

# ПОРОГОВАЯ НЕОДНОРОДНАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ ДИРЕКТОРА В ПЛАНАРНОЙ НЕМАТИЧЕСКОЙ ФЛЕКСОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКЕ С КОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ СЦЕПЛЕНИЯ

*М. Ф. Ледней\*, И. П. Пинкевич*

*Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко  
03680, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 24 июня 2004 г.

Рассмотрено влияние энергии сцепления директора флексоэлектрического нематического жидкого кристалла с поверхностью планарно ориентированной ячейки на порог и период пространственно-периодической переориентации директора в электрическом поле. При произвольных значениях энергии сцепления проведены численные расчеты величины порогового поля и соответствующего ему волнового числа пространственной структуры директора. В случае сильного сцепления директора в одноконстантном приближении получены соответствующие аналитические выражения. Показано, что с уменьшением значения азимутальной энергии сцепления области допустимых значений флексоэлектрического параметра  $\nu$  и отношения  $K_2/K_1$  упругих постоянных Франка расширяются, в то время как с уменьшением значения полярной энергии сцепления сужаются по сравнению со случаем абсолютно жесткого сцепления директора с поверхностью ячейки.

PACS: 61.30.Cz, 61.30.Gd, 61.30.Hn, 64.70.Md

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Значительный интерес к физике процессов в ячейках жидких кристаллов во внешних полях и, в частности, к пороговой переориентации директора нематического жидкого кристалла (НЖК) во внешнем электрическом поле (эффект Фредерикса) связан с широким использованием этих ячеек в различного рода электрооптических устройствах [1–3]. Хотя пороговая переориентация директора является объемным эффектом, такие ее характеристики как величина порогового поля и степень переориентации директора существенно зависят от взаимодействия нематика с поверхностью ячейки. Влияние поверхности ячейки оказывается настолько значительным, что может возникать так называемый самопроизвольный, а точнее говоря, стимулированный изменением условий на поверхности, переход Фредерикса [4–7]. Одним из важнейших параметров, определяющих условия для директора на поверхности

ячейки, является энергия сцепления директора с поверхностью. Обычно используемая модель абсолютно жесткого сцепления директора с поверхностью ячейки является самой простой, учет конечности энергии сцепления весьма существенно усложняет решение задач.

Было установлено, что в определенных условиях при пороговой переориентации директора возникает его пространственно-периодическая структура в плоскости НЖК-ячейки. Это явление было рассмотрено в планарно ориентированной ячейке флексоэлектрического нематика с бесконечно жесткими граничными условиями [8, 9]. В работе [10] изучалось влияние поверхности на пороговую пространственно-периодическую переориентацию директора электрическим полем, однако, в гомеотропно ориентированной ячейке флексоэлектрического НЖК. Найдены значения порогового поля и пространственного периода директора в зависимости от значений энергии сцепления директора с поверхностью ячейки и флексоэлектрических коэффициентов НЖК. Возможность образования двумерных пе-

\*E-mail: ledney@univ.kiev.ua

риодических структур флексоэлектрического происхождения в гомеотропной ячейке НЖК рассматривалась также в работе [11].

В работе [12] было показано, что в планарно ориентированной нематической ячейке с бесконечно жесткими граничными условиями пространственно-периодическая структура поля директора может возникать и при отсутствии флексополяризации в зависимости от соотношения между упругими модулями Франка  $K_1$  и  $K_2$ . При этом, если отношение  $K_2/K_1 < r_o \approx 0.3$ , имеет место переход Фредерикса с образованием пространственно-периодической структуры, при  $K_2/K_1 > r_o$  возможен только однородный переход Фредерикса. Кроме того, в работах [13–15] показано, что характер периодической структуры, образующейся при такой геометрии, существенно зависит также от величины энергии сцепления директора с поверхностью ячейки.

Теоретические и экспериментальные исследования периодических структур, возникающих в ячейках лиотропных нематических жидких кристаллов при превышении внешним магнитным полем порога перехода Фредерикса, проведены авторами работ [16, 17]. В работах [18–21] исследовалось влияние упругой постоянной  $K_{24}$  на возникновение спонтанного периодического искажения в планарно ориентированной ячейке НЖК, а в работе [22] проанализирована связь между постоянной  $K_{24}$  и параметрами периодической структуры, возникающей при переходе Фредерикса во внешнем магнитном поле.

В настоящей работе рассмотрено влияние энергии сцепления директора с поверхностью ячейки на пороговую пространственно-периодическую переориентацию директора в планарной ячейке флексоэлектрического НЖК.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДИРЕКТОРА

Пусть мы имеем плоскопараллельную ячейку флексоэлектрического НЖК, ограниченную плоскостями  $z = -L/2$  и  $z = +L/2$ , с исходной планарной ориентацией директора вдоль оси  $x$ , помещенную во внешнее однородное электрическое поле с вектором напряженности  $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ .

Свободная энергия ячейки НЖК может быть записана в виде

$$F = F_{el} + F_E + F_d + F_S,$$

$$\begin{aligned} F_{el} &= \frac{1}{2} \int_V \{ K_1 (\operatorname{div} \mathbf{n})^2 + K_2 (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n})^2 + \\ &\quad + K_3 [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}]^2 \} dV, \\ F_E &= -\frac{\varepsilon_a}{8\pi} \int_V (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})^2 dV, \\ F_d &= - \int_V \{ e_1 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{div} \mathbf{n} + \\ &\quad + e_3 ([\operatorname{rot} \mathbf{n} \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{E}) \} dV, \\ F_S &= -\frac{W_\varphi}{2} \int_{S_{1,2}} \cos^2 \varphi dS - \frac{W_\theta}{2} \int_{S_{1,2}} \cos^2 \theta dS, \\ &\quad W_\varphi > 0, \quad W_\theta > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — директор,  $F_{el}$  — упругая энергия Франка,  $F_E$ ,  $F_d$  — соответственно, анизотропный и флексоэлектрический вклады в энергию взаимодействия НЖК с электрическим полем,  $F_S$  — поверхностная свободная энергия НЖК,  $\varepsilon_a = \varepsilon_{||} - \varepsilon_{\perp} > 0$  — анизотропия статической диэлектрической проницаемости,  $e_1$ ,  $e_3$  — флексоэлектрические коэффициенты,  $W_\theta$ ,  $W_\varphi$  — соответственно, полярная и азимутальная энергии сцепления директора с поверхностью ячейки,  $\theta$  и  $\varphi$  — углы отклонения директора, соответственно, в плоскостях  $xz$  и  $xy$ .

