

ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РЭЛЕЯ

Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин*

*Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119991, ГСП-1, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 1 сентября 2004 г.

Рассмотрены аналитические свойства безразмерной статической эффективной диэлектрической проницаемости $f(p, h)$ (p — концентрация, h — отношение диэлектрических проницаемостей компонент) двумерной модели Рэля как функции комплексной переменной h . Показано, что единственными особенностями функции $f(p, h)$ являются образующие бесконечное дискретное (счетное) множество полюсов первого порядка при действительных $h = h_n < 0$ ($n = 1, 2, \dots$) с точкой сгущения $h = -1$. Вычислена и представлена в графическом виде зависимость от концентрации положения первых десяти полюсов функции $f(p, h)$ и вычетов в них. На основании полученных результатов предложена приближенная формула полюсного типа, дающая описание функции $f(p, h)$ в широкой области изменения концентрации p и комплексного аргумента h .

PACS: 41.20.Cv, 81.90.+c

1. ВВЕДЕНИЕ

В проведенных в работах [1, 2] экспериментах был обнаружен аномальный рост диэлектрической проницаемости образцов при приближении к точке фазового перехода металл–диэлектрик. Это, в свою очередь, стимулировало интерес к более общей проблеме — низкочастотным электрофизическим свойствам таких систем (в частности, бинарных композитов). Теоретическое рассмотрение этой задачи проводилось в рамках гипотезы подобия [3, 4] и методом теории эффективной среды [5]. В работе [6] низкочастотная дисперсия проводимости неупорядоченной двухкомпонентной решеточной модели изучалась численными методами. Результаты работ [4–6] выявили ряд существенных черт этого явления и показали важность исследования дисперсии диэлектрической проницаемости (или проводимости) таких систем, в том числе и для более углубленного изучения фазового перехода металл–диэлектрик.

В работе [7] применен более общий, чем в [4, 5], подход к задаче о низкочастотной дисперсии диэлектрической проницаемости бинарных компози-

тов, не ограниченный областью применимости приближенных методов — гипотезы подобия или теории эффективной среды. При таком подходе необходимо знать свойства безразмерной статической эффективной диэлектрической проницаемости композита $f(p, h)$ (p — концентрация, h — отношение диэлектрических проницаемостей компонент) при комплексных значениях аргумента h . Это связано с тем, что в низкочастотном (квазистационарном [8]) электрическом поле диэлектрическая проницаемость как отдельных компонент, так и композита в целом, является комплексной величиной.

При этом $f(p, h)$, рассматриваемая как функция комплексной частоты ω , аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$, а ее особенности находятся при $\text{Im } \omega \leq 0$. Однако естественной для f независимой переменной является не частота ω , а величина h , комплексное значение которой обозначим через ζ . Оказывается, что как функция аргумента ζ безразмерная эффективная статическая диэлектрическая проницаемость $f(p, \zeta)$ аналитична во всей комплексной плоскости ζ за исключением отрицательной действительной полуоси ($\text{Re } \zeta \leq 0, \text{Im } \zeta = 0$), см. [7]. Таким образом, все особенности функции $f(p, \zeta)$ на-

*E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru

ходятся на этой полуоси (и, возможно, в бесконечно удаленной точке $\zeta = \infty$) [7].

Знание этих особенностей позволяет написать дисперсионное соотношение, с помощью которого функция $f(p, \zeta)$ при произвольном комплексном ζ выражается через ее мнимую часть на отрицательной вещественной полуоси (точнее, при $\text{Re } \zeta < 0$ и $\text{Im } \zeta = i0$). Заметим, что вид особенностей $f(p, \zeta)$ не является универсальным и зависит от конкретной структуры композита. Так, согласно [9,10] для конечных образцов $f(p, \zeta)$ обладает только дискретным набором полюсов первого порядка. Можно думать (что подтверждается, например, результатами настоящей работы), что дискретным множеством таких полюсов обладают и периодические системы бесконечного размера. В то же время для композитов со случайным распределением компонент следует ожидать, что полюсы сливаются в разрез $\text{Re } \zeta \leq 0$ и $\text{Im } \zeta = 0$, так что $\text{Im } f(p, \zeta)$ на верхнем (или нижнем) берегу этого разреза как функция аргумента $t = -\text{Re } \zeta$ отлична от нуля, вообще говоря, во всем интервале $0 < t < \infty$ (см., например, [11]).

Исследование аналитических свойств $f(p, \zeta)$ для конкретных моделей затруднено практически полным отсутствием точных решений для бинарных систем при конечных (ненулевых) значениях диэлектрических проницаемостей обеих компонент. Одним из исключений является модель, впервые рассмотренная Рэлеем [12] — двумерная матрица с двоякопериодическим расположением включений круговой формы. В [12] фактически найдено только несколько первых членов вириального разложения (при малой концентрации включений) для эффективной диэлектрической проницаемости такой системы. Полное решение этой задачи дано, например, в [13, 14].

В настоящей работе с использованием результатов, полученных в [13, 14], применимых и в комплексной области, исследованы аналитические свойства эффективной статической диэлектрической проницаемости двумерной модели Рэля. Показано, что в соответствии с общими соображениями, приведенными в [7], все особенности функции $f(p, \zeta)$ сосредоточены на отрицательной действительной полуоси и представляют собой бесконечное дискретное (счетное) множество простых полюсов. В данной работе определена зависимость от концентрации включений положения десяти первых полюсов и вычетов в них. С этой целью основные уравнения из [13, 14] решались численными методами. При конкретных расчетах из бесконечной системы этих уравнений выделялась конечная подсистема из сорока уравнений.

