

ИНЖЕКЦИЯ СПИНОВ ТОКОМ И ПОВЕРХНОСТНЫЙ КРУТИЛЬНЫЙ МОМЕНТ В ФЕРРОМАГНИТНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЕРЕХОДАХ

Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман*, Э. М. Эпштейн

Институт радиотехники и электроники Российской академии наук
141190, Фрязино, Московская обл., Россия

Р. Дж. Эллиотт**

University of Oxford, Department of Physics, Theoretical Physics
Oxford OX1, UK

Поступила в редакцию 29 ноября 2004 г.

Теоретически рассмотрено совместное влияние двух создаваемых током факторов: 1) инжекции продольных неравновесных спинов и 2) поверхностного крутильного момента, на состояние ферромагнитного металлического перехода типа спинового вентиля. Ток течет перпендикулярно границам слоев. Рассмотрение основано на решении связанной системы уравнений движения для намагниченностей подвижных электронов и решетки. Граничные условия к уравнениям движения выводятся из требования непрерывности суммарного потока намагниченности указанных подсистем. Выведено дисперсионное соотношение для зависящих от тока через переход спин-волновых флуктуаций. При токах, превышающих пороговое значение (обычно около 10^6 – $3 \cdot 10^7$ А/см²), наступает неустойчивость флуктуаций. Совместное действие инжекции продольных спинов и крутильного момента снижает порог неустойчивости. Инжекция спинов током уменьшает собственные частоты спиновых волн вблизи порога и может усиливать закрепление намагниченности на инжектирующем контакте.

PACS: 75.60.Ej, 75.47.De

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительное внимание уделяется исследованию особенностей протекания тока через так называемые ферромагнитные переходы, т. е. слоистые структуры с контактирующими тонкими ферромагнитными слоями. Как показали эксперименты, ток может существенно влиять на магнитное состояние слоев в таких переходах, что приводит к характерным скачкам их электросопротивления [1–3], а также к эмиссии СВЧ-излучения из них [4–6].

Вопрос о механизмах влияния тока на магнитное состояние оставался до сих пор не вполне ясным. В работе [7] был предложен механизм влияния тока на ориентацию вектора намагниченности решетки

ферромагнитного слоя \mathbf{M} за счет инжекции неравновесных продольных (коллинеарных с \mathbf{M}) спинов в этот слой. В работах [8–10] была построена теория этого механизма. Инжекция создает неравновесную спиновую поляризацию носителей тока в слое. Эта поляризация, в свою очередь, приводит к дополнительному вкладу в энергию s – d -обмена $U_{s-d}(\mathbf{j})$ и в соответствующее s – d -обменное эффективное поле $\mathbf{H}_{s-d}(\mathbf{j})$, которые зависят от плотности электрического тока \mathbf{j} . При увеличении плотности тока выше определенного порога происходит ориентационный фазовый переход первого рода в поле $\mathbf{H}_{s-d}(\mathbf{j})$ и скачкообразное изменение направления вектора \mathbf{M} . Этот эффект перемагничивания током (или «переключения» намагниченности током) приводит к скачкам электросопротивления, которые хорошо соответствуют экспериментам [1–3].

С другой стороны, в работах [11, 12] задолго до появления экспериментальных данных ра-

*E-mail: zil@ms.ire.rssi.ru

**R. J. Elliott

бот [1–6] был предсказан иной механизм воздействия тока на состояние ферромагнитного слоя. Согласно этому механизму, поток поперечных (относительно \mathbf{M}) спинов подвижных электронов должен исчезать непосредственно вблизи границы раздела двух неколлинеарных ферромагнетиков. Благодаря существованию взаимодействия подвижных электронов и магнитной решетки (s – d -обменному взаимодействию) на границе возникает крутильный момент, который действует на решетку и отвечает на нее исчезающий поток. В результате этого суммарный спиновый поток подвижных электронов и решетки остается непрерывным на границе раздела.

Помимо такого пропорционального току крутильного момента, на вектор \mathbf{M} действует еще и другой момент, вызываемый диссипацией, которая стремится восстановить магнитное равновесие. По мере увеличения плотности тока \mathbf{j} влияние диссипации, в конце концов, должно быть перекрыто крутильным моментом, и тогда равновесие становится неустойчивым, а вектор намагниченности переориентируется. Такой механизм переориентации, согласно многим оценкам, также соответствует экспериментам [1–6].

В оригинальных работах [11, 12] считалось, что исчезновение поперечного потока спинов подвижных электронов происходит в условиях баллистического переноса. Обратный предельный случай, когда преобладает диффузионный перенос, был рассмотрен в работах [13, 14]. Однако в данной статье в этом вопросе мы будем придерживаться подхода работ [11, 12] и считать, что перенос непосредственно вблизи границы можно считать баллистическим. Количественные критерии справедливости этого предположения представлены в разд. 2.

Возникает, однако, существенный вопрос о том, как же обстоит дело в реальном эксперименте, когда сосуществуют оба указанных эффекта, а именно, инжекция неравновесных продольных спинов с создаваемым ею зависящим от тока эффективным полем и зависящий от тока крутильный момент на границе раздела в магнитном переходе. Во всех известных работах до сих пор каждый из указанных эффектов исследовался по отдельности. Между тем эти эффекты не только сосуществуют, но и влияют друг на друга. Поэтому для лучшего понимания экспериментальной ситуации необходимо учесть оба эффекта одновременно в рамках единой теории, что и составляет цель данной статьи.

Следует сделать два замечания. Во-первых, теоретическое описание «анатомии» крутильного момента, как это следует из работ [11, 12] и из специально посвященной такому описанию работы [15],

представляет собой достаточно сложную микроскопическую квантовую задачу. Решение этой задачи несомненно представляет интерес само по себе. Однако, по нашему мнению, подобный подход был бы излишним усложнением, если бы мы попытались, следуя ему, строить нужную нам единую теорию. Более естественным представляется воспользоваться различием пространственных масштабов действия двух указанных факторов: спиновой инжекции и крутильного момента. Крутильный момент есть глубоко поверхностный эффект. В работах [11, 12] отмечается, что он действует на расстояниях d от границы раздела ферромагнитных слоев, которые по порядку величины равны квантовой длине волны электрона на поверхности Ферми $\lambda_F \sim 1$ нм. В то же время неравновесные спины инжектируются в глубь пленки гораздо дальше, а именно, на длину спиновой диффузии, что для ферромагнитных металлов при комнатных температурах составляет $l \approx 10$ – 100 нм. Таким образом, спиновая инжекция по сравнению с крутильным моментом есть в гораздо большей степени объемный эффект. По этой причине спиновая инжекция описывается далее путем решения связанной системы уравнений для подвижных электронов и для вектора намагниченности решетки \mathbf{M} в объеме ферромагнитного слоя, а крутильный момент учитывается как граничное условие к этим уравнениям. Будет показано, что такое граничное условие может быть получено достаточно просто из условия сохранения суммарного спинового потока.

Второе замечание касается методической особенности данной статьи. В отличие от наших предшествующих работ (например, [8–10]), основанных методически на вариационном принципе (минимуме магнитной энергии), в данной работе задача решается чисто динамически на основе линеаризованных уравнений Ландау – Лифшица – Гильберта (ЛЛГ). Дело в том, что ранее мы описывали ориентационный фазовый переход под влиянием спиновой инжекции, который соответствовал исчезновению минимума энергии. При этом действие поверхностного крутильного момента не учитывалось. Неустойчивость из-за действия крутильного момента, как будет показано далее в статье, не имеет отношения к фазовым переходам и минимуму энергии. Скорее, она вызвана механизмом генерации энергии, перекрывающим диссипативные потери. Поэтому при описании одновременно обоих типов неустойчивости необходимо выбрать наиболее общий подход, основанный на уравнениях движения. Применительно к чисто инжекционному механизму оба упо-

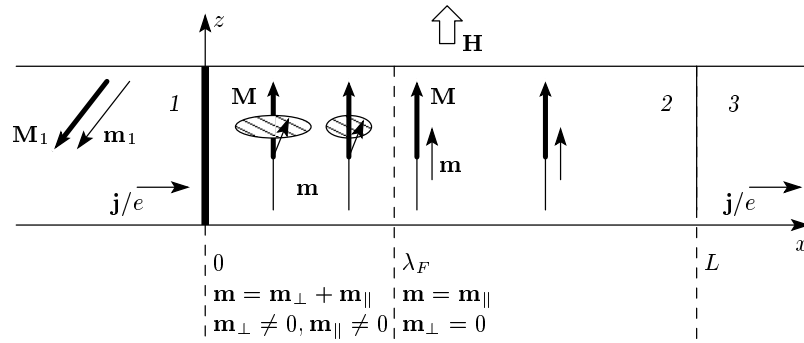


Рис. 1. Схема рассматриваемого магнитного перехода, иллюстрирующая процессы в слое 2: 1, 2, 3 — контактирующие слои. Стрелками показано направление следующих векторов: намагниченностей M_1 , m_1 в слое 1 и M , m в слое 2, внешнего магнитного поля H (лежит в плоскости перехода $x = 0$) и потока электронов j/e . Вертикальными штриховыми линиями показаны два подслоя внутри слоя 2. В подслое $0 \leq x \leq \lambda_F$ происходит прецессия, которая условно обозначена овалами. При этом вектор m имеет как продольную m_{\parallel} , так и поперечную m_{\perp} составляющую. Угол прецессии убывает с ростом x . В подслое $x > \lambda_F$ прецессия прекращается и остается только одна из указанных составляющих вектора m , а именно, продольная

мянутых подхода эквивалентны, что ранее было показано в работе [9]. Этот вывод подтверждается также и расчетами в данной статье.