Следует заметить, что поскольку нас интересует влияние конечности энергии сцепления НЖК с поверхностью ячейки, при записи поверхностной свободной энергии мы ограничились простейшей (но, по-видимому, наиболее часто используемой) моделью Рапини [23]. В этой модели, как известно, предполагается, что энергия взаимодействия НЖК с поверхностью пропорциональна квадрату угла между директором и его легкой осью на поверхности ячейки. При этом, однако, мы также приняли во внимание, что изменение поверхностной энергии может быть различным при отклонении директора от его легкой оси в азимутальном и полярном направлениях [24].

Поскольку при планарной геометрии пороговая переориентация директора приводит к возникновению пространственно-периодической структуры вдоль оси  $y$  [8, 9], будем искать директор в виде

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \cos \theta(y, z) \cos \varphi(y, z) + \mathbf{j} \cos \theta(y, z) \sin \varphi(y, z) + \mathbf{k} \sin \theta(y, z), \quad (2)$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — орты декартовой системы координат.

В случае малых деформаций директора ( $|\varphi|, |\theta| \ll 1$ ), минимизируя свободную энер-

гию (1) по  $\theta$  и  $\varphi$ , получим следующие стационарные уравнения:

$$r \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \epsilon E^2 \theta + (1-r) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \epsilon E \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + (1-r) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} - \epsilon E \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

и граничные условия к ним:

$$\left[ \left( \frac{W_\theta}{K_1} \mp e_o E \right) \theta \pm \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right]_{z=\pm L/2} = 0, \quad (4)$$

$$\left[ \frac{W_\varphi}{K_1} \varphi \pm r \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right]_{z=\pm L/2} = 0.$$

Здесь введены обозначения:

$$\epsilon = \frac{\epsilon_a}{4\pi K_1}, \quad r = \frac{K_2}{K_1},$$

$$e = \frac{e_1 - e_3}{K_1}, \quad e_o = \frac{e_1 + e_3}{K_1}.$$

Учитывая симметрию системы уравнений (3), ищем ее решение в виде

$$\theta(y, z) = \cos(qy)\theta_1(z), \quad \varphi(y, z) = \sin(qy)\varphi_1(z), \quad (5)$$

где функции  $\theta_1(z)$ ,  $\varphi_1(z)$  удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dz^2} - rq^2 + \epsilon E^2 & (1-r)q \frac{d}{dz} + \epsilon E q \\ \epsilon E q - (1-r)q \frac{d}{dz} & r \frac{d^2}{dz^2} - q^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta_1(z) \\ \varphi_1(z) \end{pmatrix} = 0. \quad (6)$$

Полагая в (6)

$$\begin{pmatrix} \theta_1(z) \\ \varphi_1(z) \end{pmatrix} = e^{\lambda z} \begin{pmatrix} \theta_{10} \\ \varphi_{10} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

получаем однородную систему двух алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $\theta_{10}$  и  $\varphi_{10}$ . Условие ее нетривиального решения дает уравнение для определения значений  $\lambda$ :

$$(\lambda^2 - q^2)^2 + \epsilon E^2 (\lambda^2 - q^2) - \frac{1}{r} [\epsilon E^2 q^2 (1-r) + (\epsilon E q)^2] = 0, \quad r \neq 0. \quad (8)$$

Решив уравнение (8), получаем  $\lambda = \pm ip_1, \pm p_2$ , где  $p_1$  и  $p_2$  принимают действительные значения:

$$p_1 = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \epsilon E^2 + \left( (\epsilon E^2)^2 + 4q^2 \epsilon E^2 \frac{1-r+1/\nu}{r} \right)^{1/2} \right] - q^2 \right\}^{1/2}, \quad (9)$$

$$p_2 = \left\{ q^2 - \frac{1}{2} \left[ \epsilon E^2 - \left( (\epsilon E^2)^2 + 4q^2 \epsilon E^2 \frac{1-r+1/\nu}{r} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/2},$$

где  $\nu = \epsilon/e^2$ .

Из уравнений (6) также находим, что

$$\frac{\varphi_{10}}{\theta_{10}} = \frac{\epsilon E q - (1-r)q\lambda}{q^2 - r\lambda^2}.$$

Тогда общее решение системы уравнений (6) имеет вид

$$\theta_1(z) = a_1 \cos(p_1 z) + a_2 \sin(p_1 z) + b_1 \operatorname{ch}(p_2 z) + b_2 \operatorname{sh}(p_2 z),$$

$$\varphi_1(z) = a_1 (\alpha_1 \cos(p_1 z) - \beta_1 \sin(p_1 z)) + a_2 (\alpha_1 \sin(p_1 z) + \beta_1 \cos(p_1 z)) + b_1 (\alpha_2 \operatorname{ch}(p_2 z) + \beta_2 \operatorname{sh}(p_2 z)) + b_2 (\alpha_2 \operatorname{sh}(p_2 z) + \beta_2 \operatorname{ch}(p_2 z)), \quad (10)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\epsilon E q}{q^2 + r p_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\epsilon E q}{q^2 - r p_2^2}, \quad (11)$$

$$\beta_1 = -\frac{(1-r)q p_1}{q^2 + r p_1^2}, \quad \beta_2 = -\frac{(1-r)q p_2}{q^2 - r p_2^2}. \quad (12)$$

Здесь  $a_i, b_i$  ( $i = 1, 2$ ) — произвольные постоянные, значения которых определяются из граничных условий (4).