В рассматриваемом случае периодической модели функция $f(p, \zeta)$ представляется в виде бесконечной суммы полюсных членов. Учет конечного числа слагаемых дает сравнительно простую приближенную формулу для $f(p, \zeta)$. При этом происходит редукция комплексной трехпараметрической функции $f(p, \zeta)$ до уровня вещественных функций одного аргумента (концентрации). Вычисление положения нескольких первых полюсов и соответствующих вычетов как функций концентрации включений позволяет дать описание $f(p, \zeta)$ в широкой области изменения аргументов p и ζ .

Обсуждаемая модель исследована в рамках задачи о диэлектрической проницаемости (с соответствующей терминологией). Аналогичные задачи о проводимости, теплопроводности, стационарной диффузии и т. п. отличаются от рассмотренной очевидными переобозначениями, и их решения (для данной модели) выражаются через одну и ту же функцию $f(p, \zeta)$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Запишем статическую эффективную диэлектрическую проницаемость ε_e изотропного бинарного композита в виде

$$\varepsilon_e = \varepsilon_e(p; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 f(p, h); \quad h = \varepsilon_2 / \varepsilon_1. \quad (1)$$

Здесь p — концентрация первой компоненты, ε_i ($i = 1, 2$) — диэлектрическая проницаемость i -й компоненты; вид функции $f(p, h)$ — безразмерной эффективной статической диэлектрической проницаемости — зависит от конкретной структуры композита. Заметим, что в двумерном случае функция $f(p, h)$ удовлетворяет соотношению взаимности [15] (см. также [7])

$$f(p, h) f(p, 1/h) = 1, \quad (2)$$

справедливого для изотропных двумерных двухкомпонентных систем с произвольной структурой.

В низкочастотном (квазистационарном [8]) электрическом поле выражение для эффективной диэлектрической проницаемости сохраняет вид (1) с тем, однако, отличием, что величины ε_e и ε_i являются комплексными функциями частоты ω . В этом случае аргумент $h = h(\omega)$ функции $f(p, h)$ также является комплексной величиной. Так, для «плохих» проводников (например, полупроводников) имеет смысл одновременное введение проводимости σ и диэлектрической проницаемости ε [8]. Это

удобно сделать с помощью комплексной проницаемости $\varepsilon(\omega)$ [8]:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (3)$$

Одним из условий квазистационарности является независимость величин ε и σ от частоты [8], что и будем считать выполненным. В этом случае под ε и σ следует понимать статические значения этих величин.

Как отмечено выше, в квазистационарном приближении задача об определении эффективных низкочастотных электрофизических характеристик среды (композита) отличается от статического случая только заменой диэлектрической проницаемости ε в (1) на комплексную проницаемость $\varepsilon(\omega)$. Для $\varepsilon(\omega)$ вида (3) при этом получаем

$$\varepsilon_e + i \frac{4\pi\sigma_e}{\omega} = \left(\varepsilon_1 + i \frac{4\pi\sigma_1}{\omega} \right) f(p, h(\omega)), \quad (4)$$

$$h(\omega) = \left(\varepsilon_2 + i \frac{4\pi\sigma_2}{\omega} \right) / \left(\varepsilon_1 + i \frac{4\pi\sigma_1}{\omega} \right). \quad (5)$$

Отсюда находим

$$\varepsilon_e = \varepsilon_1 \operatorname{Re} f(p, h(\omega)) - \frac{4\pi\sigma_1}{\omega} \operatorname{Im} f(p, h(\omega)), \quad (6)$$

$$\sigma_e = \sigma_1 \operatorname{Re} f(p, h(\omega)) + \frac{\varepsilon_1\omega}{4\pi} \operatorname{Im} f(p, h(\omega)) \quad (7)$$

с $h(\omega)$ из (5). Заметим, что эффективные характеристики ε_e и σ_e , в отличие от ε_i и σ_i , зависят от частоты ω .

Таким образом, знание свойств статической функции $f(p, \zeta)$ в плоскости комплексной переменной ζ позволяет использовать формулу (1) и для $\omega \neq 0$ при замене

$$\zeta \rightarrow h(\omega) = \varepsilon_2(\omega)/\varepsilon_1(\omega). \quad (8)$$

Для систем с фазовым переходом металл–диэлектрик поведение функции $f(p, h)$ в критической области описывается обычно в рамках гипотезы подобия [4]. Использование соответствующих выражений (точнее, их аналитических продолжений) для $f(p, h)$ позволяет дать в этом приближении описание поведения эффективных величин ε_e и σ_e как функций частоты ω во всей критической области, см. [4, 7]. С другой стороны, подстановка в формулы (4)–(7) выражения для $f(p, h)$, вычисленного в рамках теории эффективной среды [16], воспроизводит теоретические результаты работы [5].