2. МОДЕЛЬ ПЕРЕХОДА

Рассмотрим магнитный переход типа «спинового вентиля», в котором ток течет перпендикулярно границам раздела слоев (см. рис. 1). Переход содержит ферромагнитный слой 1 с фиксированной ориентацией спинов решетки и свободных электронов. Это достигается лучше всего, если в слое 1 имеется достаточно большая наведенная магнитная анизотропия и, кроме того, он изготовлен из «половинного металла», в котором фактически принимает участие в проводимости лишь одна из двух спиновых подзон [16]. Другой ферромагнитный металлический слой 2 содержит, по предположению, свободные спины — ориентация вектора намагниченности в нем может меняться под воздействием внешнего магнитного поля H или поляризованного по спину тока j . Между слоями 1 и 2 имеется весьма тонкий немагнитный разделяющий слой (на рис. 1 показан жирной линией). Для замыкания электрической цепи необходим немагнитный металлический слой 3.

Плоскость $x = 0$ есть граница раздела слоев 1 и 2. В пределах слоя 1 векторы намагниченностей решетки, M_1 , и подвижных электронов, m_1 , коллинеарны, причем предположено, что вектор M_1 параллелен плоскости $x = 0$. Векторы M_1 и M могут составлять между собой угол $\chi \neq 0$. Поэтому элек-

троны, переносимые током в слой 2, вблизи границы $x = 0$ попадают в нестационарное квантовое состояние и «гуляют» между спиновыми подзонами. На рис. 1 этому соответствует прецессия векторов намагниченности подвижных электронов, m , и намагниченности решетки, M . В работах [11, 12] было показано, что спин каждого индивидуального электрона прецессирует со своей начальной фазой

$$\varphi(d) = [k_{x\uparrow} - k_{x\downarrow}] d, \tag{1}$$

зависящей от того, на каком расстоянии d находится электрон от границы раздела. В выражении (1) величины $k_{x\uparrow}$ и $k_{x\downarrow}$ суть компоненты волнового вектора электрона k , взятые соответственно в подзонах со спином вверх (в направлении M) и вниз. Вследствие статистического разброса электронов по скоростям выражение в квадратных скобках в формуле (1) по модулю меняется в пределах от 0 до $2\pi/\lambda_F$, где λ_F — длина волны на поверхности Ферми. Поэтому при $d = \lambda_F$ фаза (1) распределяется в интервале $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Поскольку поперечная (относительно M) компонента m_{\perp} вектора m представляет собой сумму поперечных компонент индивидуальных электронов δm_{\perp} , с достаточной точностью происходит компенсация слагаемых, в результате чего

$$m_{\perp} = \sum \delta m_{\perp} \rightarrow 0. \tag{2}$$

Подчеркнем, что $l \gg \lambda_F$ и потому спиновая релаксация не влияет на выполнение условия (2). Кроме того, при получении формулы (2) считалось, что режим движения электронов в слое $0 \leq x \leq \lambda_F$ бал-

листический и потому вектор \mathbf{k} не меняется вследствие столкновений. Это справедливо при $l_p > \lambda_F$, где l_p — длина свободного пробега по импульсу. Поскольку типично $l_p \sim 1\text{--}10$ нм и $\lambda_F \sim 1$ нм, условие баллистического режима может хорошо выполняться. Слой 2 предполагается далее достаточно протяженным, так что его толщина $L \gg \lambda_F, l_p$.

Условие (2) приводит к следующим важным для дальнейшего выводам.

1) Прецессия внутри слоя 2 прекращается на малом расстоянии $d \sim \lambda_F \sim 1$ нм от границы раздела со слоем 1. При этом исчезает поперечная компонента намагниченности подвижных электронов и связанный с нею спиновый поток. Согласно идее работ [11, 12], это и приводит к возникновению крутильного момента, который действует на решетку и обеспечивает непрерывность потока поперечной составляющей полной намагниченности ($\mathbf{M}_\perp + \mathbf{m}_\perp$).

2) При координатах $x > d \sim \lambda_F$ подвижные электроны адаптируются к новому направлению оси квантования (направлению вектора \mathbf{M}) и заселяют новые для них спиновые подзоны. Однако заселенность этих подзон зависит от тока и отнюдь не является равновесной. Она определяется из условия непрерывности продольной компоненты потока намагниченности подвижных электронов (т. е. потока вектора \mathbf{m}_\parallel) через границу раздела. Продольная компонента потока не меняется на расстояниях от границы x , которые удовлетворяют неравенству $x \ll l$. Это и есть эффект «спиновой инжекции», впервые, видимо, рассмотренный в работе [17]. По существу, этот эффект аналогичен хорошо известному эффекту инжекции заряда в полупроводниках [18]¹⁾. В соответствии с типичными оценками параметров, $l \gg l_p$, и поэтому движение инжектированных электронов в глубине слоя 2 происходит в диффузионном режиме.

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Перейдем к рассмотрению процессов в слое 2. Эти процессы описываются системой динамических уравнений для векторов \mathbf{M} и \mathbf{m} . Намагниченность

¹⁾ Отметим, что инжекция спинов может осуществляться не только током, как в работе [17] или в данной работе, но и с помощью поляризованного света (см., например, обзор [19]). По-видимому, представление об инжекции спинов может приобрести в будущем широкое значение, сравнимое со значением представления об инжекции зарядов в полупроводниковых приборах.

\mathbf{M} решетки²⁾ удовлетворяет уравнению ЛЛГ, имеющему вид

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}] + \frac{\kappa}{M} \left[\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right], \quad (3)$$

где γ — гиромагнитное отношение, κ — безразмерная константа затухания, причем $0 < \kappa \ll 1$, t — время; \mathbf{H}_{eff} — эффективное поле, которое равно

$$\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H} + \beta (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} + A \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2} + \mathbf{H}_{s-d} + \mathbf{H}_d, \quad (4)$$

β — безразмерная константа анизотропии, \mathbf{n} — единичный вектор вдоль оси анизотропии, A — константа неоднородного обмена, \mathbf{H}_d — размагничивающее поле и \mathbf{H}_{s-d} — эффективное поле, создаваемое s - d -обменным взаимодействием, которое, согласно известным определениям [20], имеет вид

$$\mathbf{H}_{s-d}(x, t) = -\frac{\delta U_{s-d}}{\delta \mathbf{M}(x, t)}, \quad (5)$$

где $\delta/\delta \mathbf{M}(x, t)$ — вариационная производная, а энергия s - d -обмена равна

$$U_{s-d} = -\alpha \int_0^L dx' \mathbf{m}(x', t) \mathbf{M}(x', t), \quad (6)$$

где α — безразмерная константа s - d -обменного взаимодействия (типичная оценка ее величины $\alpha \sim 10^4\text{--}10^6$ [8]). Благодаря слагаемому (5) в выражении (4) колебания векторов \mathbf{M} и \mathbf{m} оказываются связанными.

Намагниченность подвижных электронов \mathbf{m} удовлетворяет уравнению непрерывности следующего общего вида [17, 21]:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial x} + \gamma \alpha [\mathbf{m} \times \mathbf{M}] + \frac{\mathbf{m} - \bar{\mathbf{m}}}{\tau} = 0, \quad (7)$$

где τ обозначает время релаксации к локально равновесному значению $\bar{\mathbf{m}} = \bar{m} \cdot \hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}/M$ — единичный вектор, вектор \mathbf{J} — плотность потока намагниченности. Для последующих оценок подставим в (7) $\partial \mathbf{m}/\partial t = \omega \Delta \mathbf{m}$, где $\Delta \mathbf{m} \equiv \mathbf{m} - \bar{\mathbf{m}}$ и ω — эффективная частота колебаний вектора \mathbf{m} во времени.

В подслое $0 \leq x < \lambda_F$, согласно разд. 2, вектор \mathbf{m} быстро прецессирует в s - d -обменном поле, так что $\omega \sim \gamma \alpha M \equiv \omega_{s-d}$. При типичных параметрах $\alpha \sim 2 \cdot 10^4$, $M \sim 10^3$ Гс и $\tau \sim 3 \cdot 10^{-13}$ с справедлива оценка $\omega_{s-d} \tau \sim 10^2 \gg 1$, так что можно пренебречь

²⁾ Имеется в виду решетка магнитных ионов, описываемая в приближении сплошной среды.

последним релаксационным слагаемым в формуле (7). Тогда, вычисляя с помощью (7) произведения $(\Delta \mathbf{m} \cdot \mathbf{M})$ и $[\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{M}]$, а затем разрешая это уравнение относительно явно входящего $\Delta \mathbf{m}$, получаем

$$\Delta \mathbf{m} = -\omega^{-1} \times \frac{\partial \mathbf{J} / \partial x + \zeta [\hat{\mathbf{M}} \times \partial \mathbf{J} / \partial x] + \zeta^2 \hat{\mathbf{M}} (\hat{\mathbf{M}} \cdot \partial \mathbf{J} / \partial x)}{1 + \zeta^2}, \quad (8)$$

где введен параметр $\zeta = \omega_{s-d} \omega^{-1} \sim 1$. Представление (8) и приведенная оценка параметра ζ показывают, что продольные и поперечные (относительно \mathbf{M}) компоненты в $\Delta \mathbf{m}$ могут оказаться сравнимыми по величине, что согласуется с картиной прецессии электронных спинов в приграничном подслое (см. разд. 2).