### 3. ЗАВИСИМОСТЬ ПОРОГА ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОТ АЗИМУТАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ СЦЕПЛЕНИЯ

Будем считать, что полярная энергия сцепления  $W_\theta$  директора с поверхностью ячейки является бесконечно большой ( $W_\theta = \infty$ ), а азимутальная энергия сцепления  $W_\varphi$  может быть произвольной. В этом случае граничные условия (4) принимают вид

$$\theta_1|_{z=\pm L/2} = 0, \quad \left[ \frac{W_\varphi}{K_1} \varphi_1 \pm r \frac{d\varphi_1}{dz} \right]_{z=\pm L/2} = 0. \quad (13)$$

Подставив решение (10) в граничные условия (13), получаем однородную систему четырех алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_i, b_i, i = 1, 2$ . Условие ее нетривиального решения приводит к уравнению

$$\left[ \beta_2 \operatorname{ctg} \frac{p_1 L}{2} \left( \frac{W_\varphi}{K_1} + r p_2 \operatorname{cth} \frac{p_2 L}{2} \right) + \beta_1 \operatorname{cth} \frac{p_2 L}{2} \left( \frac{W_\varphi}{K_1} + r p_1 \operatorname{ctg} \frac{p_1 L}{2} \right) \right] \times \left[ \beta_2 \left( \frac{W_\varphi}{K_1} \operatorname{cth} \frac{p_2 L}{2} + r p_2 \right) - \beta_1 \left( \frac{W_\varphi}{K_1} \operatorname{ctg} \frac{p_1 L}{2} - r p_1 \right) \right] + \left[ \alpha_2 \operatorname{ctg} \frac{p_1 L}{2} \left( \frac{W_\varphi}{K_1} \operatorname{cth} \frac{p_2 L}{2} + r p_2 \right) - \alpha_1 \operatorname{cth} \frac{p_2 L}{2} \left( \frac{W_\varphi}{K_1} \operatorname{ctg} \frac{p_1 L}{2} - r p_1 \right) \right] \times \left[ \alpha_1 \left( \frac{W_\varphi}{K_1} + r p_1 \operatorname{ctg} \frac{p_1 L}{2} \right) - \alpha_2 \left( \frac{W_\varphi}{K_1} + r p_2 \operatorname{cth} \frac{p_2 L}{2} \right) \right] = 0. \quad (14)$$

Решая уравнение (14), получим значение электрического поля  $E$  как функцию параметра  $q$ . Порог  $E_c$  возникновения неустойчивости определяется минимумом на кривой  $E(q)$ .

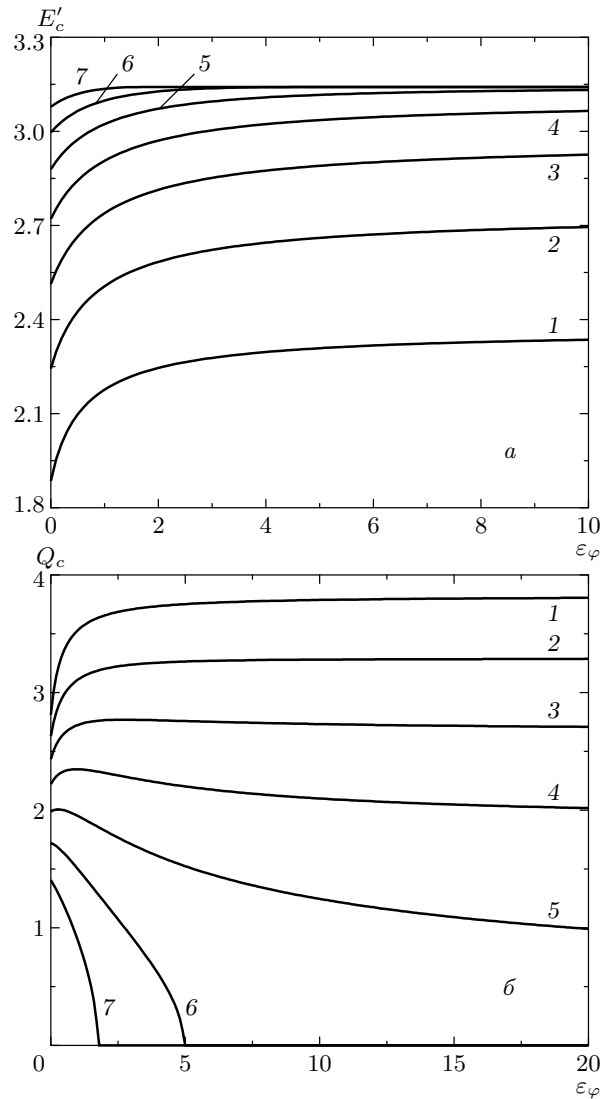
В общем случае уравнение (14) допускает только численное решение. При этом заметим, что для возникновения пороговой пространственно-периодической переориентации директора необходимо также выполнение неравенства

$$\left. \frac{dE}{dq} \right|_{q=0} < 0. \quad (15)$$

Дифференцируя уравнение (14) по  $q$ , находим  $dE/dq|_{q=0}$  и, учитывая (15), приходим к следующему выражению, связывающему параметры нематического жидкого кристалла  $r, \nu$  и  $\varepsilon_\varphi = W_\varphi L / K_1$  при пороговой пространственно-периодической переориентации директора:

$$(1-r)^2 - \frac{\pi^2}{8} \left( 1 - 2r + \frac{1}{\nu} + \frac{4r}{\nu \varepsilon_\varphi} \right) \left( 1 + \frac{2r}{\varepsilon_\varphi} \right) < 0. \quad (16)$$

а) Рассмотрим сначала случай, когда флексо-



**Рис. 1.** Зависимости порогового поля  $E'_c$  (а) и волнового числа  $Q_c$  (б) от азимутальной энергии сцепления  $\varepsilon_\varphi$  в отсутствие флексополяризации ( $\nu = \infty$ );  $r = 0.1$  (1), 0.15 (2), 0.2 (3), 0.25 (4), 0.3 (5), 0.35 (6), 0.4 (7)

электрическая поляризация в ячейке НЖК отсутствует. В этом случае уравнение (14) принимает вид

$$\beta_2 \operatorname{ctg} \frac{p_1 L}{2} \left( \frac{W_\varphi}{K_1} + r p_2 \operatorname{cth} \frac{p_2 L}{2} \right) + \beta_1 \operatorname{cth} \frac{p_2 L}{2} \left( \frac{W_\varphi}{K_1} + r p_1 \operatorname{ctg} \frac{p_1 L}{2} \right) = 0. \quad (17)$$