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $f(p, \zeta)$

Как известно, диэлектрическая проницаемость, рассматриваемая как функция комплексной частоты ω , аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \omega > 0$ (см. [8, § 82]). Кроме того, согласно [8], диэлектрическая проницаемость при $\operatorname{Im} \omega > 0$ и конечных ω не имеет нулей. Поэтому функция $f = \varepsilon_e(\omega)/\varepsilon_1(\omega)$ также аналитична в верхней полуплоскости ω . Для выяснения аналитических свойств $f(p, \zeta)$ как функции комплексной переменной ζ необходимо знать, на какую область плоскости ζ отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$ преобразование $\zeta = h(\omega)$ с $h(\omega)$ из (8). Рассмотрение конкретных преобразований показывает [7], что полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$ отображается, вообще говоря, на всю плоскость ζ с исключенной отрицательной действительной полуосью ($\operatorname{Re} \zeta < 0, \operatorname{Im} \zeta = 0$). Следовательно, в этой области плоскости ζ функция $f(p, \zeta)$ аналитична, а ее особенности находятся на указанной полуоси, на которой, в частности, терпит разрыв мнимая часть функции f . Отдельного рассмотрения требует бесконечно удаленная точка $\zeta = \infty$. В исследуемом двумерном случае функция $f(p, \zeta)$ при $\zeta = \infty$ либо конечна, либо имеет полюс первого порядка [7], если концентрация p не равна критической ($p \neq p_c$). Отметим также, что согласно [7] имеет место следующее равенство:

$$f(p, \zeta^*) = f^*(p, \zeta), \quad (9)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение.

Знание аналитических свойств функции $f(p, \zeta)$ позволяет написать дисперсионное соотношение. Для определенности рассмотрим двумерный случай ($D = 2$) и область концентраций $p > p_c$, когда протекание (перколяция) по второй компоненте отсутствует, так что при $\zeta \rightarrow \infty$ функция $f(p, \zeta)$ принимает конечное значение $f(p, \infty)$. При этих условиях дисперсионное соотношение, согласно [7], имеет вид

$$f(p, \zeta) = f(p, \infty) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f^{(+)}(p, -t)}{t + \zeta} dt, \quad (10)$$

где $f^{(+)}(p, -t) = f(p, -t + i0)$. Следовательно, для определения $f(p, \zeta)$ во всей плоскости ζ достаточно знать мнимую часть $f^{(+)}$ и величину $f(p, \infty)$.

Заметим, что через мнимую часть $f^{(+)}$ выражается действительная часть импеданса так называемой LC -модели, одна из компонент которой обладает чисто индуктивным сопротивлением, а другая —

чисто емкостным (см. [7]). Согласно [8], действительная часть импеданса неотрицательна, так что [7, 11]

$$\text{Im}f^{(+)}(p, -t) \geq 0. \quad (11)$$

Как отмечено в работе [15] (см. также [7]), отличие от нуля действительной части эффективного импеданса (т. е. наличие реального поглощения энергии) связано с существованием в LC -модели примесных уровней (локальных колебаний), резонансное возбуждение которых и приводит к диссипации энергии. Таким образом, математические особенности функции $f(p, \zeta)$ в комплексной плоскости ζ непосредственно связаны с физическим явлением — наличием локальных колебаний в LC -модели.

Для периодических систем полюсным членам в f отвечают в LC -модели резонансы на некоторых собственных частотах ω_n , образующих, как можно ожидать, дискретный спектр. Частотам ω_n соответствуют вещественные величины (собственные значения) $h_n = h(\omega_n) < 0$ с $h(\omega) = -\omega^2/\Omega^2$ [7], где Ω — томсоновская частота (резонансная частота LC -контур). При $\zeta = h_n$ в функции $f(p, \zeta)$ имеются полюсы. Собственные значения h_n , также образующие дискретный спектр в случае периодической системы, зависят только от структуры (т. е. от геометрических характеристик) композита и не связаны с конкретным содержанием задачи, ср. [17]. Поэтому величины h_n , представляющие собой безразмерные числа, одинаковы (при заданной структуре композита) как для зависящей от частоты LC -модели, так и для статических задач — о диэлектрической проницаемости, проводимости, теплопроводности и т. д. При этом первичными величинами, характеризующими геометрию композита, являются собственные значения h_n , а, например, резонансные частоты LC -модели ω_n — вторичными, выражающимися через h_n : $\omega_n^2 = -h_n \Omega^2 > 0$.

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Как отмечалось выше, следует ожидать, что для периодических систем собственные значения h_n (и, значит, полюсы функции f) образуют дискретный спектр. Поэтому, рассматривая, как и в предыдущем разделе, двумерный случай и область концентраций $p > p_c$ (чему в модели Рэля отвечает $R < a$), для функции $f(p, \zeta)$ будем иметь следующее выражение:

$$f(p, \zeta) = f(p, \infty) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\zeta - h_n}, \quad (12)$$

где $h_n < 0$. Отсюда следует, что мнимая часть $f(p, \zeta)$ при $\zeta = -t + i0$ (t — действительно и положительно) представляет собой сумму дельта-функций:

$$\text{Im}f^{(+)}(p, -t) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} F_n \delta(t + h_n). \quad (13)$$

Из (13) и неравенства (11) следует, что

$$F_n \geq 0. \quad (14)$$

Функция $f(p, \zeta)$ вида (12) обладает всеми свойствами, установленными в разд. 3, и, в частности, удовлетворяет соотношению (9), так как величины $f(p, \infty)$, F_n и h_n вещественны. Отметим также, что подстановка (13) в дисперсионное соотношение (10) воспроизводит формулу (12).

Поскольку $f = 1$ при $\zeta = h = 1$ (однородная среда), должно выполняться равенство

$$f(p, \infty) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{1 - h_n}. \quad (15)$$

При $\zeta = h \rightarrow 1$ разложение (12) до $(1 - h)^2$ включительно с учетом равенства (15) дает

$$f(p, h) = 1 - (1 - h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{(1 - h_n)^2} - (1 - h)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{(1 - h_n)^3} + \dots \quad (16)$$

Сравнение формулы (16) с общим выражением для слабонеоднородной изотропной двумерной бинарной системы (см., например, [11])

$$f(p, h) = 1 - c(1 - h) - \frac{1}{2}c(1 - c)(1 - h)^2 + \dots \quad (17)$$

приводит к двум тождествам:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{(1 - h_n)^2} = c = 1 - p, \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{(1 - h_n)^3} = \frac{1}{2}c(1 - c) = \frac{1}{2}p(1 - p), \quad (19)$$

где c — концентрация (при $D = 2$ — доля занимаемой площади) второй компоненты.

