перепутанное состояние атомов, которое оказывается стационарным, возникает под действием слабого сжатого света, что выглядит привлекательным с точки зрения эксперимента. Во-вторых, весь ансамбль нельзя считать сепарабельным, поскольку любая пара атомов из  $M \leq N$  является перепутанной, и квантовая корреляция всего ансамбля оказывается устойчивой к потере частиц.

Поскольку единых и надежных критериев для перепутанности смешанных многочастичных состояний не известно, мы использовали необходимый и достаточный критерий Переса–Городецких для двух двухуровневых систем. С его помощью мы строго установили, что несепарабельной может быть любая пара атомов из ансамбля, что дает нам основание считать и состояние всей системы несепарабельным.

Подчеркнем также, что мы использовали теорию возмущений, в рамках которой перепутанные состояния могут возникать как артефакт [28]. В цитируемой работе рассмотрен пример разложения в ряд по общему классическому параметру произведения двух волновых функций, где отдельные слагаемые представлены перепутанными состояниями. Однако, если в качестве меры использовать энтропию перепутанности, которая в любом порядке теории возмущений оказывается квадратичной по малому параметру или равной нулю, то мы имеем случай независимых исходных систем. Заметим, чтобы физически выделить такие перепутанные состояния или, другими словами, приготовить независимую пару частиц в перепутанном состоянии, нужно провести проекционное измерение, но в перепутанном базисе. Мы также используем теорию возмущений, однако ситуация как с физической, так и с формальной точек зрения оказывается иной, поскольку в процессе взаимодействия между частицами возникает корреляция. Так, в первом порядке теории возмущений волновая функция не факторизуется, при этом значение энтропии перепутанности равно нулю с учетом точности этого приближения. Физически это оправданный результат, поскольку в первом порядке теории возмущений не возникает никакой корреляции. В нашем случае перепутанность появляется во втором порядке, который описывает реальные процессы излучения и поглощения, приводящие к корреляции. В этом порядке критерии перепутанности свидетельствуют о наличии квантовой корреляции и оказываются согласованными с точностью приближений.

## 6. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Если в уравнении (2) пренебречь атомной релаксацией, рассматривая эволюцию на временах  $t \ll \gamma^{-1}$ , то поведение всей системы будет описываться волновой функцией

$$\phi(t) = \exp(-i\hbar^{-1}Ht)(\phi_A \otimes \phi_f),$$

где исходное состояние поля и атомов будем считать независимым. В этом случае для некоторых начальных условий можно записать простые решения.

Рассмотрим комбинационное взаимодействие двух мод  $a$  и  $b$ , для которого

$$H = i\hbar f(a^\dagger b S - ab^\dagger S^\dagger), \quad (22)$$

где  $S = S_{10}, S^\dagger = S_{01}$ . Если ограничиться начальными однофотонными фоковскими состояниями мод

$\phi_f = c|01\rangle_{ab} + e|10\rangle_{ab}$ , можно записать точные решения в следующей форме:

$$\begin{aligned} \exp(-i\hbar^{-1}Ht)(c|01\rangle_{ab} + e|10\rangle_{ab}) \otimes \phi_A = \\ = c \left\{ |01\rangle \cos(tf\sqrt{SS^\dagger}) + \right. \\ \left. + |10\rangle S^\dagger \frac{1}{\sqrt{SS^\dagger}} \sin(tf\sqrt{SS^\dagger}) \right\} \otimes \phi_A + \\ + e \left\{ -|01\rangle S \frac{1}{\sqrt{S^\dagger S}} \sin(tf\sqrt{S^\dagger S}) + \right. \\ \left. + |10\rangle \cos(tf\sqrt{S^\dagger S}) \right\} \otimes \phi_A. \end{aligned} \quad (23)$$

Для однофотонного взаимодействия, которое можно описать гамильтонианом

$$H = i\hbar g(aS - a^\dagger S^\dagger), \quad (24)$$

также возникают простые решения, например, в следующем случае:

$$\begin{aligned} \exp(-i\hbar^{-1}Ht)(c|1\rangle \otimes |0; N\rangle + e|0\rangle \otimes |1; N\rangle) = \\ = c \left\{ \cos(gf\sqrt{N}) |1\rangle \otimes |0; N\rangle + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{N}} \sin(gf\sqrt{N}) |0\rangle \otimes |1; N\rangle \right\} + \\ + e \left\{ -\sqrt{N} \sin(gf\sqrt{N}) |1\rangle \otimes |0; N\rangle + \right. \\ \left. + \cos(gf\sqrt{N}) |0\rangle \otimes |1; N\rangle \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $|h; N\rangle$ ,  $h = 0, 1$ , — основное состояние  $|0\rangle^{\otimes N}$  атомов и симметричное состояние Дике, определенное согласно (6). Полученные решения справедливы только для введенных начальных состояний, они описывают процессы обмена возбуждением между атомами и светом.

### 7. ГЕНЕРАЦИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

На основе полученных точных решений рассмотрим эволюцию симметричных состояний Дике  $|h; N\rangle$  при однофотонном и комбинационном взаимодействиях.

Вначале рассмотрим случай, когда можно пренебречь пространственным поведением поля внутри атомного ансамбля. Тогда, полагая в формуле (25)  $\phi_A = |h; N\rangle$ , с помощью (9) найдем

$$\begin{aligned} (\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle) \otimes |h; N\rangle \rightarrow \\ \rightarrow \alpha \left\{ \cos\theta_h |01\rangle \otimes |h; N\rangle + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{h+1}{N-h}} \sin\theta_h |10\rangle \otimes |h+1; N\rangle \right\} + \\ + \beta \left\{ -\sqrt{\frac{N-h+1}{h}} \sin\theta'_h |01\rangle \otimes |h-1; N\rangle + \right. \\ \left. + \cos\theta'_h |10\rangle \otimes |h; N\rangle \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\theta_h = tf\sqrt{(h+1)(N-h)}, \quad \theta'_h = tf\sqrt{h(N-h+1)}.$$

Из (26) следует процесс генерации перепутанного атомного состояния, если вначале атомы были на нижнем уровне  $|0; N\rangle \rightarrow |1; N\rangle$ , и возможность преобразования перепутанных состояний с изменением числа возбужденных частиц  $|h; N\rangle \rightarrow |h \pm 1; N\rangle$ , в частности, распутывание:  $|h; N\rangle \rightarrow |h-1; N\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |0; N\rangle$ .

Особенностью точных решений (25) и (26) являются процессы типа обмена состоянием (swapping), которые позволяют, например, записывать состояние света на атомы, чтобы сохранить его на долгоживущем атомном ансамбле. Это представляет интерес для задачи квантовой памяти. Так, неизвестную суперпозицию света можно перенести на атомы и обратно, используя преобразование, которое следует из (25),

$$\begin{aligned} (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \otimes |0; N\rangle \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |0\rangle \otimes \left( \alpha \frac{1}{\sqrt{N}} |1; N\rangle + \beta |0; N\rangle \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогично с помощью (26) перепутанное состояние фотонов может быть перенесено на атомы:

$$\begin{aligned} (\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle) \otimes |0; N\rangle \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |10\rangle \otimes \left( \alpha \frac{1}{\sqrt{N}} |1; N\rangle + \beta |0; N\rangle \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Решения (25) и (26) позволяют учесть пространственное расположение атомов. В качестве примера рассмотрим однофотонное взаимодействие (24) одномерной цепочки атомов, находящихся в точках  $x_1, \dots, x_N$ , с модой электромагнитного поля. Такая задача будет описываться гамильтонианом (24), в котором

$$S = \sum_p s_{10}(p) \exp(ikx_p),$$



где  $s_{10}(p) = |1\rangle_p \langle 0|$  — оператор атома, расположенного в точке  $x_p$ ,  $p = 1, \dots, N$ . Тогда с помощью (25) можно получить, что

$$|1\rangle \otimes |0; N\rangle \rightarrow \cos \theta |1\rangle \otimes |0; N\rangle + \sin \theta |0\rangle \otimes \eta_N(1), \quad (29)$$

где  $\theta = tg \sqrt{N}$ ,

$$\eta_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[ \exp(ikx_1) |10 \dots 0\rangle + \dots + \exp(ikx_N) |0 \dots 01\rangle \right]. \quad (30)$$