Однако детальный анализ движений в приграничном подслое затруднен, поскольку необходимо вычислить поток \mathbf{J} и выразить его через вектор \mathbf{m} . В подслое $0 \leq x < \lambda_F$ это потребовало бы дополнительного решения уравнения для спиновой матрицы плотности, поскольку электроны находятся в квантовом нестационарном и неоднородном состоянии. Мы постараемся обойти это затруднение и показать далее (в разд. 4), что решение подобной квантовой задачи не является обязательным для наших целей и может быть заменено введением некоторого нового граничного условия.

Детальный анализ движений потребует проведения для подслоя $x > \lambda_F$. В этом подслое векторы \mathbf{m} и \mathbf{M} должны быть почти коллинеарными и соответственно эффективная частота ω должна определяться прецессией вектора \mathbf{M} в сравнительно слабых полях H , βM , $H_d \ll \alpha M$. Мы предположим, что выполняется условие

$$\omega \tau \ll 1, \quad (9)$$

которое позволяет пренебречь в уравнении (7) производной по времени по сравнению с релаксационным слагаемым. Представление для $\Delta \mathbf{m}$ вида (8) остается при этом справедливым, но в нем следует сделать замену $\omega^{-1} \rightarrow \tau$ и соответственно $\zeta \rightarrow \omega_{s-d} \tau \gg 1$. В результате меняется оценка слагаемых в (8). Последнее слагаемое в числителе правой части (8) становится доминирующим и можно написать

$$\Delta \mathbf{m} = -\tau \hat{\mathbf{M}} (\hat{\mathbf{M}} \cdot \partial \mathbf{J} / \partial x). \quad (10)$$

Таким образом, предположение о приближенной коллинеарности векторов $\Delta \mathbf{m}$ (а значит, и всего вектора \mathbf{m}) и \mathbf{M} подтверждается. Поперечные компоненты вектора \mathbf{m} все же существуют, однако они

малы по параметру $(\omega_{s-d} \tau)^{-1} \sim 10^{-2} \ll 1$ и в дальнейшем учитываться не будут.

В подслое $x > \lambda_F$ подвижные электроны заселяют две спиновые подзоны: со спином вверх, т. е. параллельно \mathbf{M} , и со спином вниз, т. е. антипараллельно \mathbf{M} . Намагниченность \mathbf{m} содержит вклады от этих двух подзон и может быть представлена в виде

$$\mathbf{m} = \mu_B (n_{\uparrow} - n_{\downarrow}) \hat{\mathbf{M}} \equiv m \hat{\mathbf{M}}, \quad (11)$$

где μ_B — магнетон Бора, $n_{\uparrow, \downarrow}$ — парциальные плотности электронов в спиновых подзонах, причем суммарная плотность $n = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$ не зависит от x и t в силу условия локальной нейтральности в металле. Поток намагниченности \mathbf{J} в (10) также можно связать с парциальными плотностями электрического тока в каждой из подзон, j_{\uparrow} и j_{\downarrow} . Эта связь, очевидно, имеет вид

$$\mathbf{J} = \frac{\mu_B}{e} (j_{\uparrow} - j_{\downarrow}) \hat{\mathbf{M}}, \quad (12)$$

причем суммарный ток $j = j_{\uparrow} + j_{\downarrow}$ также не зависит от x и t в силу принимаемой нами одномерной геометрии.

Рассмотрим далее простую ситуацию, когда s - d -обменная щель в слое 2 не зависит от x , t и, следовательно, от направления $\hat{\mathbf{M}}$. Кроме того, транспортные времена релаксации в металлах при комнатной температуре достаточно малы, так что справедливо представление тока в виде диффузионного и дрейфового слагаемых. В рамках этих предположений вычисление спинового потока (12) было проведено в работе [9]. Подставляя в (12) известные формулы для парциальных токов и следуя прямому пути расчета, указанному в [9], получаем

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\mu_B}{e} Q j - \tilde{D} \frac{\partial m}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{M}}, \quad (13)$$

где $Q = (\sigma_{\uparrow} - \sigma_{\downarrow}) / (\sigma_{\uparrow} + \sigma_{\downarrow})$ — спиновая поляризация тока, а $\tilde{D} = (\sigma_{\uparrow} D_{\downarrow} + \sigma_{\downarrow} D_{\uparrow}) / (\sigma_{\uparrow} + \sigma_{\downarrow})$ — коэффициент спиновой диффузии, причем σ_{\uparrow} , σ_{\downarrow} и D_{\uparrow} , D_{\downarrow} — соответственно удельные парциальные проводимости и коэффициенты диффузии для электронов со спином вверх и вниз. Чтобы получить выражение (13), дополнительно потребовалось предположить, что

$$\frac{j}{j_D} \ll 1, \quad (14)$$

где $j_D \equiv enl / \tau$ — характеристическая плотность тока в слое 2. Смысл условия (14) состоит в том, что ток относительно слабо возмущает заселенности

подзон, т. е. реализуется малый уровень спиновой инжекции. Подставляя сюда типичные значения параметров $n \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $l \sim 3 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ и $\tau \sim 3 \cdot 10^{-13} \text{ с}$, получаем $j_D \sim 1.6 \cdot 10^{10} \text{ А/см}^2$. Далее нас будут интересовать лишь значительно более слабые токи $j \leq 10^7\text{--}10^8 \text{ А/см}^2$, поскольку именно такого порядка оказываются исследуемые далее пороги неустойчивости. Следовательно, условие (14) в наших расчетах хорошо выполняется.

Остается подставить выражение для потока (13) в представление (10) уравнения движения (7). Тогда получаем

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - \frac{m - \bar{m}}{l^2} = 0, \quad (15)$$

где функция $m(x, t)$ определена в формуле (11), а ее локально равновесное значение \bar{m} определено при обсуждении уравнения (7). Поскольку s - d -обменная щель постоянна, следует считать \bar{m} не зависящим от x, t . Длина спиновой диффузии $l = \sqrt{\tilde{D}\tau}$.

4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Теперь необходимо определить, какие именно решения основных динамических уравнений (3) и (15) следует искать. С этой целью выведем далее граничные условия к указанным уравнениям. В основе вывода лежит требование того, чтобы потоки суммарной намагниченности (подвижных электронов и решетки) были непрерывны на границах раздела слоев.

Поскольку решетка в слое 1 закреплена, поток намагниченности \mathbf{J}_1 в этом слое вызывается только переносом спинов подвижных электронов за счет протекания электрического тока \mathbf{j} . Поток намагниченности при этом дается формулой, структура которой аналогична (13) с тем только отличием, что должно отсутствовать второе слагаемое, содержащее производную по координате. В самом деле, вектор намагниченности подвижных электронов закреплён в слое 1 и не может меняться в пространстве. Таким образом, поток \mathbf{J}_1 получается в виде

$$\mathbf{J}_1 = \frac{\mu_B}{e} Q_1 j \hat{\mathbf{M}}_1, \quad (16)$$

где $\hat{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{M}_1/|\mathbf{M}_1|$, параметр Q_1 определяется аналогично параметру Q в (13), но с парциальными проводимостями и коэффициентами диффузии, взятыми для слоя 1. Поток (16) имеет продольную и поперечную компоненты относительно вектора $\hat{\mathbf{M}}$, которые равны соответственно

$$\mathbf{J}_{1\parallel} = \frac{\mu_B}{e} Q_1 j (\hat{\mathbf{M}}_1 \cdot \hat{\mathbf{M}}) \hat{\mathbf{M}}, \quad (17)$$

$$\mathbf{J}_{1\perp} = \frac{\mu_B}{e} Q_1 j [\hat{\mathbf{M}} \times [\hat{\mathbf{M}}_1 \times \hat{\mathbf{M}}]]. \quad (18)$$

Поскольку в пределах подслоя $0 \leq x < \lambda_F$ продольная релаксация спина отсутствует, продольная составляющая потока (16) должна совпадать с потоком (13), взятым вблизи границы $x = 0$. Напишем явно это равенство потоков, умножим его скалярно на $\hat{\mathbf{M}}$ и учтем, что $\hat{\mathbf{M}}_1 = -\hat{\mathbf{y}} \sin \chi + \hat{\mathbf{z}} \cos \chi$, где $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ — орты координатных осей. Тогда получим, что при $x = 0$ должно выполняться соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\mu_B}{e} Q_1 j (-\hat{M}_y \sin \chi + \hat{M}_z \cos \chi) = \\ = \frac{\mu_B}{e} Q j - \tilde{D} \frac{\partial m}{\partial x}, \end{aligned} \quad (19)$$

которое и представляет собой первое из отыскиваемых граничных условий.