Решая уравнение (17), находим значения порогового электрического поля  $E_c$  и соответствующего ему волнового числа  $q_c$  при произвольных значениях азимутальной (безразмерной) энергии сцепления  $\varepsilon_\varphi$  ди-

ректора с поверхностью ячейки и отношения  $r$  упругих модулей Франка. На рис. 1 приведены полученные зависимости безразмерного порогового поля  $E'_c = \sqrt{\epsilon} E_c L$  и соответствующего ему значения безразмерного волнового числа  $Q_c = q_c L$  от величины азимутальной энергии сцепления  $\epsilon_\varphi$  для различных значений параметра  $r$ . Как видно, значение порогового электрического поля растет с ростом величины азимутальной энергии сцепления  $\epsilon_\varphi$ .

Значение периода  $\lambda_c = 2\pi/q_c$  возникающей пространственной структуры директора убывает с ростом  $\epsilon_\varphi$  для значений  $r \lesssim 0.2$  и растет при больших значениях параметра  $r$ . При этом значения  $\lambda_c$  при  $\epsilon_\varphi \rightarrow \infty$  принимают некоторое постоянное конечное значение, если

$$r < r_o = 1 - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{8} \sqrt{\pi^2 - 8} \approx 0.3.$$

Если же  $r_o < r < 0.5$ , то для каждого  $r$  из этого интервала существует предельное (критическое) значение азимутальной энергии сцепления:

$$\epsilon_{\varphi th}(r) = \frac{2\pi^2 r(1-2r)}{8(1-r)^2 - \pi^2(1-2r)}, \quad (18)$$

определяемое из неравенства (16), так что при  $\epsilon_\varphi < \epsilon_{\varphi th}$  имеет место переход Фредерикса с образованием пространственно-периодической структуры, а при  $\epsilon_\varphi > \epsilon_{\varphi th}$  возможен только переход Фредерикса с однородным (по оси  $y$ ) распределением директора. Для значений параметра  $r \geq 0.5$  имеет место только однородный переход Фредерикса, что согласуется с результатами работы [13].

На рис. 2 приведены зависимости порогового поля  $E'_c$  и волнового числа  $Q_c$  от величины отношения  $r$  упругих модулей Франка при различных значениях азимутальной энергии сцепления  $\epsilon_\varphi$  директора с поверхностью. Пороговое значение электрического поля и соответствующее ему значение периода  $\lambda_c$  возникающей пространственной структуры директора растут с увеличением параметра  $r$ . Для каждой заданной величины азимутальной энергии сцепления  $\epsilon_\varphi$  существует критическое значение отношения упругих модулей Франка

$$r_{th}(\epsilon_\varphi) = \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8\epsilon_\varphi} + \left[ \left( 1 - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8\epsilon_\varphi} \right)^2 - \left( 1 + \frac{\pi^2}{2\epsilon_\varphi} \right) \left( 1 - \frac{\pi^2}{8} \right) \right]^{1/2} \right\} \left( 1 + \frac{\pi^2}{2\epsilon_\varphi} \right)^{-1}, \quad (19)$$

определяемое неравенством (16): при  $r < r_{th}$  имеет место переход Фредерикса с образованием пространственно-периодической структуры директора,

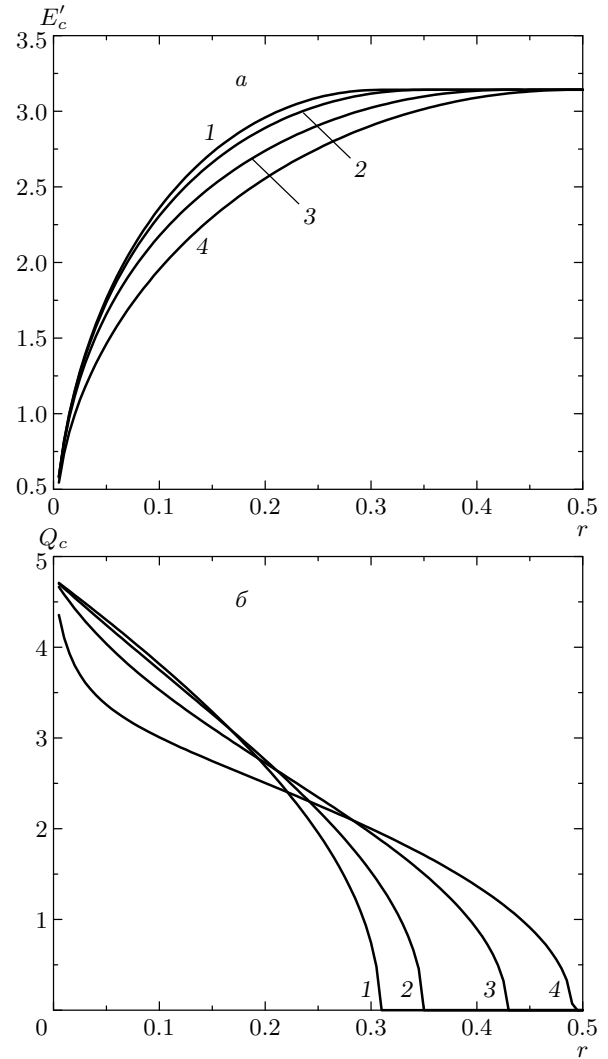
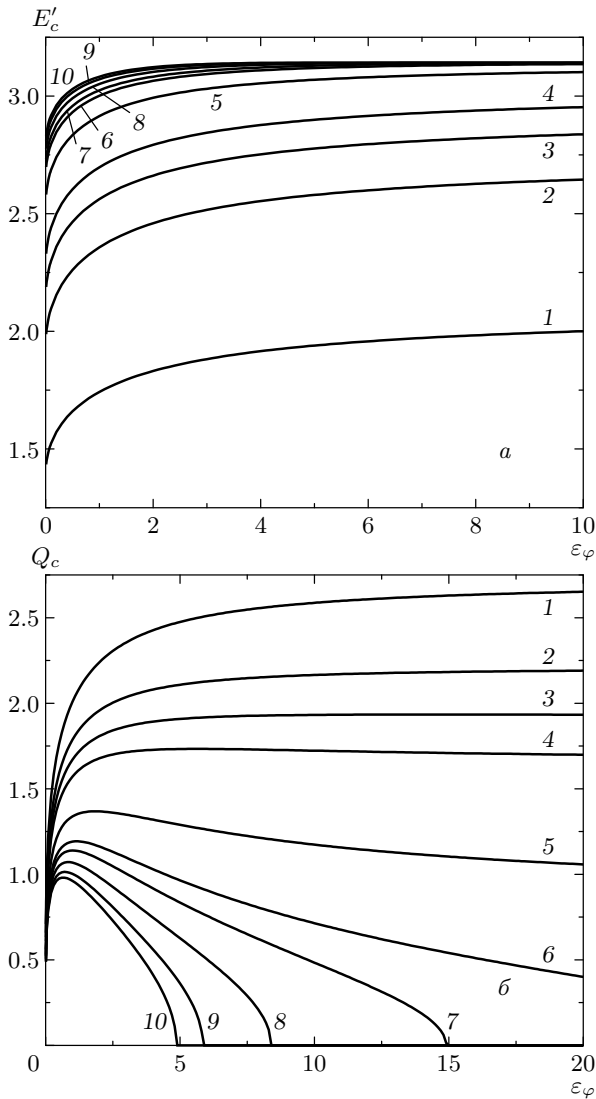