Из выражения (30) следует, что при  $\theta = \pi/2$  возникает цепочка из перепутанных атомов. Заметим, что  $\eta_N$  будет состоянием Дике с  $j = m = N/2 - 1$  лишь в частном случае, когда

$$\sum_p \exp[ikx_p] = 0.$$

### 8. ПЕРЕПУТАННЫЕ АНСАМБЛИ АТОМОВ

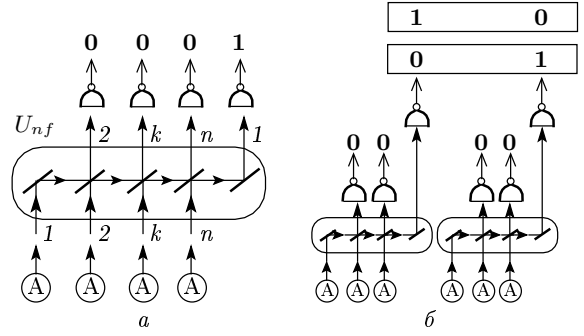
Из приведенных решений (23), (25) следует, что в результате взаимодействия фотон и атомный ансамбль оказываются перепутанными. Если взять набор таких независимых систем и перепутать, например, фотоны с помощью проекционных измерений, то атомные ансамбли станут перепутанными. Рассмотрим далее некоторые оптические схемы, основанные на этом методе, известном как обмен перепутыванием (entanglement swapping). Основными ресурсами для таких схем будут наборы из атомных ансамблей, скоррелированных с фотоном, полупрозрачные зеркала и однофотонные детекторы. Далее мы ограничимся схемами, в которых регистрируется только конкретный однофотонный исход.

В качестве исходного используем перепутанное состояние типа ЭПР-пары:

$$Z(W) = a|0\rangle_f \otimes |0\rangle + b|1\rangle_f \otimes |W\rangle, \quad (31)$$

где фоковские состояния поля отмечены индексом  $f$ , и введены обозначения  $|W\rangle = |1; N\rangle/\sqrt{N}$ ,  $|0\rangle = |0; N\rangle$ . Оно получается при комбинационном взаимодействии (22), где мода  $b$  является классической волной. Случай  $n$  независимых одинаковых атомных ансамблей, перепутанных со своим фотоном, будет описываться произведением

$$Z_n(W) = Z(W)^{\otimes n} = a^{n-1}b \left[ |10 \dots 0\rangle_f \otimes |W0 \dots 0\rangle + \dots + |00 \dots 1\rangle_f \otimes |00 \dots W\rangle \right] + \dots \quad (32)$$



а) Схема для перепутанных состояний из атомных ансамблей. б) Приготовление перепутанных состояний путем корреляции фотоотсчетов двух схем

Как показано на рис. а, фотоны, связанные с атомными ансамблями, попадают в схему из  $n - 1$  полупрозрачных зеркал, которая имеет  $n$  входов и  $n$  выходов. Каждое зеркало осуществляет преобразование

$$\begin{aligned} |01\rangle_f &\rightarrow c_k |01\rangle_f + s_k |10\rangle_f, \\ |10\rangle_f &\rightarrow -s_k |01\rangle_f + c_k |10\rangle_f, \end{aligned}$$

где  $c_k^2 + s_k^2 = 1$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Для всей схемы, которая описывается унитарным оператором  $U_{nf}$ , справедливо следующее свойство. Есть вход, с которого фотон может попасть на любой из  $n$  выходов, и есть выход, на который фотон может попасть с любого входа. Этот выход, на рис. а — выход 1, будем называть оптическим выходом, а расположенный там детектор — выходным. Схема осуществляет преобразование

$$\begin{aligned} U_{nf} |1 \dots 0\rangle_f &= t_1 |1 \dots 0\rangle_f + \dots + t_n |0 \dots 1\rangle_f, \\ U_{nf}^{-1} |1 \dots 0\rangle_f &= \tau_1 |1 \dots 0\rangle_f + \dots + \tau_n |0 \dots 1\rangle_f, \end{aligned} \quad (33)$$

где коэффициенты  $t_k, \tau_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , определяются пропусканием и отражением зеркал и

$$\sum_k t_k^2 = \sum_k \tau_k^2 = 1.$$

Если в схеме зарегистрирован фотон на выходном детекторе, что соответствует состоянию  $|1_f\rangle = |1 \dots 0\rangle$ , то с вероятностью

$$\text{Prob}(1) = |a^{n-1}b|^2 \quad (34)$$

будет приготовлено перепутанное состояние из атомных ансамблей:

$$\begin{aligned} \frac{\langle 1_f | U_{nf} Z_n(W)}{\sqrt{\text{Prob}(1)}} &= \eta_n(W), \\ \eta_n(W) &= q_1 |W \dots 0\rangle + q_n |0 \dots W\rangle. \end{aligned} \quad (35)$$

Рассмотренная схема имеет следующую особенность. Поскольку все коэффициенты  $q_1, \dots, q_n$  в (35) определяются только пропуском и отражением зеркал, можно использовать слабоперепутанные системы  $Z(W)$ , чтобы приготовить атомные ансамбли с высокой степенью перепутанности.