Второе условие получается, если учесть, что поперечная составляющая намагниченности подвижных электронов исчезает в подслое $0 \leq x < \lambda_F$ (см. выражение (2) и последующее обсуждение). Таким образом, требование непрерывности суммарного потока (подвижных электронов и решетки) означает, что поток (18) должен продолжаться в слое 2 как поток намагниченности решетки. Выражение для последнего потока выведено в Приложении I (см. формулу (I.4)). Приравнявая его к (18), при $x = 0$ получаем

$$\frac{\mu_B}{e} Q_1 j [\hat{\mathbf{M}} \times [\hat{\mathbf{M}}_1 \times \hat{\mathbf{M}}]] = aM \left[\hat{\mathbf{M}} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{M}}}{\partial x} \right], \quad (20)$$

где, согласно Приложению I, $a = \gamma M A$. Условие (19) в несколько иной форме ранее уже обсуждалось и применялось (например, в [9]). Что же касается условия (20), то оно, видимо, является новым. В выбранной системе координат (см. рис. 1) условие (20) дает следующие два независимых соотношения, справедливых при $x = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{M}_x}{\partial x} + k \hat{M}_y \cos \chi + k \hat{M}_z \sin \chi = 0, \\ \frac{\partial \hat{M}_y}{\partial x} - k \hat{M}_x \cos \chi = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

в которых $k = \mu_B Q_1 j / eaM$, а компонента \hat{M}_z находится из равенства $|\hat{\mathbf{M}}| = 1$.

Рассмотрим теперь границу раздела слоев 2 и 3 при $x = L$. Слой 3 немагнитный, так что $Q_3 = 0$. Поэтому требование непрерывности продольного потока дает

$$\frac{\mu_B}{e} Q j - \tilde{D} \frac{\partial m}{\partial x} = -\tilde{D}_3 \frac{\partial m_3}{\partial x} \quad (22)$$

при $x = L$. Поскольку в слое 3 намагниченность решетки отсутствует, поток намагниченности решетки на этой границе должен прекращаться, т. е. $aM[\hat{\mathbf{M}} \times (\partial \hat{\mathbf{M}}/\partial x)] = 0$, или для компонент векторов

$$\frac{\partial \hat{M}_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{M}_y}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

при $x = L$.

Следующая важная группа условий связана с обменом подвижными электронами, осуществляемым через границы раздела слоев. Такой обмен должен обеспечивать непрерывность разностей химических потенциалов спиновых подзон с двух сторон от границы. Пренебрежем температурной размазкой распределения Ферми для электронов в каждой из подзон. Тогда прямое вычисление приводит к следующему выражению для указанной разности химических потенциалов:

$$\begin{aligned} \zeta_{\uparrow} - \zeta_{\downarrow} &= \\ &= (2\mu_B)^{-1} \left(\frac{1}{g_{\uparrow}(\bar{\zeta})} + \frac{1}{g_{\downarrow}(\bar{\zeta})} \right) \Delta m \equiv N \Delta m, \end{aligned} \quad (24)$$

где $g_{\uparrow, \downarrow}$ — зависящие от энергии плотности состояний электронов в подзонах и $\bar{\zeta}$ — равновесное значение химического потенциала. Соответствующее условие непрерывности разности (24) на границе раздела слоев 2 и 3 будет иметь вид

$$\Delta m N = \Delta m_3 N_3. \quad (25)$$

На границе раздела слоев 1 и 2 разность химических потенциалов испытывает разрыв. Это связано с принятой нами идеализацией слоя 1. Напомним, что мы считали все спины строго закрепленными в этом слое.

Найдем решение уравнения (15), удовлетворяющее граничным условиям (19), (22) и (25). Тогда получим следующее распределение инжектированной намагниченности $\Delta m(x)$ в слое 2:

$$\begin{aligned} \Delta m(x) &= \left(\frac{j}{j_D} \right) \frac{\mu_B n}{\text{sh } \lambda + \nu \text{ch } \lambda} \times \\ &\times \left\{ Q \text{ch } \xi + \left[Q_1 \left(-\hat{M}_y \sin \chi + \hat{M}_z \cos \chi \right) - Q \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times [\text{ch}(\lambda - \xi) + \nu \text{sh}(\lambda - \xi)] \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

где введены безразмерные длины $\lambda = L/l$ и $\xi = x/l$, а параметр

$$\nu = \frac{nN}{n_3 N_3} \frac{j_D z}{j_D} \quad (27)$$

характеризует влияние слоя 3.

5. СТАТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ И ФЛУКТУАЦИИ

Поле \mathbf{H} считаем приложенным в положительном направлении оси \mathbf{z} ; поле анизотропии также параллельно этой оси. Тогда очевидно, что в отсутствие тока, когда связь слоев в нашей модели отсутствует, намагниченность в слое 2 направлена по оси \mathbf{z} .

При включении тока спины перетекают через границы раздела $x = 0, L$, что создает связь между слоями 1, 2, 3 и может изменить направление намагниченности в слое 2. Чтобы описать этот процесс, вычислим энергию U_{s-d} , подставив в (6) выражение (26). Тогда получим

$$\begin{aligned} U_{s-d} &= -\alpha \bar{m} M L - \alpha \left(\hat{\mathbf{M}}_1 \cdot \mathbf{M}(+0) \right) l \times \\ &\times \mu_B n Q_1 \left(\frac{j}{j_D} \right) \left(1 - \frac{\nu}{\text{sh } \lambda + \nu \text{ch } \lambda} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

где в первом слагаемом, пропорциональном M , мы пренебрегли поправками, порядка отношения j/j_D , которое мало (см. (14)). Для вычисления вариационной производной (5) нужно представить (28) как функционал вектора $\mathbf{M}(x)$. Тогда, в частности, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \mathbf{M}(x)} (M L) &= \frac{\delta}{\delta \mathbf{M}(x)} \int_0^L M dx' = \\ &= \int_0^L \hat{\mathbf{M}}(x') \delta(x' - x) dx' = \hat{\mathbf{M}}(x), \\ \frac{\delta}{\delta \mathbf{M}(x)} \left(\hat{\mathbf{M}}_1 \cdot \mathbf{M}(+0) \right) &= \mathbf{M}_1 \delta(x - \varepsilon) \end{aligned} \quad (29)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Пользуясь соотношениями (28) и (29), вычисляем $s-d$ -обменное поле по формуле (5) и получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{s-d}(x) &= \alpha \bar{m} \hat{\mathbf{M}}(x) + \alpha \hat{\mathbf{M}}_1 \mu_B n Q_1 \left(\frac{j}{j_D} \right) \times \\ &\times \left(1 - \frac{\nu}{\text{sh } \lambda + \nu \text{ch } \lambda} \right) l \delta(x - \varepsilon). \end{aligned} \quad (30)$$

Первое слагаемое в формуле (30) направлено по \mathbf{M} и поэтому выпадает из уравнения движения (3). Второе слагаемое в (30) направлено по \mathbf{M}_1 . Если угол χ произволен, то это слагаемое, а также в целом поле \mathbf{H}_{s-d} и эффективное поле \mathbf{H}_{eff} (4), могут не совпадать по направлению с осью \mathbf{z} . Отсюда ясно, что намагниченность $\bar{\mathbf{M}}$ в статическом состоянии, находящаяся из уравнения $\bar{\mathbf{M}} \times \mathbf{H}_{eff} = 0$, также может отклоняться от оси \mathbf{z} . Кроме того, в силу граничных условий (21) намагниченность $\bar{\mathbf{M}}$ получается

неоднородной внутри слоя 2. Сверх того, большое затруднение состоит в том, что уравнение ЛЛГ для определения $\overline{\mathbf{M}}$ нелинейно.

К счастью, однако, существуют два определенных угла, а именно, $\chi = 0, \pi$, при которых вектор $\overline{\mathbf{M}}$ легко найти. Действительно, при указанных углах условия (21) и (23) удовлетворяются для не зависящего от координаты x вектора $\overline{\mathbf{M}}$, который имеет компоненты $\overline{M}_x = 0$ и $\overline{M}_y = 0$. Кроме того, поскольку вектор \mathbf{M}_1 параллелен \mathbf{z} , удовлетворяются также и уравнения движения (3), взятые в статическом пределе. Таким образом, при $\chi = 0, \pi$ получаем

$$\overline{M}_x = \overline{M}_y = 0 \quad \text{и} \quad \overline{M}_z = M > 0. \quad (31)$$

Далее ограничимся рассмотрением только указанных углов и, таким образом, будем исследовать устойчивость статического состояния (31). В частности, при $\chi = \pi$ будем иметь $\mathbf{M}_1 = M_1\mathbf{z}$, причем $M_1 = \cos \pi |\mathbf{M}_1| = -|\mathbf{M}_1| < 0$.