Рис. 2. Зависимости порогового поля  $E'_c$  (а) и волнового числа  $Q_c$  (б) от значений параметра  $r$  при  $\nu = \infty$ ;  $\epsilon_\varphi = 50$  (1), 5 (2), 1 (3), 0.1 (4)

при  $r > r_{th}$  — однородный переход Фредерикса, что согласуется и с результатами работ [13, 15]. В предельном случае абсолютно жесткого сцепления директора с поверхностью ячейки ( $\epsilon_\varphi \rightarrow \infty$ ), как следует из (19), критическое значение отношения упругих модулей Франка равно  $r_{th} = r_o$  [12].

б) Теперь рассмотрим случай флексоэлектрического НЖК. В случае сильного (но не абсолютно жесткого) сцепления директора с поверхностью ячейки ( $\epsilon_\varphi \gg 1$ ), решая уравнение (14) в одноконстантном приближении ( $K_1 = K_2$ ), получаем пороговое значение электрического поля:

$$E_c = E(q_c) = \frac{2\pi}{|e|(1+\nu)L} \left( 1 - \frac{1-\nu}{\epsilon_\varphi} \right), \quad (20)$$



**Рис. 3.** Зависимости порогового поля  $E'_c$  (а) и волнового числа  $Q_c$  (б) от азимутальной энергии сцепления  $\varepsilon_\varphi$  при  $r = 0.75$ ;  $\nu = 0.2$  (1), 0.5 (2), 0.7 (3), 0.9 (4), 1.5 (5), 2.0 (6), 2.2 (7), 2.5 (8), 2.8 (9), 3.0 (10)

где соответствующее волновое число равно

$$q_c = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{1-\nu}{1+\nu}} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_\varphi} \frac{3\nu-1}{1-\nu} \right),$$

если  $\nu < 1$  и  $\varepsilon_\varphi(1-\nu) \gg 1$ , или

$$q_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}L} \sqrt{\frac{4}{\varepsilon_\varphi} + 1 - \nu},$$

если  $|1-\nu| \ll 1$ .

При произвольных значениях азимутальной энергии сцепления  $\varepsilon_\varphi$  и  $K_1 \neq K_2$  уравнение (14)

решалось численно. На рис. 3 приведены зависимости порогового поля  $E'_c$  и соответствующего ему волнового числа  $Q_c$  от величины азимутальной энергии сцепления  $\varepsilon_\varphi$  при различных значениях флексоэлектрического параметра  $\nu$ . Отношение упругих модулей Франка при этом полагалось для определенности равным  $r = 0.75$ . Как и следовало ожидать, пороговое значение электрического поля растет с ростом величины азимутальной энергии сцепления  $\varepsilon_\varphi$  и с увеличением флексоэлектрического параметра  $\nu$ . Однако период  $\lambda_c$  возникающей пространственной структуры директора может быть, как видно на рис. 3б, немонотонной функцией энергии сцепления  $\varepsilon_\varphi$ . С ростом флексоэлектрического параметра  $\nu$  значения  $\lambda_c$  возрастают. При этом для значений

$$\nu > \frac{\pi^2}{8(1-r)^2 - \pi^2(1-2r)}$$

существует критическое значение азимутальной энергии сцепления, которое монотонно убывает с ростом  $\nu$ , приближаясь в предельном случае  $\nu \rightarrow \infty$  к значению  $\varepsilon_{\varphi th}(r)$ , определяемому соотношением (18).

На рис. 4 приведены зависимости порогового значения электрического поля и соответствующего волнового числа от величины отношения  $r$  упругих модулей Франка для нескольких значений флексоэлектрического параметра  $\nu$ , полученные при значении азимутальной энергии сцепления  $\varepsilon_\varphi = 10$ . Значения порогового поля и соответствующего периода  $\lambda_c$  пространственной структуры директора растут с увеличением параметра  $r$ . Как видно на рис. 4б, критическое значение отношения упругих модулей Франка убывает с ростом параметра  $\nu$  и в предельном случае отсутствия флексополяризации (кривая 7) принимает значение  $r_{th}(\varepsilon_\varphi)$ , определяемое соотношением (19). Следует отметить, что значения порогового поля  $E_c$  при увеличении параметра  $r$  стремятся к одному и тому же предельному значению  $E_c(r_{th}) = \pi/\sqrt{\varepsilon}L$ , не зависящему от величин азимутальной энергии сцепления  $\varepsilon_\varphi$  и флексоэлектрического параметра  $\nu$ .