Рассмотрим несколько частных случаев. Пусть  $n = 2$ , тогда  $q_1 = c_1, q_2 = s_1$  и возникает ЭПР-пара вида

$$\eta_2(W) = EPR(W) = c_1|W0\rangle + s_1|0W\rangle.$$

При  $c_1 = s_1 = 1/\sqrt{2}$  она будет максимально перепутанной. Пусть  $n = 3$  и  $q_1 = c_1c_2, q_2 = -s_1c_2, q_3 = s_2$ . В этом случае возникает состояние  $W$ -класса. Если  $c_1 = -s_1 = 1/\sqrt{2}, c_2 = \sqrt{2/3}$ , то

$$\eta_3(W) = W(W) = \frac{1}{\sqrt{3}}(|W00\rangle + |0W0\rangle + |00W\rangle). \quad (36)$$

В частности, можно приготовить несимметричное состояние

$$\widetilde{W}(W) = \frac{1}{\sqrt{2}}|W00\rangle + \frac{1}{2}|0W0\rangle + \frac{1}{2}|00W\rangle.$$

При  $N = 1$  оно унитарно эквивалентно GHZ и может быть использовано как квантовый канал для телепортации и плотного кодирования [29].

Путем корреляции фотоотчетов, объединяя рассмотренные схемы, можно получить смешанные состояния из атомных ансамблей, которые могут быть несепарабельными. В качестве примера рассмотрим две одинаковые независимые схемы  $S_2(X)$ , содержащие по три однофотонных детектора, как показано на рис. б. Пусть фотон зарегистрирован либо в первой, либо во второй схеме, тогда возникает пара состояний

$$\langle 1_f | S_2(X) \otimes \langle 0_f | S_2(X) w = |\eta_2(X), 0\rangle$$

и

$$\langle 0_f | S_2(X) \otimes \langle 1_f | S_2(X) w = |0, \eta_2(X)\rangle.$$

Пусть выходы детекторов связаны так, что они регистрируют один фотон, который приходит либо с первой, либо со второй схемы. Такое измерение описывается проектором  $|1_f 0_f\rangle\langle 1_f 0_f| + |0_f 1_f\rangle\langle 0_f 1_f|$ . В результате будет возникать смешанное состояние вида

$$\rho(X) = \frac{1}{2} \left[ |\eta_2(X), 0\rangle\langle \eta_2(X), 0| + |0, \eta_2(X)\rangle\langle 0, \eta_2(X)| \right]. \quad (37)$$

Является ли оно сепарабельным, вопрос открытый, поскольку для смешанных состояний необходимый и достаточный критерий известен только для систем с размерностью  $2 \times 2, 2 \times 3$ . Однако положим, что  $N = 1$ , т. е. вместо ансамблей в схеме участвуют 4 атома. Тогда

$$\eta_2(X) = \Psi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

и матрица плотности (37) описывает четырехчастичное состояние

$$\rho(4) = \frac{1}{2} (|\Psi^+ 00\rangle\langle \Psi^+ 00| + |00 \Psi^+\rangle\langle 00 \Psi^+|). \quad (38)$$

Рассмотрим далее состояние пары атомов из первой схемы, определяя двухчастичную редуцированную матрицу плотности

$$\rho(2) = \frac{1}{2} [ |\Psi^+\rangle\langle \Psi^+| + |00\rangle\langle 00| ],$$

для которой можно воспользоваться критерием сепарабельности. Тогда транспонированная по одному из атомов матрица плотности имеет четыре собственных числа, одно из которых отрицательно:  $1/4, 1/4, (1 \pm \sqrt{2})/4$ . Это означает, что состояние этой пары частиц несепарабельное или перепутанное. Поэтому матрица плотности  $\rho(4)$  не является сепарабельной.