Положив в (12) $\zeta = 0$, найдем соотношение

$$f(p, 0) - f(p, \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{h_n}, \quad (20)$$

откуда следует очевидное неравенство $f(p, 0) < f(p, \infty)$, так как $F_n > 0, h_n < 0$. Исключая $f(p, \infty)$ из (12) с помощью (20), получим

$$f(p, \zeta) = f(p, 0) - \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{h_n(\zeta - h_n)}. \quad (21)$$

Используя формулу (12) при $\zeta = h$, разложим $f(p, h)$ и $f(p, 1/h)$ по степеням h и подставим в соотношение взаимности (2). В линейном по h приближении с учетом формулы (20) находим

$$f(p, 0) \sum_{n=1}^{\infty} F_n = f(p, \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{h_n^2}. \quad (22)$$

Величины $f(p, 0)$ и $f(p, \infty)$ связаны соотношением

$$f(p, 0) f(p, \infty) = 1, \quad (23)$$

также следующим из (2) при $h \rightarrow 0$. Исключение $f(p, \infty)$ из (22) с помощью (23) дает

$$[f(p, 0)]^2 = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{h_n^2}}{\sum_{n=1}^{\infty} F_n}. \quad (24)$$

Дифференцируя (12) по ζ , найдем

$$\frac{\partial f(p, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{(\zeta - h_n)^2}. \quad (25)$$

Отсюда следует, что при вещественном $\zeta = h$

$$\frac{\partial f(p, h)}{\partial h} > 0 \quad (26)$$

для положительных h и

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f(p, h)}{\partial h} > 0 \quad (27)$$

для отрицательных h . При $h < 0$ величина $\operatorname{Re} f(p, h)$ монотонно возрастает (с ростом h) во всех интервалах, ограниченных двумя соседними полюсами.

Подстановка (15) в (12) дает для $f(p, \zeta)$ выражение

$$f(p, \zeta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\zeta - 1}{(1 - h_n)(\zeta - h_n)}, \quad (28)$$

содержащее только величины h_n и F_n . При $\zeta = 0$ из (28) следует представление для $f(p, 0)$:

$$f(p, 0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{h_n(1 - h_n)}. \quad (29)$$

Отметим, что соотношения (15), (18)–(20), (22)–(24) и (29) могут использоваться для контроля правильности определения величин h_n и F_n при изучении конкретных двумерных периодических моделей.

5. МОДЕЛЬ РЭЛЕЯ

Исследуемая в настоящей работе модель представляет собой двумерную изотропную матрицу с диэлектрической проницаемостью ε_1 , в которой имеются включения круговой формы радиуса R с диэлектрической проницаемостью ε_2 . Включения образуют регулярную структуру — их центры расположены в узлах квадратной решетки с периодом $2a$ (см. рис. 1). Задача о вычислении эффективной диэлектрической проницаемости ε_e такой модели впервые рассматривалась в работе Рэлея [12], где было найдено несколько первых членов соответствующего вириального разложения. Полное решение в рамках задачи о проводимости дано, например, в [13, 14].

Согласно [13, 14], вне включений комплексный потенциал задачи дается выражением ($z = x + iy$)

$$\Phi(z) = \beta \left\{ z + \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \zeta^{(2k)}(z) \right\} \quad (30)$$

с вещественными коэффициентами β и B_{2k} . В выражении (30) величина $\zeta^{(2k)}(z)$ — производная порядка $2k$ от дзета-функции Вейерштрасса [18]

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{l,m} \left[\frac{1}{z - z_{lm}} + \frac{1}{z_{lm}} + \frac{z}{z_{lm}^2} \right], \quad (31)$$

$$z_{lm} = 2(l + im)a.$$

Суммирование в (31) распространяется на все целые

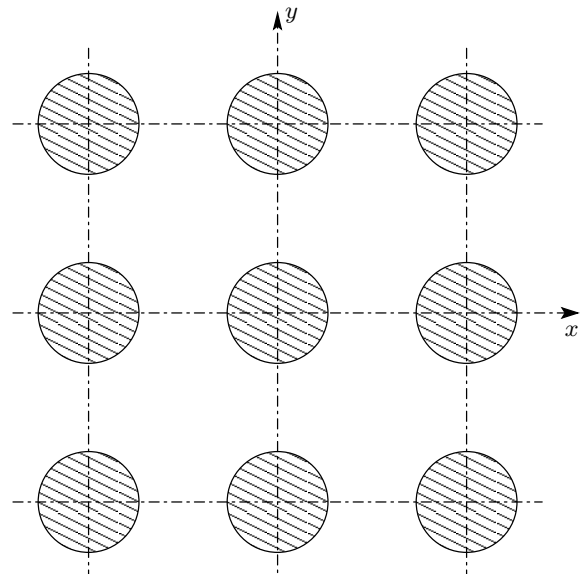


Рис. 1. Двумерная модель Рэлея

(как положительные, так и отрицательные) l и m , кроме $l = m = 0$.