Как следует из рис. 1–4, область существования периодической структуры директора как по параметру  $r$ , характеризующему величину отношения упругих модулей Франка, так и по флексоэлектрическому параметру  $\nu$ , расширяется при конечных значениях азимутальной энергии сцепления  $\varepsilon_\varphi$  в сравнении со случаем бесконечно жесткого сцепления директора.

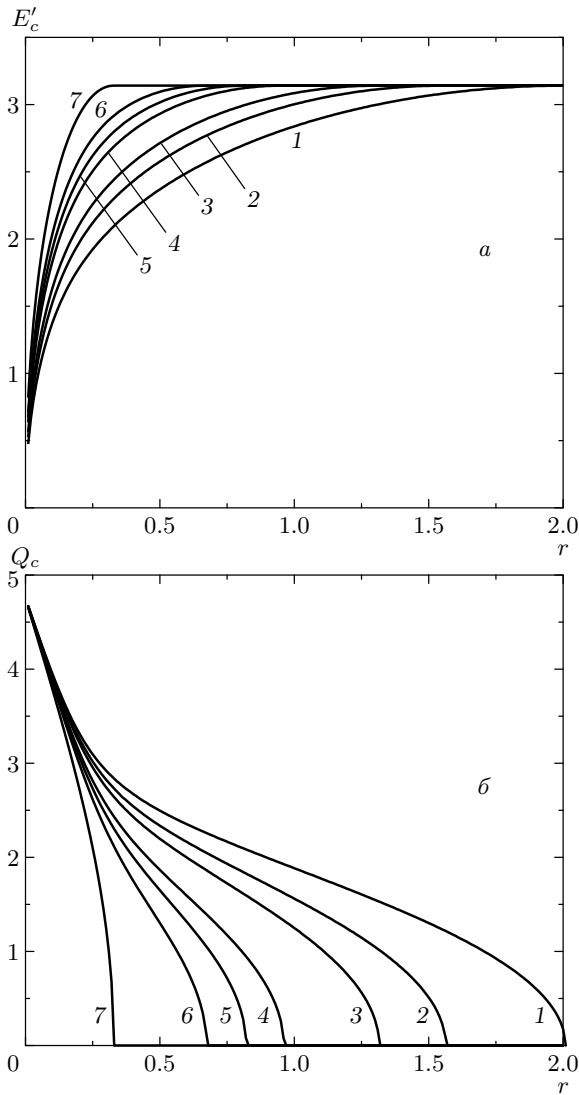


Рис. 4. Зависимости порогового поля  $E'_c$  (а) и волнового числа  $Q_c$  (б) от значений параметра  $r$  при  $\varepsilon_\varphi = 10$ ;  $\nu = 0.5$  (1), 0.7 (2), 0.9 (3), 1.5 (4), 2.0 (5), 3.0 (6),  $\infty$  (7)

#### 4. ЗАВИСИМОСТЬ ПОРОГА ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОТ ПОЛЯРНОЙ ЭНЕРГИИ СЦЕПЛЕНИЯ

Предположим теперь, что бесконечно большой является азимутальная энергия сцепления директора с поверхностью ячейки ( $W_\varphi = \infty$ ), а полярная энергия сцепления  $W_\theta$  произвольна. В этом случае граничные условия (4) принимают следующий вид:

$$\left[ \left( \frac{W_\theta}{K_1} \mp \varepsilon_o E \right) \theta_1 \pm \frac{d\theta_1}{dz} \right]_{z=\pm L/2} = 0, \quad (21)$$

$$\varphi_1|_{z=\pm L/2} = 0.$$

Подставив решение (10) в граничные условия (21), получаем однородную алгебраическую систему уравнений для коэффициентов  $a_i, b_i$  ( $i = 1, 2$ ). Условие нетривиального решения этой системы дает детерминантное уравнение для определения дисперсионной зависимости  $E(q)$ , которое мы здесь не приводим ввиду его громоздкости. Область пороговой пространственно-периодической переориентации директора определяется, в соответствии с (15), неравенством

$$A(1-r)^2 + B(1-r) - \frac{1}{2}Cu \left( 1 - 2r + \frac{1}{\nu} \right) - D < 0, \quad (22)$$

которое справедливо при всех значениях полярной (безразмерной) энергии сцепления  $\varepsilon_\theta = W_\theta L / K_1$  директора с поверхностью ячейки. Здесь использованы обозначения

$$A = 2 \frac{\varepsilon_\theta + 2u \operatorname{ctg} u}{u \operatorname{ctg} u}, \quad B = \frac{8}{\sqrt{\nu\nu_o}} (1 - u \operatorname{ctg} u),$$

$$C = \left( \frac{\varepsilon_\theta}{\sin^2 u} + 2 \right) \frac{\varepsilon_\theta + 2u \operatorname{ctg} u}{u} - \frac{4u}{\nu_o \sin^2 u} -$$

$$- 2 \frac{\varepsilon_\theta \operatorname{ctg} u - 2u}{u} \left( \operatorname{ctg} u - \frac{u}{\sin^2 u} \right),$$

$$D = \frac{1}{\nu} \left( \frac{8u}{\nu_o} \operatorname{ctg} u - \varepsilon_\theta \operatorname{ctg} u \frac{\varepsilon_\theta + 2u \operatorname{ctg} u}{u} - \right.$$

$$\left. - (\varepsilon_\theta + 2) \frac{\varepsilon_\theta \operatorname{ctg} u - 2u}{u} \right),$$

$$\nu_o = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o^2},$$

где  $u$  — наименьший положительный корень следующего трансцендентного уравнения