## 9. ИЕРАРХИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА СОСТОЯНИЙ

Особенностью выражения (35) является его иерархическая организация. Это свойство можно проиллюстрировать, рассматривая объединение введенных схем, каждая из которых приготавливает состояние подобного типа. В отличие от схем, где использованы корреляции фотоотчетов, в данном случае речь идет об оптическом соединении схем. Возьмем элементарную схему, представленную на рис. а, которая осуществляет преобразование  $S_n(X) = U_{nf} Z_n(W)$ , где  $X = W$ . Если в ней зарегистрирован описанный однофотонный исход, возникает состояние вида (35):

$$\langle 1_f | S_n(X) w = \eta_n(X) = \tau'_1 |X0 \dots 0\rangle + \dots + \tau'_n |00 \dots X\rangle, \quad (39)$$

где  $w = 1/\sqrt{\text{Prob}(1)}$ . Определим оптический выход схемы  $S_n(X)$  как выход, на который фотон может попасть с любого из  $n$  входов, на рис. а это выход 1. Определим вход схемы  $S_n(X)$  как оптический вход

системы зеркал. Тогда можно взять, например,  $p$  независимых схем  $(S_n(X))^p$ , оптические выходы которых будут служить входом схемы  $S_p$ . В результате получится новая схема  $S_p((S_n(X))^p)$ . Если в ней зарегистрирован однофотонный исход, возникает перепутанное состояние, которое, в свою очередь, состоит из перепутанных состояний:

$$\langle 1_f | S_p((S_n(X))^p) w = \eta_p(\eta_n(X)) = t_1 |\eta_n(X), 0 \dots 0\rangle + \dots + t_p |0, 0, \dots \eta_n(X)\rangle. \quad (40)$$

С учетом (39) оно принимает вид:

$$\eta_p(\eta_n(X)) = \eta_{pn}(X). \quad (41)$$

В итоге можно сформулировать следующее свойство. Состояние  $\eta_n(X)$ , определенное формулой (36), где  $n = n_1 n_2 \dots n_p$ , всегда можно представить в виде

$$\eta_n(X) = \eta_{n_1}(\eta_{n_2}(\dots(\eta_{n_p}))). \quad (42)$$

Отсюда следует, что вектор  $\eta_n(X)$  обнаруживает структуру перепутанного состояния относительно любой группы из  $s$  частиц, где  $n/s$  — натуральное число, большее 1.

Иерархическая структура, представленная уравнениями (35) и (40), при наличии симметрии у волновых функций может быть получена из известного разложения перманента, который представляет из себя детерминант с правилом сложения перестановок, зависящим от симметрии [30]. Так, путем последовательного разложения детерминанта по строкам или столбцам с последующей группировкой слагаемых можно получить представление перманента через перманенты более низкой размерности, что отражает иерархическую структуру.

В качестве примера рассмотрим случай  $n = 6$ , для которого

$$\eta_6(X) = \eta_3(\eta_2(X)) = \eta_2(\eta_3(X)). \quad (43)$$

Это состояние имеет структуру типа ЭПР или типа  $W$ :

$$\eta_3(\eta_2(X)) = W(EPR) = EPR(W).$$

Из этого примера следует, что одно и то же состояние обнаруживает структуру двух разных типов перепутанных состояний, которые, заметим, могут быть использованы для разных задач. Так, ЭПР-пара может выступать квантовым каналом для процессов телепортации и плотного кодирования, а симметричное  $W$ -состояние может быть использовано для клонирования.

Чтобы выбрать ту или иную структуру, которая определяется размерностью гильбертова пространства ее элемента, следует ввести соответствующий базис и наблюдаемые. С физической точки зрения в данном случае это равносильно введению двухуровневого приближения. Действительно, любая группа из  $s$  частиц, где  $n/s$  — натуральное число, большее 1, представлена в  $\eta_n(X)$  двумя своими состояниями  $|0\rangle = 0_s$  и  $\eta_s(X) = 1_s$ . Эту группу можно рассматривать как двухуровневую частицу или кубит, для которого векторы  $0_s, 1_s$  образуют базис. Это позволяет использовать введенные кубиты и иерархические состояния  $\eta_n(X)$  для задач квантовой теории информации. Заметим, что аналогично (30) лишь в случае, когда  $\sum_k \tau_k = 0$ , вектор  $\eta_n(X)$  будет состоянием Дике.

## 10. ВЫВОДЫ

На основе модели, содержащей одинаковые двухуровневые атомы, обладающие релаксацией, и узкополосное резонансное поле, с которым они взаимодействуют, рассмотрены возникающие многочастичные перепутанные состояния. Для описания взаимодействия используется эффективный гамильтониан, который позволяет учитывать различные многофотонные процессы. Статистические свойства света и атомов характеризуются матрицей плотности, для которой получены решения во втором порядке теории возмущений по взаимодействию и точные решения в условиях пренебрежения релаксацией. Обнаружено, что при возбуждении слабым одномодовым светом в сжатом состоянии состояние любой пары атомов оказывается несепарабельным и устойчивым к процессу релаксации. Показано, что для генерации и приготовления перепутанных симметричных многочастичных состояний могут быть использованы оптические схемы, основанные на квантовых проекционных однофотонных измерениях. Приведена оптическая схема, использующая проекционное измерение, которая позволяет из слабоперепутанных систем приготавливать атомные ансамбли с высокой степенью перепутанности.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Delzell Foundation Inc.