При малых z для функции $\zeta(z)$ имеет место разложение [18]

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k}}{4k-1} z^{4k-1}. \quad (32)$$

Здесь

$$c_2 = g \equiv \frac{g_2}{20}, \quad c_4 = \frac{1}{3} g^2, \quad c_6 = \frac{2}{3 \cdot 13} g^3, \dots, \quad (33)$$

где

$$g_2 = \frac{1}{a^4} \left[K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]^4 \quad (34)$$

— инвариант дзета-функции Вейерштрасса [18]. В выражении (34) $K(1/\sqrt{2}) = 1.85407\dots$ — полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ с модулем $k = 1/\sqrt{2}$. Коэффициенты c_{2k} при $k \geq 2$ могут быть найдены из рекуррентного соотношения [18]

$$c_{2k} = \frac{3}{(4k+1)(2k-3)} \sum_{m=1}^{k-1} c_{2m} c_{2k-2m} \quad (k \geq 2). \quad (35)$$

Заметим, что в разложение (32) не входят коэффициенты с нечетными индексами, так что для рассматриваемой квадратной решетки (лемнискатический случай [18]) величины c_{2k+1} равны нулю.

Коэффициенты B_{2k} ($k = 0, 1, 2, \dots$) из (30) подчиняются бесконечной системе уравнений [13, 14]. При введении вместо B_{2k} «переменных» ξ_k согласно формулам

$$B_{2k} = \frac{R^{2k+2} \delta}{\sqrt{(2k)!(2k+1)!}} \xi_k; \quad \delta = \frac{1-h}{1+h}, \quad h = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (36)$$

эта система принимает вид [14]

$$\xi_k + \sum_{l=0}^{\infty} S_{kl} \xi_l = \delta_{k0} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (37)$$

где δ_{k0} — символ Кронекера и

$$S_{kl} = \frac{(2l+2k)! R^{2(k+l+1)} c_{k+l+1}}{\sqrt{(2k)!(2k+1)!(2l)!(2l+1)!}} \delta. \quad (38)$$

Коэффициенты c_{k+l+1} определены в (32)–(35), а величина δ — в (36). Матрица S_{kl} симметрична и отлична от нуля только в том случае, когда индексы k и l имеют различную четность. В частности, $S_{00} = 0$, так как $c_1 \equiv 0$.

Для безразмерной эффективной диэлектрической проницаемости рассматриваемой модели $f = \varepsilon_e/\varepsilon_1$ согласно [13] имеем

$$f = \frac{1 - c \xi_0 \delta}{1 + c \xi_0 \delta}, \quad (39)$$

где

$$c = \pi R^2 / 4a^2 \quad (40)$$

— концентрация включений. Корни уравнения

$$\xi_0^{-1} + c \delta = 0 \quad (41)$$

определяют положение полюсов h_n . При $h \rightarrow h_n$ функция f принимает вид

$$f \approx -\frac{F_n}{h - h_n}, \quad (42)$$

где

$$F_n = -\frac{2}{c} \left\{ \left[\frac{d(\xi_0 \delta)}{dh} \right]_{h=h_n} \right\}^{-1} \quad (43)$$

— взятый с обратным знаком вычет функции f в полюсе $h = h_n$.

Уравнения (37) сохраняют силу при произвольном комплексном h , в том числе и при вещественном $h < 0$. Искомые h_n и F_n находятся подстановкой в (41) и (43) величины $\xi_0 = \xi_0(h)$, определенной из системы (37) при отрицательных h .

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН h_n И F_n

Для изотропной двумерной системы с включениями круговой формы в линейном по их концентрации приближении имеем (ср. с аналогичной формулой для трехмерного случая [8])

$$f = 1 - 2c \frac{1-h}{1+h}. \quad (44)$$

Выражение (44), справедливое для любого распределения кругов (как случайного, так и периодического), имеет единственный полюс при $h = -1$. Это связано с тем, что при выводе формулы (44) фактически рассматривается отдельное, изолированное от других, включение. В то же время $h = -1$ является бесконечнократно вырожденным собственным значением для круга и только учет «взаимодействия» с другими включениями приводит к снятию вырождения. Так, например, в случае пары кругов радиуса R имеется два набора собственных значений [7]

$$\begin{aligned} h_{1n} &= -\operatorname{th} n\mu_0, \\ h_{2n} &= -\operatorname{cth} n\mu_0 \quad (n = 1, 2, \dots), \\ \mu_0 &= \ln \frac{\varrho + \sqrt{\varrho^2 - 4R^2}}{2R}, \end{aligned} \quad (45)$$

где ϱ — расстояние между центрами кругов. При этом $h = -1$ является точкой сгущения (при $n \rightarrow \infty$)

величин h_{1n} и h_{2n} . Отметим, что собственным значениям (45) отвечают полюсы в поляризуемости пары кругов (круговых цилиндров) [11].

Сходная картина имеет место и для модели Рэлея — в следующих по концентрации приближениях в функции f возникает целый спектр полюсов. В этом случае для оценки величин h_n и F_n при $c \ll 1$ вместо (37) будем решать конечную подсистему из N уравнений, последовательно увеличивая их число. Для дальнейшего удобно из матрицы S_{kl} , определенной в (38), выделить множитель δ :

$$S_{kl} = A_{kl}\delta. \tag{46}$$

Из (38) с учетом (46) находим

$$\begin{aligned} A_{01} &= \frac{1}{\sqrt{3}} c_2 R^4, & A_{12} &= \sqrt{15} c_4 R^8, \\ A_{03} &= \frac{1}{\sqrt{7}} c_4 R^8, & A_{23} &= 6\sqrt{35} c_6 R^{12}, \dots \end{aligned} \tag{47}$$

с c_{2k} из (32)–(35).