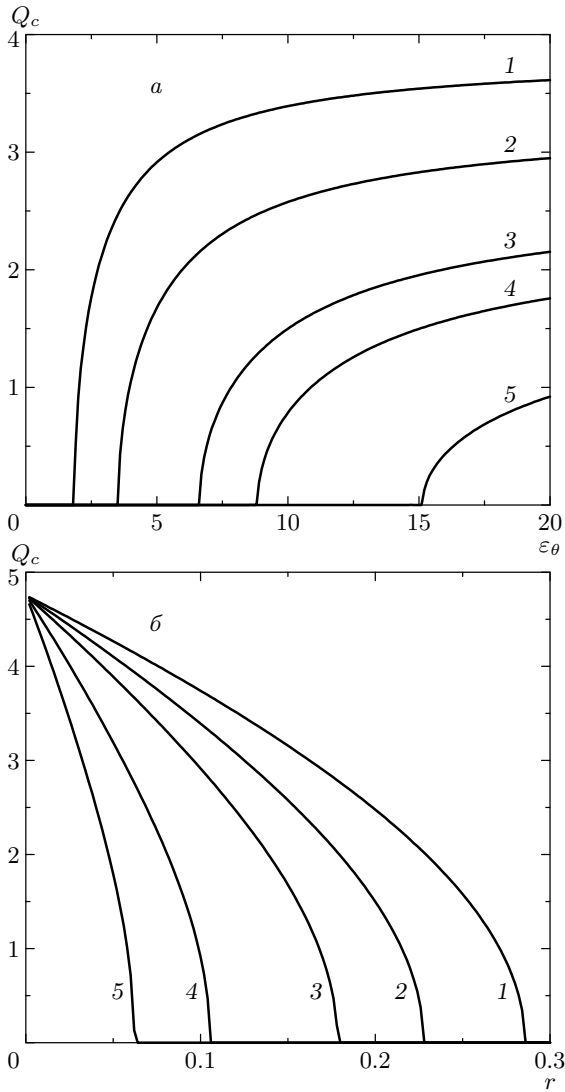
$$\frac{4u^2}{\nu_o} \operatorname{ctg} u = (\varepsilon_\theta \operatorname{ctg} u - 2u)(\varepsilon_\theta + 2u \operatorname{ctg} u).$$

а) Если флексоэлектрическая поляризация в ячейке НЖК отсутствует, то уравнение для определения порогового поля принимает вид

$$\beta_2 \left( \frac{W_\theta}{K_1} \operatorname{ctg} \frac{p_1 L}{2} - p_1 \right) +$$

$$+ \beta_1 \left( \frac{W_\theta}{K_1} \operatorname{cth} \frac{p_2 L}{2} + p_2 \right) = 0. \quad (23)$$

На рис. 5а приведены зависимости волнового числа возникающей пространственной структуры директора от значений полярной энергии сцепления  $\varepsilon_\theta$  для нескольких значений параметра  $r$ , полученные в результате решения уравнения (23). Видно, что значения периода  $\lambda_c = 2\pi/q_c$  директора монотонно убывают с увеличением  $\varepsilon_\theta$ . При этом для



**Рис. 5.** Зависимости волнового числа  $Q_c$  в отсутствие флексополяризации: *a* — от полярной энергии сцепления  $\varepsilon_\theta$  при  $r = 0.1$  (1),  $0.15$  (2),  $0.2$  (3),  $0.22$  (4),  $0.25$  (5), *б* — от значений параметра  $r$  при  $\varepsilon_\theta = 50$  (1),  $10$  (2),  $5$  (3),  $2$  (4),  $1$  (5)

каждого заданного значения параметра  $r < 0.5$  существует критическое значение полярной энергии сцепления  $\varepsilon_{\theta th}(r)$ , определяемое условием (22): при  $\varepsilon_\theta < \varepsilon_{\theta th}$  имеет место однородный переход Фредерикса, а при  $\varepsilon_\theta > \varepsilon_{\theta th}$  — переход Фредерикса с образованием пространственно-периодической структуры. При  $r \geq 0.5$ , как и в случае конечной азимутальной энергии сцепления  $\varepsilon_\varphi$ , возможен только однородный переход Фредерикса.

На рис. 5б представлена зависимость волнового числа  $Q_c$  от значений параметра  $r$ . Критическое зна-

чение параметра  $r$ , получаемое из условия (22), равно

$$r_{th}(\varepsilon_\theta) = 1 - \frac{u_o^2}{2 \sin^2 u_o} - \frac{u_o^2}{\varepsilon_\theta} + \left[ \left( \frac{u_o^2}{2 \sin^2 u_o} + \frac{u_o^2}{\varepsilon_\theta} \right)^2 - \frac{u_o^2}{2 \sin^2 u_o} - \frac{u_o^2}{\varepsilon_\theta} \right]^{1/2}, \quad (24)$$

где  $u_o$  — наименьший положительный корень уравнения  $\text{ctg } u_o = 2u_o/\varepsilon_\theta$ . При  $r < r_{th}$  — имеет место пространственно-периодический, а при  $r > r_{th}$  — однородный переход Фредерикса.

Как и в случае конечной азимутальной энергии сцепления, значения порогового электрического поля монотонно растут с ростом полярной энергии сцепления  $\varepsilon_\theta$  и с увеличением значений параметра  $r$ . Однако при увеличении параметра  $r$  значения порогового электрического поля  $E_c$  стремятся к разным предельным значениям, равным  $E_c(r_{th}) = 2u_o/\sqrt{\varepsilon}L$ , зависящим от величины полярной энергии сцепления  $\varepsilon_\theta$ .

Как видно на рис. 5б, конечность полярной энергии сцепления  $\varepsilon_\theta$  приводит к сужению области существования периодической структуры директора по параметру  $r$  в сравнении со случаем бесконечно жесткого сцепления.

б) Пусть теперь мы имеем флексоэлектрический НЖК. При сильном сцеплении директора с поверхностью ячейки ( $\varepsilon_\theta \gg 1$ ) в одноконстантном приближении значение порогового поля равно

$$E_c = E(q_c) = \frac{2\pi}{|e|(1+\nu)L} \left( 1 - \frac{1+\nu}{\varepsilon_\theta} \right), \quad (25)$$

где волновое число

$$q_c = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{1-\nu}{1+\nu}} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_\theta} \frac{1+\nu}{1-\nu} \right)$$

при  $\nu < 1$  и  $\varepsilon_\theta(1-\nu) \gg 1$ , и

$$q_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}L} \sqrt{1-\nu - \frac{4}{\varepsilon_\theta}}$$

при  $|1-\nu| \ll 1$ .