Для последующих вычислений будет удобно заменить δ -функцию в (30) конечным выражением

$$\delta(x - \varepsilon) \rightarrow \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{x}{r}\right), \quad (32)$$

имея в виду последующий предельный переход $r \rightarrow +0$. При таком предельном переходе функция в правой части (32) отлична от нуля только в одной точке $x = 0$ и, кроме того, интеграл от этой функции по x в интервале $0 \leq x < \infty$ равен 1. Введем флуктуации $\Delta\mathbf{M}$ равенством

$$\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}} + \Delta\mathbf{M}. \quad (33)$$

После линеаризации уравнений ЛЛГ (3) по $\Delta\mathbf{M}$, подстановки в эти уравнения обменного поля в виде (30) и поля размагничивания в виде $\mathbf{H}_d = -4\pi\Delta\mathbf{M}_x \cdot \hat{\mathbf{x}}$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta M_x}{\partial t} + \kappa \frac{\partial\Delta M_y}{\partial t} &= a \frac{\partial^2\Delta M_y}{\partial x^2} - \\ &- \left(\Omega_y - \gamma B \frac{l}{r} \exp\left(-\frac{x}{r}\right) \right) \Delta M_y, \\ \frac{\partial\Delta M_y}{\partial t} - \kappa \frac{\partial\Delta M_x}{\partial t} &= -a \frac{\partial^2\Delta M_x}{\partial x^2} + \\ &+ \left(\Omega_x - \gamma B \frac{l}{r} \exp\left(-\frac{x}{r}\right) \right) \Delta M_x, \end{aligned} \quad (34)$$

где обозначено

$$\Omega_x = \gamma(H + \beta M + 4\pi M), \quad \Omega_y = \gamma(H + \beta M), \quad (35)$$

$$B = \alpha \frac{\mu_B j l}{e \tilde{D}} Q_1 \left(1 - \frac{\nu}{\text{sh } \lambda + \nu \text{ ch } \lambda} \right). \quad (36)$$

Коэффициенты уравнений (34) содержат независимую переменную x . Удобно сделать замену этой переменной

$$y = b \exp\left(-\frac{x}{2r}\right), \quad b = 2\sqrt{\frac{\gamma B l r}{a}}. \quad (37)$$

Для фурье-компонент по времени, $\Delta M_x, \Delta M_y \propto \exp(-i\omega t)$, получаем

$$\begin{aligned} y^2 \frac{\partial^2\Delta M_x}{\partial y^2} + y \frac{\partial\Delta M_x}{\partial y} + \\ + \left(y^2 - \frac{4r^2\Omega_x}{a} + \frac{4r^2}{a} i\kappa\omega \right) \Delta M_x &= \frac{4r^2}{a} i\omega \Delta M_y, \\ y^2 \frac{\partial^2\Delta M_y}{\partial y^2} + y \frac{\partial\Delta M_y}{\partial y} + \\ + \left(y^2 - \frac{4r^2\Omega_y}{a} + \frac{4r^2}{a} i\kappa\omega \right) \Delta M_y &= -\frac{4r^2}{a} i\omega \Delta M_x. \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнения (38) близки по структуре к уравнениям для функций Бесселя, однако компоненты ΔM_x и ΔM_y связаны между собой в каждом из уравнений. Чтобы их «развязать», рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \left[s^2 - \frac{4r^2}{a} (\Omega_x - i\kappa\omega) \right] \Delta M_x - \frac{4r^2}{a} i\omega \Delta M_y &= 0, \\ \left[s^2 - \frac{4r^2}{a} (\Omega_y - i\kappa\omega) \right] \Delta M_y + \frac{4r^2}{a} i\omega \Delta M_x &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Условие разрешимости системы (39) дает для параметра s^2 следующее выражение:

$$s^2 = \frac{2r^2}{a} \left[\Omega_x + \Omega_y - 2i\kappa\omega \pm \sqrt{(\Omega_x - \Omega_y)^2 + 4\omega^2} \right], \quad (40)$$

из которого следует, что имеются два различных значения s^2 . Каждое из этих значений соответствует определенному типу флуктуаций и поэтому должно учитываться далее при исследовании устойчивости. Возьмем какое-либо одно из решений (40). Подставим его в (39) и воспользуемся этими уравнениями, чтобы исключить компоненту ΔM_y из первого уравнения (38) и компоненту ΔM_x из второго уравнения (38). В результате каждое из уравнений (38) преобразуется в стандартное уравнение для функций Бесселя с индексом « s ». Таким образом, общее решение уравнений (38) можно записать в виде

$$\Delta M_{x,y}(y) = A_{x,y} J_s(y) + B_{x,y} Y_s(y), \quad (41)$$

где J_s и Y_s — функции Бесселя первого и второго рода [22] и $A_{x,y}, B_{x,y}$ — постоянные, которые должны быть определены из граничных условий (21) и (23),

взятых при угле $\chi = \pi$. Условие разрешимости уравнений для определения четырех постоянных $A_{x,y}$ и $B_{x,y}$ выписано в Приложении II, где выполнен также переход к пределу $r \rightarrow +0$, предусмотренный заменой (32). В результате получается следующее дисперсионное соотношение для флуктуаций:

$$qL \operatorname{tg} qL = \Phi, \quad (42)$$

в котором

$$\Phi = -\frac{\gamma BL^2}{a\lambda} \pm ikL, \quad (43)$$

а параметр $q \equiv is/2r$ определяется выражением (40) и в дальнейшем играет роль волнового числа.

Выражение (42) по форме совпадает с известным дисперсионным соотношением для собственных стоячих спиновых волн в слое 2 [20, 23], причем правая часть Φ имеет смысл эффективного параметра закрепления спинов решетки на торцевых поверхностях слоя (в нашем случае — на плоскости $x = 0$). Подчеркнем, что в данной модели в отсутствие тока спины на границах не закреплены, что видно непосредственно из граничных условий (21) и (23). Однако эффективное закрепление возникает вследствие влияния тока j . При этом согласно формуле (43) вещественная часть Φ описывает закрепление вследствие действия обменного эффективного поля, а мнимая часть Φ описывает эффективное закрепление вследствие действия крутильного момента. В этой связи интересно отметить, что опыты по спин-волновому резонансному поглощению в магнитных переходах могли бы дать важную информацию о характере поверхностного закрепления спинов.

Дисперсионное соотношение (42) служит далее для вычисления комплексной собственной частоты ω исследуемых флуктуаций и выяснения условий неустойчивости, т. е. условий, при которых начинается выполняться условие $\operatorname{Im} \omega \geq 0$.

6. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ФЛУКТУАЦИЙ

При анализе решений уравнения (42) простейшая ситуация соответствует отсутствию тока. В силу определений параметров B и k в формулах (36) и (21) получаем из (43), что при токе $j = 0$ правая часть $\Phi = 0$. Тогда речь идет о спин-волновом резонансе в условиях незакрепленных спинов на торцах. Уравнение (42) тогда имеет решения

$$qL = n\pi \quad \text{и} \quad \omega = \sqrt{\left(\Omega_x + a \frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) \left(\Omega_y + a \frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) - \frac{i\kappa}{2} \left(\Omega_x + \Omega_y + 2a \frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right)}, \quad (44)$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. При получении равенств (44) были использованы определение $q = is/2r$ и выражение (40). Поскольку в (44) $\operatorname{Im} \omega < 0$, флуктуации без тока устойчивы вследствие диссипации.

Пусть теперь ток включен, причем $j/e > 0$. Согласно формуле (43),

$$\operatorname{Im} \Phi / \operatorname{Re} \Phi = \kappa \eta \ll 1, \quad (45)$$

где

$$\eta \equiv \left[\alpha \gamma M \tau \kappa \left(1 - \frac{\nu}{\operatorname{sh} \lambda + \nu \operatorname{ch} \lambda} \right) \right]^{-1}. \quad (46)$$

Параметр (46) может быть меньше, порядка или больше единицы. Из дальнейшего будет видно, что именно этот параметр описывает соотношение между вкладами крутильного момента и спиновой инжекции в порог и инкремент возникающей из-за тока неустойчивости. Поскольку диссипация слабая, т. е. $\kappa \ll 1$, усиленное неравенство в (45), как правило, выполняется.

Оценим, учитывая (45), правую часть уравнения (42). Имеем

$$|\Phi| \approx \operatorname{Re} \Phi = \lambda \left(1 - \frac{\nu}{\operatorname{sh} \lambda + \nu \operatorname{ch} \lambda} \right) \theta^{-1}(j), \quad (47)$$

причем величина $\theta(j) \equiv eAM/\alpha\mu_B j \tau Q_1 l$ определяется, в частности, током. Возьмем для примера типичные параметры: $\alpha \sim 2 \cdot 10^4$, $Q_1 \sim 0.3$, $\tau \sim 3 \cdot 10^{-13}$ с, $l \sim 17$ нм, $A \sim 10^{-12}$ см², $M \sim 10^3$ Гс. Тогда при токе $j \sim 3.3 \cdot 10^7$ А/см², который соответствует порогу неустойчивости (см., например, [1–3]), получаем $\theta(j) \approx 0.17$. Рисунок 2 позволяет определить те значения $\lambda = \lambda'$, для которых $|\Phi| = 1$ при указанных различных параметрах ν . Как видно, $0.4 < \lambda' < 0.7$, что соответствует $7 \text{ нм} \leq L \leq 12 \text{ нм}$. Насколько нам известно, экспериментально пока исследовались лишь толщины L в интервале от 2 нм до 10 нм [1]. Согласно приведенным оценкам, при таких толщинах должно выполняться условие $|\Phi| \ll 1$ или $|\Phi| \leq 1$. Однако при несколько больших толщинах $L \approx 20\text{--}80$ нм (или $\lambda \approx 1\text{--}5$) может выполняться и условие $|\Phi| \gg 1$. Поэтому мы рассмотрим как большие, так и малые $|\Phi|$, а точнее предельные случаи: $|\Phi| \ll 1$ и $|\Phi| \gg 1$.