## ЛИТЕРАТУРА

1. B. Julsgaard, A. Kozhokin, and E. S. Polzik, *Nature* **413**, 400 (2001).

2. C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **75**, 4714 (1995).
3. E. Hagley, X. Maitre, G. Nogues et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 1 (1997).
4. G. K. Brennen, C. M. Caves, P. S. Jessen, and I. H. Deutsch, Phys. Rev. Lett. **82**, 1060 (1999).
5. A. V. Burlakov, M. V. Chekhova, and O. A. Karabutova, Phys. Rev. A **60**, 4209 (1999); A. В. Бурлаков, М. В. Чехова, Письма в ЖЭТФ **75**, 505 (2002); A. В. Бурлаков, Л. А. Кривицкий, С. П. Кулик и др., Опт. и спектр. **94**, 743 (2003); Ю. И. Богданов, Л. А. Кривицкий, С. П. Кулик, Письма в ЖЭТФ **78**, 804 (2003); Л. А. Кривицкий, С. П. Кулик, А. Н. Пенин, М. В. Чехова, ЖЭТФ **124**, 943 (2003).
6. W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac, Phys. Rev. A **62**, 062314 (2000).
7. M. Eibl, N. Kiesel, M. Bourennane, C. Kurtsiefer, and H. Weinfurter, Phys. Rev. Lett. **92**, 077901 (2004).
8. F. Verstraete, J. Dehaene, B. De Moore, and H. Verscheld, Phys. Rev. A **65**, 052112 (2002).
9. A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996); M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
10. А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **75**, 151 (2002); ЖЭТФ **121**, 1249 (2002).
11. M. Plesch, J. Novotny, Z. Dzurakova, and V. Buzek, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 1843 (2004).
12. W. Dur, Phys. Rev. A **63**, R020303 (2001).
13. J. K. Stockton, G. M. Geremia, A. C. Doherty, and H. Mabuchi, Phys. Rev. A **67**, 022112 (2003).
14. V. Buzek and M. Hillery, Phys. Rev. A **54**, 1844 (1998); M. Mirao, D. Jonathan, M. B. Plenio, and V. Vedral, Phys. Rev. A **59**, 156 (1999).
15. J. Joo, Y.-J. Park, J. Lee, and J. Jang, E-print archives, LANL, quant-ph/0204003.
16. V. N. Gorbachev, A. I. Trubilko, A. A. Rodichkina, and A. I. Zhiliba, Phys. Lett. A **314**, 267 (2003).
17. E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn, Nature **409**, 46 (2001).
18. H. J. Briegel and R. Raussendorf, Phys. Rev. Lett. **86**, 5188 (2001).
19. R. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
20. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, Кооперативные явления в оптике, Наука, Москва (1988).
21. H. Hammer, E-print archives, LANL, quant-ph/0407094.
22. A. Olaya-Castro, N. F. Johnson, and L. Quiroga, Phys. Rev. A **70**, R020301 (2004).
23. N. Gisin and S. Popescu, Phys. Rev. Lett. **83**, 432 (1999).
24. А. М. Башаров, Метод унитарного преобразования в нелинейной оптике, МИФИ, Москва (1990); А. М. Башаров, ЖЭТФ **102**, 1126 (1992).
25. D. V. Kupriyanov, I. M. Sokolov, and A. V. Slavgorodskii, Phys. Rev. A **63**, 063811 (2001); **68**, 043815 (2003).
26. V. N. Gorbachev, A. I. Zhiliba, A. A. Rodichkina, and A. I. Trubilko, Phys. Lett. A. **323**, 339 (2004).
27. H. J. Briegel and R. Raussendorf, Phys. Rev. Lett. **86**, 910 (2001); R. Raussendorf, D. E. Browne, and H. J. Briegel, E-print archives, LANL, quant-ph/0301052.
28. А. М. Башаров, Э. А. Манькин, Опт. и спектр. **96**, 91 (2004).
29. V. N. Gorbachev, A. I. Trubilko, A. A. Rodichkina, and A. I. Zhiliba, Phys. Lett. A **314**, 267 (2003).
30. С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, Изд-во иностр. лит., Москва (1963).