Если в (37) ограничиться одним уравнением (при $k = 0$), то $\xi_0 = 1$. В этом случае из (41) следует $\delta_1 = -1/c$, так что $h_1 = -(1 + 2c + 2c^2 + \dots)$ и $F_1 = 4c(1 + 2c + \dots)$ при $c \ll 1$. В следующем приближении ($k = 0, 1; l = 0, 1$) имеем

$$N = 2: \quad \xi_0^{-1} = 1 - A_{01}^2 \delta^2. \tag{48}$$

Подстановка (48) в (41) дает для δ алгебраическое уравнение второй степени, имеющее два действительных корня. С их использованием при $c \ll 1$ получаем

$$h_1 = - \left(1 + 2c + 2c^2 + 2c^3 + \frac{2}{c} A_{01}^2 + \dots \right), \tag{49}$$

$$F_1 = 4c \left(1 + 2c + 3c^2 - \frac{1}{c^2} A_{01}^2 + \dots \right), \tag{50}$$

$$h_2 = - \left(1 - \frac{2}{c} A_{01}^2 + \dots \right), \tag{51}$$

$$F_2 = \frac{4}{c} A_{01}^2 + \dots \tag{52}$$

При $c \rightarrow 0$ имеем $|h_1 + 1| \sim F_1 \sim c$, $|h_2 + 1| \sim F_2 \sim c^3$, $|\delta_2| \sim 1/c^3$.

Из системы трех уравнений (для ξ_0, ξ_1 и ξ_2) следует

$N = 3$:

$$\xi_0^{-1} = [1 - (A_{01}^2 + A_{12}^2) \delta^2] / (1 - A_{12}^2 \delta^2). \tag{53}$$

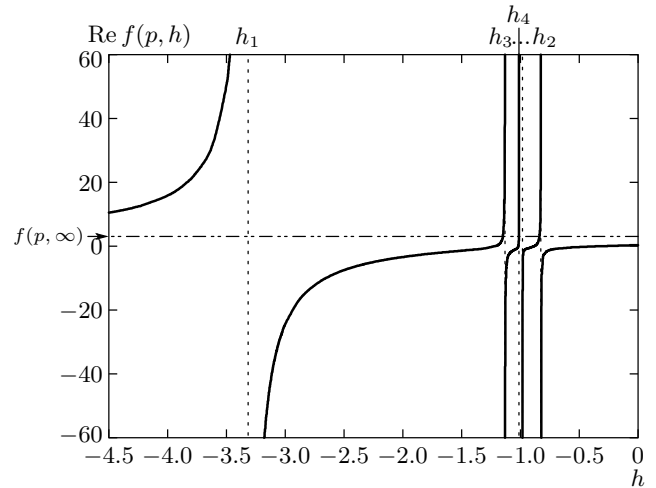


Рис. 2. Величина $\text{Re } f(p, h)$ как функция h на отрицательной вещественной полуоси при концентрации включений $c = 1 - p = 0.5$. Изображены только первые четыре полюса; вся остальная бесконечная совокупность полюсов сосредоточена между h_3 и h_4

В этом случае подстановка (53) в (41) дает уравнение третьей степени. При этом к величинам (49)–(52) могут быть получены (при $c \ll 1$) поправки порядка c^4 и c^5 включительно. Для третьего ($n = 3$) полюса находим

$$h_3 = - \left[1 + 2c \left(A_{12}/A_{01} \right)^2 + \dots \right], \tag{54}$$

$$F_3 = 4c \left(A_{12}/A_{01} \right)^2 + \dots, \tag{55}$$

так что $|h_3 + 1| \sim F_3 \sim c^5$, $|\delta_3| \sim 1/c^5$ при $c \rightarrow 0$.

При $n = 4$ имеем

$$\begin{aligned} \xi_0^{-1} &= \left\{ 1 - (A_{01}^2 + A_{12}^2 + A_{03}^2 + A_{23}^2) \delta^2 + \right. \\ &\quad \left. + (A_{01}^2 A_{23}^2 + A_{12}^2 A_{03}^2 - 2A_{01} A_{12} A_{03} A_{23}) \delta^4 \right\} \times \\ &\quad \times [1 - (A_{12}^2 + A_{23}^2) \delta^2]^{-1}, \end{aligned} \tag{56}$$

чему отвечает уравнение четвертой степени для δ . Для величин h_4 и F_4 даже при $c \ll 1$ получаются довольно громоздкие выражения, которые выписывать не будем. Отметим только, что $|h_4 + 1| \sim F_4 \sim c^7$ и $|\delta_4| \sim 1/c^7$ при $c \rightarrow 0$. Аналогичным образом могут быть рассмотрены и высшие ($N \geq 5$) приближения.