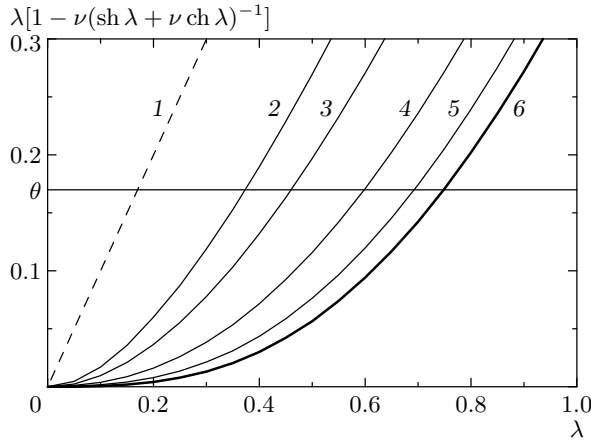


Рис. 2. Диаграмма для определения параметров перехода, соответствующих различным значениям эффективного параметра закрепления спинов решетки $|\Phi|$: на уровне $\theta(j)$ величина $|\Phi| = 1$, ниже этого уровня $|\Phi| < 1$, выше этого уровня $|\Phi| > 1$. Значения параметра ν на кривых: 1 – 0, 2 – 0.5, 3 – 1.0, 4 – 3.0, 5 – 10, 6 – ∞

6.1. Рассмотрим неустойчивость при $|\Phi| \ll 1$, когда решения (42) близки к модам спин-волнового резонанса (44). Рассмотрим вначале решение, близкое к однородному резонансу с номером $n = 0$. Сохраним в левой части (42) лишь основное слагаемое, равное $q^2 L^2 \ll 1$, и воспользуемся определением $q = is/2r$, а также формулами (40), (43). Тогда получим для определения частоты ω следующее квадратное уравнение:

$$\omega^2 = \left[\Omega_x - \frac{\gamma B}{\lambda} - i \left(\kappa \omega \pm \frac{ak}{L} \right) \right] \times \left[\Omega_y - \frac{\gamma B}{\lambda} - i \left(\kappa \omega \pm \frac{ak}{L} \right) \right]. \quad (48)$$

Корни данного уравнения комплексны. Далее потребуются выражения отдельно для действительных и мнимых частей этих корней. Прямые вычисления дают следующие значения:

$$(1 + \kappa^2) \operatorname{Re} \omega = \pm \frac{\kappa ak}{L} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{W + \sqrt{W^2 + V^2}}, \quad (49)$$

$$(1 + \kappa^2) \operatorname{Im} \omega = -\frac{\kappa}{2} \left(\Omega_x + \Omega_y - \frac{2\gamma B}{\lambda} \right) \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-W + \sqrt{W^2 + V^2}}, \quad (50)$$

где в (49) можно брать любые сочетания знаков слагаемых, причем

$$W = \left(\Omega_x - \frac{\gamma B}{\lambda} \right) \left(\Omega_y - \frac{\gamma B}{\lambda} \right) - \frac{(ak)^2}{L^2} - \frac{\kappa^2}{4} (\Omega_x - \Omega_y)^2, \quad (51)$$

$$V = \frac{ak}{L} \left(\Omega_x + \Omega_y - \frac{2\gamma B}{\lambda} \right).$$

Сохраним в (50) лишь верхний знак, который допускает неустойчивость. Тогда условие неустойчивости получается в виде

$$\kappa^2 \left(\Omega_x - \frac{\gamma B}{\lambda} \right) \left(\Omega_y - \frac{\gamma B}{\lambda} \right) - \left(\frac{ak}{L} \right)^2 \leq 0. \quad (52)$$

Из условия (52) ясно видны две причины возникновения неустойчивости. Одна из них вызвана вкладом в эффективное поле (30) продольных спинов, инжектируемых током. Этот вклад описывается слагаемыми, которые пропорциональны параметру B (см. (36)). Другая причина неустойчивости вызвана вкладом крутильного момента на границе $x = 0$. Такой вклад появляется из-за граничных условий (21) и описывается слагаемым порядка k^2 .

Согласно неравенству (52), диссипация влияет на указанные два вклада принципиально различным образом. Для возникновения инжекционной неустойчивости диссипация незначительна, поскольку достаточно иметь $\gamma B/\lambda > \Omega_y$. Если же остается только крутильный момент ($B \rightarrow 0$), то требуется преодоление определенного порога, вызванного диссипацией. Вместе с тем совместное действие обоих механизмов всегда уменьшает левую часть (52) и поэтому облегчает наступление неустойчивости.

Поскольку $B, k \sim j$, приравняв левую часть (52) нулю, получим квадратное уравнение для определения пороговой плотности тока j_{th} . Решение этого уравнения дает

$$\frac{j_{th}}{j_{\perp}} = \eta \frac{(f + f^{-1}) - \sqrt{(f - f^{-1})^2 + 4\eta^2}}{2(1 - \eta^2)}, \quad (53)$$

где

$$j_{\perp} = \frac{\kappa e M \omega_0 L}{\mu_B Q_1}, \quad (54)$$

$\omega_0 = \sqrt{\Omega_x \Omega_y}$ обозначает частоту спин-волнового резонанса при номере $n = 0$ (ср. с (44)), $f = \sqrt{\Omega_y/\Omega_x}$. Величина j_{\perp} (54) есть не что иное как пороговая плотность тока при действии одного лишь крутильного момента, т. е. при $B = 0$. Из общей формулы для порога (53) следует, что $j_{th} \rightarrow j_{\perp}$, если $\eta \gg 1$. Если же $\eta \ll 1$, то доминирует спин-инжекционный механизм неустойчивости. При этом порог получается равным выражению

$$j_{th} \rightarrow j_{\perp} f \eta = j_D \frac{(H + H_a)\lambda (\operatorname{sh} \lambda + \nu \operatorname{ch} \lambda)}{\alpha \mu_B n Q_1 [\operatorname{sh} \lambda + \nu (\operatorname{ch} \lambda - 1)]}, \quad (55)$$

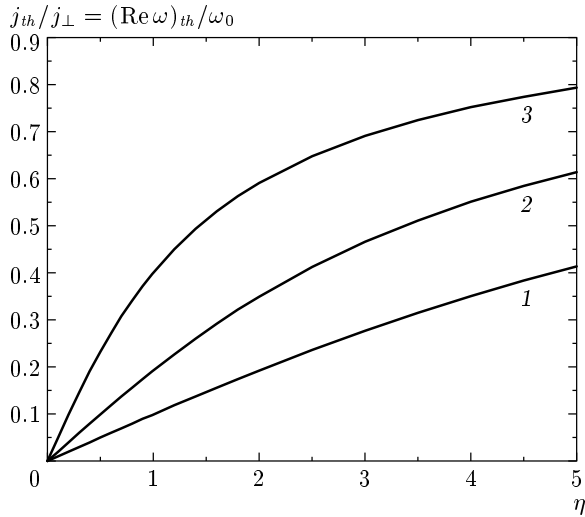


Рис. 3. Зависимость порогового тока и собственной частоты спиновой волны на пороге от параметра η , характеризующего относительный вклад крутильного момента и спиновой инжекции. Кривые различаются значениями параметра $f = \sqrt{\Omega_y/\Omega_x}$: 1 – 0.1, 2 – 0.2, 3 – 0.5

которое совпадает с полученным ранее в работе [9] другим методом, а именно, из требования минимальности магнитной энергии (напомним, что ток j_D определен в (14), а $H_a = \beta M$). Как и в работе [9], формула (55) относится к однородным флуктуациям, поскольку взята мода спин-волнового резонанса с $qL \ll 1$.

Отметим важное соотношение между пороговыми токами и частотами спин-волнового резонанса. Из общих выражений (49) и (50) следует, что

$$\frac{(\text{Re}\omega)_{th}}{\omega_0} = \frac{j_{th}}{j_{\perp}}. \quad (56)$$

При $\eta \rightarrow 0$ отношение (56) стремится к 0, а при $\eta \rightarrow \infty$ стремится к 1. Так получается потому, что крутильный момент влияет только на затухание спин-волнового резонанса, меняя его знак на пороге неустойчивости. При этом частота резонанса не меняется. В противоположность этому инжекция влияет и на действительную часть частоты, обращая ее в нуль на пороге. Происходит «смягчение» собственной частоты, что аналогично поведению при ориентационном фазовом переходе во внешнем магнитном поле. Это открывает интересную возможность экспериментальной идентификации инжекционного механизма путем измерения резонансной частоты при плотности тока, близкой к пороговому значению.

На рис. 3 показана зависимость отношения (56)

от параметра η при различных значениях f . Интересно отметить, что пороги неустойчивости всегда ниже порога (54). Оценим величину порога (54), взяв приведенный после формулы (47) набор типичных параметров и добавив к нему параметр диссипации $\kappa = 3 \cdot 10^{-2}$, частоту $\omega_0 = 2.3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ и $\lambda = 0.4$. Тогда получим $j_{\perp} \approx 2.7 \cdot 10^7 \text{ А/см}^2$. Аналогичная оценка получается и по формуле (55) в пределах применимости этой приближенной формулы. Таким образом, оценки пороговых плотностей тока, в общем, согласуются с экспериментальными данными.

6.2. Рассмотрим неустойчивость неоднородных мод спин-волнового резонанса с номерами $n \neq 0$ при $|\Phi| \ll 1$. Решения уравнения (42) близки к нулям $\text{tg } qL$, т. е.

$$q \approx \frac{n\pi}{L} - \frac{\Phi}{n\pi L}. \quad (57)$$

Воспользовавшись опять выражением (40) и определениями $q = is/2r$ и (43), получаем для определения частоты ω квадратное уравнение. Выделяем действительную и мнимую части корней этого уравнения вполне аналогично тому, как это делалось ранее для уравнения (48). Тогда условие неустойчивости $\text{Im}\omega > 0$ принимает вид

$$\kappa^2 \left[\Omega_x + a \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - \frac{2\gamma B}{\lambda} \right] \times \left[\Omega_y + a \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - \frac{2\gamma B}{\lambda} \right] - \left(\frac{2ak}{L} \right)^2 < 0. \quad (58)$$

Условие (58) имеет такую же структуру, как и условие (52). Поэтому полностью сохраняют силу выводы относительно вкладов эффективного поля и крутильного момента.