При произвольных значениях полярной энергии сцепления  $\varepsilon_\theta$  и параметра  $r$ , как и в предыдущем случае, задачу необходимо решать численно. При этом оказывается, что в флексоэлектрическом НЖК с  $r \neq 1$  при увеличении полярной энергии сцепления  $\varepsilon_\theta$  и параметра  $r$  значения порогового электрического поля  $E_c$  монотонно растут при всех значениях флексоэлектрического параметра  $\nu$ . Период  $\lambda_c$  возникающей пространственной структуры директора с ростом  $\varepsilon_\theta$  монотонно убывает, а с ростом параметра  $r$  монотонно возрастает при всех значениях параметра  $\nu$ . Критическое значение полярной энергии



сцепления растет с увеличением параметра  $\nu$  для произвольных значений  $r$  в отличие от рассмотренного выше случая конечных значений азимутальной энергии сцепления. Критическое значение параметра  $r$  монотонно убывает с ростом  $\nu$ , приближаясь в предельном случае  $\nu \rightarrow \infty$  к конечному значению  $r_{th}(\varepsilon_\theta)$ , определяемому выражением (24).

Для типичных значений параметров НЖК  $\varepsilon_a = 0.2$ ,  $r = 0.4$ ,  $K_1 = 5.5 \cdot 10^{-7}$  дин при абсолютно жестком сцеплении ( $W_\varphi = W_\theta = \infty$ ) директора с поверхностью ячейки в отсутствие флексополяризации имеет место только переход Фредерикса с однородным (вдоль оси  $y$ ) распределением директора. Однако, если энергия сцепления конечная, то, например, при азимутальной энергии сцепления, такой что параметр  $\varepsilon_\varphi = 0.1$  (но  $W_\theta = \infty$ ), возникает пространственно-периодическая структура директора с периодом  $\lambda_c \approx 4.6L$ , в то время как при конечной полярной энергии сцепления с параметром  $\varepsilon_\theta = 0.1$  (но  $W_\varphi = \infty$ ) возможен только однородный переход Фредерикса. Аналогично, для флексоэлектрического НЖК при значениях параметров  $\nu = 0.5$ ,  $\nu_o = 0.1$ , которым соответствуют значения флексоэлектрических коэффициентов  $e_1$  и  $e_3$  из интервала  $(0.7-2.5) \cdot 10^{-4}$  дин<sup>1/2</sup> [3], в случае абсолютно жесткого сцепления период пространственной структуры директора равен  $\lambda_c \approx 2.3L$ , при  $\varepsilon_\varphi = 0.1$  и  $W_\theta = \infty$  —  $\lambda_c \approx 3.4L$ , а при  $\varepsilon_\theta = 0.1$  и  $W_\varphi = \infty$  имеет место только однородный переход Фредерикса. Таким образом, период возникающей пространственной структуры директора значительно сильнее зависит от значений азимутальной энергии сцепления (что можно использовать для ее оценки), в то время как значение порогового поля зависит, вообще говоря, более сильно от значений полярной энергии сцепления.

Наконец, подчеркнем еще раз, что при исходной планарной ориентации директора конечность его энергии сцепления с поверхностью ячейки существенно влияет не только на значения порогового поля и период возникающей пространственной структуры директора, но и на область допустимых значений флексоэлектрического параметра  $\nu$  и отношения  $r$  упругих постоянных Франка. В случае конечных значений азимутальной энергии сцепления область существования пространственно-периодической структуры директора по значениям параметров  $r$  и  $\nu$  расширяется, а при конечных значениях полярной энергии сцепления, наоборот, сужается в сравнении с соответствующей областью значений  $r$  и  $\nu$  при абсолютно жестком сцеплении директора.

## ЛИТЕРАТУРА

1. П. де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, Москва (1977).
2. Л. М. Блинов, *Электро- и магнитооптика жидких кристаллов*, Наука, Москва (1978).
3. А. С. Сонин, *Введение в физику жидких кристаллов*, Наука, Москва (1983).
4. А. Н. Чувывров, *Кристаллография* **25**, 188 (1980).
5. Л. М. Блинов, А. А. Сонин, *ЖЭТФ* **87**, 476 (1984).
6. V. G. Nazarenko and O. D. Lavrentovich, *Phys. Rev. E* **49**, 990 (1994).
7. I. P. Pinkevich and M. F. Lednei, *Proc. SPIE* **2651**, 167 (1996).
8. Ю. П. Бобылев, С. А. Пикин, *ЖЭТФ* **72**, 369 (1977).
9. Y. P. Bobilev, V. G. Chigrinov, and S. A. Pikin, *J. de Phys. Coll.* **40**, C3-331 (1979).
10. В. П. Романов, Г. К. Скляренко, *ЖЭТФ* **116**, 543 (1999).
11. G. Barbero and I. Lelidis, *Phys. Rev. E* **67**, 061708 (2003).
12. F. Lonberg and R. B. Meyer, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 718 (1985).
13. C. Oldano, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1098 (1986).
14. W. Zimmermann and L. Kramer, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2655 (1986).
15. E. Miraldi, C. Oldano, and A. Strigazzi, *Phys. Rev. A* **34**, 4348 (1986).
16. M. Simões, A. J. Palangana, and L. R. Evangelista, *Phys. Rev. E* **54**, 3765 (1996).
17. A. J. Palangana, M. Simões, L. R. Evangelista, and A. A. Arrotoia, *Phys. Rev. E* **56**, 4282 (1997).
18. V. M. Pergamenschik, *Phys. Rev. E* **47**, 1881 (1993).
19. V. M. Pergamenschik, *Phys. Rev. E* **61**, 3936 (2000).
20. A. L. Alexe-Ionescu, G. Barbero, and I. Lelidis, *Phys. Rev. E* **66**, 061705 (2002).
21. G. Barbero, L. R. Evangelista, and I. Lelidis, *Phys. Rev. E* **67**, 051708 (2003).
22. A. D. Kiselev and V. Yu. Reshetnyak, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **321**, 133 (1998).
23. A. Rapini and M. Papolar, *J. Phys. Collod.* **30**, 54 (1969).
24. W. Zhao, C.-X. Wu, and M. Iwamoto, *Phys. Rev. E* **65**, 031709 (2002).