Проведенный анализ дает возможность сделать следующие выводы. Выбрав подсистему из N уравнений, для величины δ получаем алгебраическое

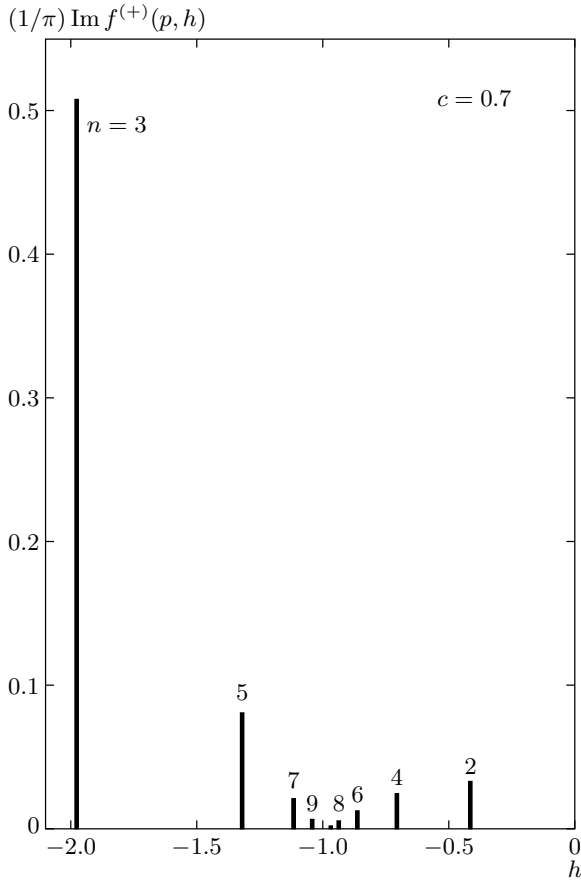


Рис. 3. Величина $\text{Im } f^{(+)}(p, h)$ как функция h при $c = 1 - p = 0.7$. Высота каждого пика пропорциональна «силе» F_n соответствующей дельта-функции, см. формулу (13)

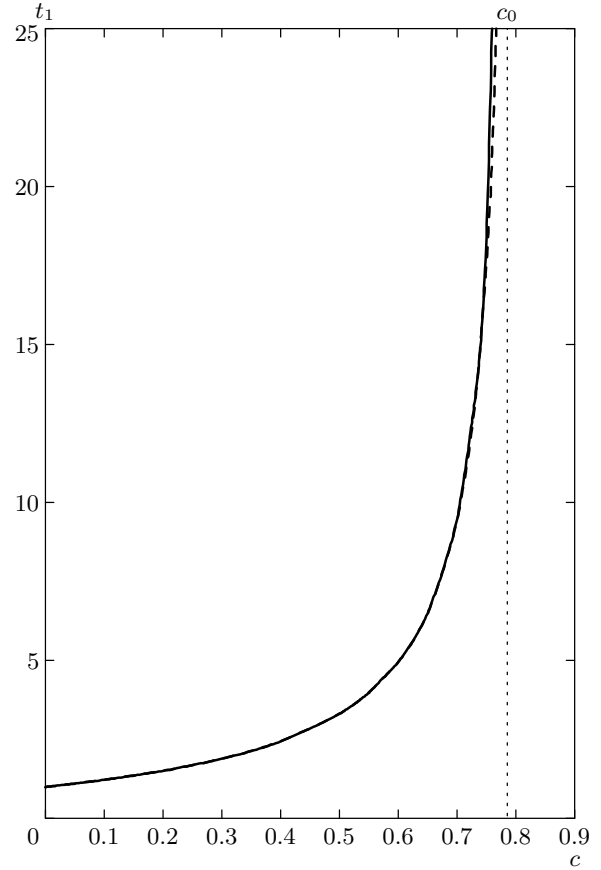


Рис. 4. Величина $t_1 = -h_1$ как функция концентрации c . Штриховой линией изображена зависимость t_1 от c в приближении четырех уравнений. Здесь $c_0 = \pi/4 \approx 0.785$ — критическая концентрация (при $R = a$)

уравнение N -й степени, имеющее N вещественных корней δ_n ($n = 1, 2, \dots, N$). Это позволяет найти приближенное положение первых N полюсов (а также и вычеты в них) функции $f(p, \zeta)$, причем точность вычисления величин h_n и F_n при фиксированном n возрастает с ростом N . С увеличением N полюсы появляются в определенном порядке: полюсы с нечетными номерами расположены слева от точки $h = -1$, а с четными — справа. При малых c имеем следующие оценки: $|h_n + 1| \sim F_n \sim c^{2n-1} \ll 1, |\delta_n| \sim 1/c^{2n-1} \gg 1$ ($n = 1, 2, \dots$). Таким образом, $h_n \rightarrow -1$ при $n \rightarrow \infty$, так что $h = -1$ является точкой сгущения полюсов. Величины F_n быстро уменьшаются с ростом n , что позволяет в разложениях (12), (21) и (28) для функции $f(p, \zeta)$ ограничить суммирование конечным числом слагаемых (вне некоторой области комплексной плоскости ζ вокруг точки $\zeta = -1$).

Для нахождения величин h_n и F_n при немалых

концентрациях c система (37) решалась численными методами. Для удобства вычислений вместо ξ_n вводились «переменные» $x_n = \xi_n \delta$, удовлетворяющие системе уравнений

$$x_k + \sum_{l=0}^{\infty} S_{kl} x_l = \delta \delta_{k0}. \quad (57)$$

В этом случае положение полюсов h_n определяется из уравнения

$$x_0 = -1/c, \quad (58)$$

а величина F_n из равенства, следующего из (43):

$$F_n = \frac{1}{c} \left[(1+h)^2 \left/ \frac{dx_0}{d\delta} \right. \right]_{h=h_n}, \quad (59)$$

где учтено, что x_0 является функцией аргумента δ .