Пороговая плотность тока j_{th}^n для номера $n \neq 0$ вычисляется аналогично вычислениям в предыдущем разделе. В результате получаем

$$j_{th}^n = \frac{1}{2} j_{\perp} \frac{\eta}{2(1-\eta^2)} \left[2n^2 g + f + f^{-1} - \sqrt{(f^{-1}-f)^2 + 4(1+n^2 g f)(1+n^2 g f^{-1})\eta^2} \right], \quad (59)$$

где появляется новый параметр $g = \pi^2 a / \omega_0 L^2$. Из формулы (59) видно, что порог неустойчивости резко возрастает с увеличением номера n .

6.3. Перейдем теперь к рассмотрению неустойчивости при $|\Phi| \gg 1$. В этом случае дисперсионное соотношение (42) сильно модифицируется током. Поскольку выполняется усиленное неравенство (45), как можно убедиться прямой подстановкой, имеется одно решение с преобладающей мнимой частью q . Для такого решения

$$q^2 \approx -(\Phi/L)^2. \quad (60)$$

Пользуясь определениями $q = is/2r$ и (43), преобразуем (42) в следующее квадратное уравнение для частоты ω :

$$\omega^2 = \left[\Omega_x - \frac{(\gamma Bl)^2}{a} + ak^2 - i(\kappa\omega \pm 2\gamma Blk) \right] \times \\ \times \left[\Omega_y - \frac{(\gamma Bl)^2}{a} + ak^2 - i(\kappa\omega \pm 2\gamma Blk) \right]. \quad (61)$$

Уравнение (61) качественно отличается от (48) в двух отношениях. Во-первых, токовые поправки к частотам $\Omega_{x,y}$ квадратичны, а не линейны по току. Во-вторых, оба механизма — инжекционное поле (пропорциональное B) и крутильный момент (пропорциональный $\sim k^2$) — одновременно дают вклад как в вещественную, так и в мнимую части множителей в правой части (61).

Условие неустойчивости $\text{Im}\omega > 0$ получается из (61) в виде

$$\kappa^2 \left[\Omega_x - \frac{(\gamma Bl)^2}{a} + ak^2 \right] \times \\ \times \left[\Omega_y - \frac{(\gamma Bl)^2}{a} + ak^2 \right] - (2\gamma Blk)^2 < 0. \quad (62)$$

В отличие от условия (52), теперь получается, что возникновение неустойчивости становится невозможным, если отсутствует инжекционное эффективное поле, т.е. если $B = 0$. Если же отсутствует крутильный момент, т.е. $k^2 = 0$, то неустойчивость, тем не менее, имеет место при $(\gamma Bl)^2/a > \Omega_y$.

Поскольку $B \sim j$ и $k \sim j$, приравняв левую часть (62) нулю, получаем биквадратное уравнение для определения пороговой плотности тока. Решение этого уравнения дает

$$j_{th} = \frac{e}{\mu_B \alpha \gamma \tau Q_1} \sqrt{\frac{a}{2(1-4\eta^2)}} \times \\ \times \sqrt{\Omega_x + \Omega_y - \sqrt{(\Omega_x - \Omega_y)^2 + 16\eta^2 \Omega_x \Omega_y}}. \quad (63)$$

Формула (63) справедлива при выполнении условия $|\Phi| \gg 1$. На рис. 2 этому условию соответствует область, лежащая значительно выше уровня θ . В этой области все кривые линейно возрастают с λ . Согласно (46), при этом параметр η практически не зависит от λ , т.е. от толщины слоя L . Отсюда ясно, что и порог (63) также не зависит от L . Такое свойство резко контрастирует с линейным возрастанием порога при $|\Phi| \ll 1$ в формулах (54) и (55). Отличие обусловлено тем, что в данном случае наиболее

неустойчивы неоднородные флуктуации, для которых, согласно (60), $|qL| \gg 1$. Еще более интересный результат дает численная оценка порога (63). Подставляя стандартный набор параметров, получаем, что для реализации условия $|\Phi| \gg 1$ нужны толщины $L \geq 20$ нм. Тогда при частотах $\Omega_x \approx 2.3 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ и $\Omega_y \approx 1.8 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ пороговая плотность тока равна $j_{th} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ А/см}^2$, т.е. она оказывается на порядок меньше, чем дают оценки по формулам (54) и (55).

7. ВЛИЯНИЕ ТОКА НА СПЕКТР СПИНОВЫХ ВОЛН

Ток через переход влияет не только на $\text{Im}\omega$, т.е. на декремент спиновых волн, но и на $\text{Re}\omega$, т.е. на их спектр. Обсудим подробнее это влияние на примере двух эффектов: 1) «смягчения» собственных частот спиновых мод слоя вблизи порога неустойчивости и 2) стимулирования током новых спиновых мод.

7.1. Эффект «смягчения» мы рассмотрим здесь для моды номера $n = 0$ и в пренебрежении диссипацией, т.е. параметром $\kappa \ll 1$. Возьмем для определенности $|\Phi| \ll 1$. Непосредственно из (48) получаем

$$\frac{\text{Re}\omega}{\omega_0} = \sqrt{\left(1 - \frac{f}{\eta} \frac{j}{j_{\perp}}\right) \left(1 - \frac{1}{f\eta} \frac{j}{j_{\perp}}\right)}. \quad (64)$$

Подставим в (64) равенство $j/j_{\perp} = (j/j_{th})(j_{th}/j_{\perp})$ и воспользуемся решением (53). Тогда получим окончательно

$$\frac{\text{Re}\omega}{\omega_0} = \\ = \left\{ \left[1 - \frac{f \left[f^{-1} + f - \sqrt{(f^{-1} - f)^2 + 4\eta^2} \right]}{2(1-\eta^2)} \frac{j}{j_{th}} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{f^{-1} + f - \sqrt{(f^{-1} - f)^2 + 4\eta^2}}{2f(1-\eta^2)} \frac{j}{j_{th}} \right] \right\}^{1/2}. \quad (65)$$

На рис. 4 представлена серия кривых, построенных по формуле (65), причем для каждой из них порог j_{th} берется при соответствующем значении параметра η . Видно, что $\text{Re}\omega$ убывает по мере приближения к порогу неустойчивости. Убывание становится все более резким при уменьшении η , т.е. при переходе к условиям, когда основную роль играет инжекционное эффективное поле.

В случае $|\Phi| \gg 1$ получаются кривые, аналогичные (65), но с несколько более крутым спадом частоты при приближении к порогу.

7.2. Эффект стимулирования током новых спиновых мод проявляется при выполнении условия

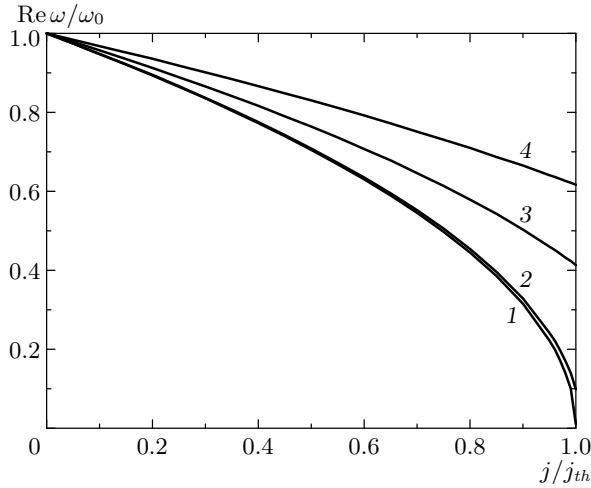


Рис. 4. Зависимость собственной частоты спиновой волны от тока. Происходит «смягчение» частоты при приближении тока к пороговому значению. Расчет сделан для моды с номером $n = 0$ при $|\Phi| \ll 1$ и $f = 0.1$. Кривые различаются значениями параметра η : 1 — 0.1, 2 — 1.0, 3 — 5, 4 — 10,

$|\Phi| \gg 1$. В этом пределе дополнительно к решению, рассмотренному в п. 6.3, появляется еще серия других решений дисперсионного уравнения (42), для которых вещественная часть q гораздо больше мнимой части. Поскольку всегда выполняется условие (45), уравнение (42) приобретает вид

$$qL \operatorname{tg} qL \approx \operatorname{Re} \Phi \gg 1, \tag{66}$$

а его решения близки к

$$q \approx \frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2} \right). \tag{67}$$

Решения вида (67) с полуцелым «номером» в скобках, согласно теории спин-волнового резонанса [20, 23], соответствуют собственным колебаниям слоя с сильно закрепленной намагниченностью на поверхности. В данном случае сильное закрепление намагниченности вызвано большим значением $\operatorname{Re} \Phi$, т. е. влиянием сильного инжекционного эффективного поля. Дело выглядит так, что инжектируемые током спины за счет s - d -обмена создают у поверхности $x = 0$ однонаправленную магнитную анизотропию, которая и закрепляет намагниченность.

8. ВЫВОДЫ

Впервые теоретически описано совместное влияние двух вызываемых током эффектов, а именно,

1) инжекции неравновесных спинов и 2) поверхностного крутильного момента, на состояние ферромагнитных слоев в металлических переходах типа спинового вентиля.

При плотностях тока, превышающих определенный порог (обычно 10^6 – $3 \cdot 10^7$ А/см²), возникает неустойчивость спин-волновых флуктуаций в переходе. Совместное влияние указанных эффектов способствует понижению порога неустойчивости.

Поверхностный крутильный момент определяет порог неустойчивости при достаточно малых толщинах свободного ферромагнитного слоя перехода (обычно $L \sim 2$ – 7 нм) и при малых параметрах диссипации ЛЛГ ($\kappa < 10^{-2}$). При этом порог неустойчивости линейно возрастает с ростом L и соответствует практически однородному возбуждению ферромагнитного слоя.

Инжекция неравновесных спинов определяет порог неустойчивости при достаточно больших толщинах и параметрах диссипации свободного ферромагнитного слоя, например при $L > 20$ нм и $\kappa \sim 3 \cdot 10^{-2}$. С ростом толщины порог неустойчивости соответствует существенно неоднородному возбуждению слоя. Плотность тока на пороге оказывается сравнительно малой, порядка 10^6 А/см².

Инжекция неравновесных спинов током приводит к неустойчивости вследствие ориентационного фазового перехода в создаваемом этими спинами обменном эффективном поле. Поэтому инжекция влияет не только на декремент флуктуаций, но и на их спектр. Происходит уменьшение до нуля («смягчение») собственных частот спиновых флуктуаций по мере возрастания тока и приближения его к пороговому значению.

В противоположность этому поверхностный крутильный момент влияет только на декремент, но не на спектр спиновых флуктуаций. Это обстоятельство может служить для экспериментальной идентификации того или иного механизма неустойчивости.

При сильной инжекции спинов током в ферромагнитный металлический слой происходит эффективное закрепление намагниченности решетки этого слоя вблизи инжектирующей поверхности. Такое закрепление, согласно расчетам, должно приводить к появлению новых линий спин-волнового резонанса по мере возрастания тока.

Авторы благодарны А. И. Крикунову, А. В. Медведю и В. А. Сабликову за интересные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 03-02-17540, 04-02-08248).

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Плотность потока намагниченности решетки

Выделим явно в уравнении ЛЛГ (3) обменные слагаемые: внутрирешеточный обмен и s - d -обмен. Тогда получим

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma A \left[\mathbf{M} \times \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2} \right] - \gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{s-d}] - \gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}'] + \kappa \left[\hat{\mathbf{M}} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right], \quad (\text{I.1})$$

где $\mathbf{H}' \equiv \mathbf{H} + \beta(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{H}_d$. Предположим, что внутри подслоя $0 \leq x < \lambda_F$ справедливы оценки $\kappa \ll 1$ и $|\mathbf{M} \times \mathbf{H}'| \ll |\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{s-d}|$, позволяющие отбросить два последних слагаемых в правой части (I.1). Преобразуем векторное произведение в (I.1), содержащее вторую производную, следующим образом:

$$\left[\mathbf{M} \times \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right] - \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right]. \quad (\text{I.2})$$

С учетом сделанных упрощений и (I.2) уравнение (I.1) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{s-d}] + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ a \left[\hat{\mathbf{M}} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right] \right\} = 0, \quad (\text{I.3})$$

где $a = \gamma A M$.

Первое слагаемое в (I.3) есть изменение намагниченности во времени, второе слагаемое пропорционально моменту сил, действующих на решетку со стороны подвижных электронов. Следовательно, последнее слагаемое есть дивергенция потока намагниченности решетки. Таким образом, величина

$$\mathbf{J}_\perp = a \left[\hat{\mathbf{M}} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right] \quad (\text{I.4})$$

имеет смысл потока намагниченности решетки, а параметр a есть коэффициент диффузии намагниченности.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

К выводу дисперсионного соотношения для флуктуаций

Подстановка общего решения (41) в граничные условия (21) и (23) приводит к условию разрешимости вида

$$I_1^2 + 4k^2 I_2^2 = 0, \quad (\text{II.1})$$

где

$$I_1 = J'_s(b)Y'_s'(be^{-L/2r}) - Y'_s(b)J'_s'(be^{-L/2r}), \\ I_2 = \frac{r}{b} \left[J_s(b)Y'_s'(be^{-L/2r}) - Y_s(b)J'_s'(be^{-L/2r}) \right], \quad (\text{II.2})$$

причем штрихи обозначают дифференцирование по аргументу. Согласно (32), необходимо выполнить переход $r \rightarrow +0$. Это означает, в частности, переход к предельному случаю малых индексов и аргументов функций Бесселя, поскольку, согласно (37) и (40), параметры $b \sim \sqrt{r}$ и $s \sim r$. Воспользуемся следующими представлениями функций Бесселя 1-го и 2-го рода [19]:

$$J_s(y) \approx \frac{y^s}{2^s \Gamma(s+1)} \left[1 - \frac{y^2}{4(s+1)} \right], \quad (\text{II.3})$$

$$Y_s(y) \approx \frac{1}{\pi s} \times \\ \times \left[\frac{y^s}{2^s \Gamma(s+1)} - \frac{y^{-s}}{2^{-s} \Gamma(-s+1)} \right] \left(1 - \frac{y^2}{4} \right). \quad (\text{II.4})$$

Продифференцируем функции (II.3) и (II.4) по аргументу и вычислим эти функции, а также их производные в точках $y = b$ и $y = be^{-L/2r}$. Подставим результат в выражения (II.2), сохраняя главные слагаемые при $r \rightarrow 0$. Тогда получим

$$I_1 \approx \frac{2}{\pi} e^{L/2r} \frac{s}{b^2} \left(\text{sh} \frac{Ls}{2r} - \frac{b^2}{2r} \text{ch} \frac{Ls}{2r} \right), \\ I_2 \approx \frac{2}{\pi} e^{L/2r} \frac{r}{b^2} \text{ch} \frac{Ls}{2r}. \quad (\text{II.5})$$

Здесь учтено, что $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ и $\Gamma(s)\Gamma(-s) = -\pi/s \sin \pi s \approx -1/s^2$.

Подстановка (II.5) в (II.1) дает

$$\left(\text{th} \frac{Ls}{2r} - \frac{b^2}{2s} \right)^2 + \left(\frac{2kr}{s} \right)^2 = 0. \quad (\text{II.6})$$

Величины s/r и b^2/s при $r \rightarrow 0$ стремятся к конечным пределам. Вводя обозначение $q = is/2r$ и учитывая определение параметра b (37), получаем дисперсионное соотношение в виде (42).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Katine, F. J. Albert, R. A. Buhrman et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 3149 (2000).
2. J. Grollier, V. Cross, A. Hamzic et al., Appl. Phys. Lett. **78**, 3663 (2001).

3. J.-E. Wegrowe, A. Fabian, Ph. Guittienne et al., Appl. Phys. Lett. **80**, 3361 (2002).
4. M. Tsoi, A. G. M. Jansen, J. Bass et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 4281 (1998); **81**, 493(E) (1998).
5. S. I. Kiselev, J. C. Sankey, I. N. Krivorotov et al., Nature **425**, 380 (2003).
6. J. Bass, S. Urazhdin, N. O. Birge, W. P. Pratt Jr., Phys. Stat. Sol. (a) **201**, 1379 (2004).
7. C. Heide, P. E. Zilberman, and R. J. Elliott, Phys. Rev. B **63**, 064424 (2001).
8. Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, Э. М. Эпштейн, Р. Дж. Эллиотт, Письма в ЖЭТФ **76**, 189 (2002).
9. R. J. Elliott, E. M. Epshtein, Y. V. Gulyaev, and P. E. Zilberman, J. Magn. Magn. Mat. **271**, 88 (2004).
10. Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, Э. М. Эпштейн, Р. Дж. Эллиотт, Письма в ЖЭТФ **79**, 507 (2004).
11. J. C. Slonczewski, J. Magn. Magn. Mat. **159**, L1 (1996).
12. L. Berger, Phys. Rev. B **54**, 9353 (1996).
13. S. Zhang, P. M. Levy, and A. Fert, Phys. Rev. Lett. **88**, 236601 (2002).
14. A. Shpiro, P. M. Levy, and S. Zhang, Phys. Rev. B **67**, 104430 (2003).
15. M. D. Stiles and A. Zangwill, Phys. Rev. B **66**, 014407 (2002).
16. A. M. Haghiri-Gosnet, T. Arnal, R. Soulimane et al., Phys. Stat. Sol. (a) **201**, 1392 (2004).
17. А. Г. Аронов, Г. Е. Пикус, ФТП **10**, 1177 (1976).
18. В. Л. Бонч-Бруевич, С. Г. Калашников, *Физика полупроводников*, Наука, Москва (1990).
19. Б. П. Захарченя, Д. Н. Мирлин, В. И. Перель, И. И. Решина, УФН **136**, 459 (1982).
20. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
21. M. I. Dyakonov and V. I. Perel, Phys. Lett. A **35**, 459 (1971).
22. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, Наука, Москва (1979).
23. А. Г. Гуревич, *Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках*, Наука, Москва (1973).