Продифференцируем (57) по δ :

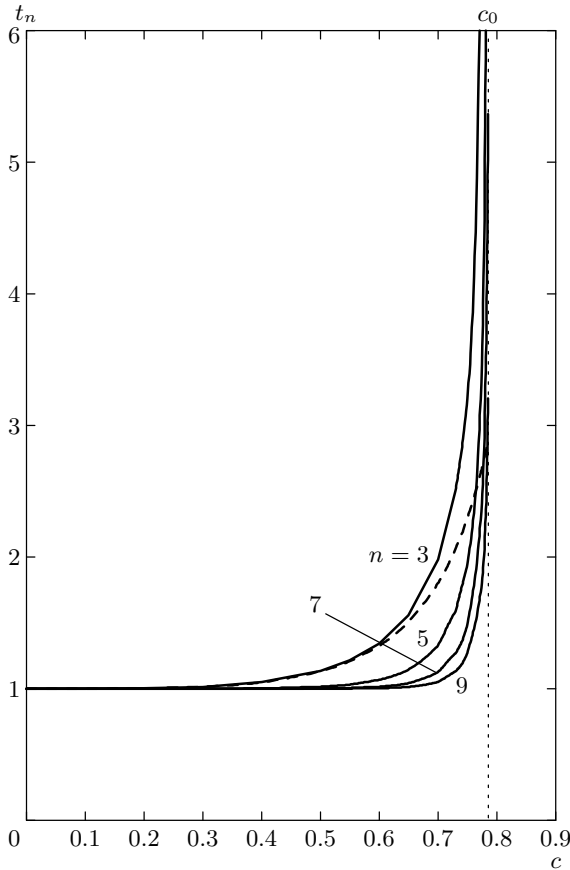


Рис. 5. Величины $t_n = -h_n$ ($n = 3, 5, 7, 9$) как функции концентрации c . Штриховая линия — зависимость t_3 от c в приближении четырех уравнений

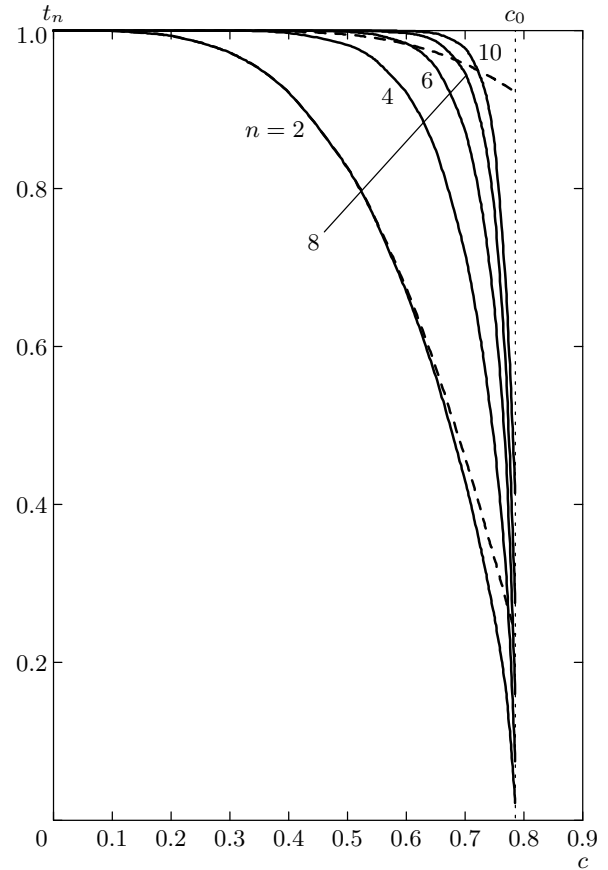


Рис. 6. Величины $t_n = -h_n$ ($n = 2, 4, 6, 8, 10$) как функции концентрации c . Штриховые линии — зависимость t_2 и t_4 от c в приближении четырех уравнений

$$\frac{dx_k}{d\delta} + \sum_{l=0}^{\infty} S_{kl} \frac{dx_l}{d\delta} + \frac{1}{\delta} \sum_{l=0}^{\infty} S_{kl} x_l = \delta_{k0}. \quad (60)$$

Отсюда с учетом (57) находим

$$\frac{dx_k}{d\delta} + \sum_{l=0}^{\infty} S_{kl} \frac{dx_l}{d\delta} = \frac{x_k}{\delta}. \quad (61)$$

Система уравнений (61) по структуре точно такая же, что и (57), они различаются только видом правой части. Подставляя в правую часть (61) значения x_k , найденные из (57), и решая эту систему тем же, что и (57), методом, найдем производную $dx_0/d\delta$. Соответствующие вычисления можно проводить при заданном $h = h_n$ (т.е. при $\delta = \delta_n$). Такой подход позволяет избежать численного дифференцирования при определении величины F_n .

При конкретных вычислениях из (57) и (61) выделялись подсистемы из сорока уравнений. При $h < 0$ определялись все x_k ($k = 0, 1, 2, \dots, 39$)

как функции h при фиксированной концентрации c (т.е. при заданном отношении R/a). Из уравнения (58) находилось положение десяти полюсов h_n ($n = 1, 2, \dots, 10$). Так, например, для первых четырех величин h_n были получены следующие значения:

$$\begin{aligned} h_1 &\approx -3.345, & h_2 &\approx -0.823, \\ h_3 &\approx -1.136, & h_4 &\approx -0.981 \end{aligned} \quad (62)$$

при $R/a = 0.8$ ($c \approx 0.503$) и

$$\begin{aligned} h_1 &\approx -5.978, & h_2 &\approx -0.594, \\ h_3 &\approx -1.484, & h_4 &\approx -0.873 \end{aligned} \quad (63)$$

при $R/a = 0.9$ ($c \approx 0.636$).

Далее определялась производная $dx_0/d\delta$ при $h = h_n$ и по формуле (59) вычислялись величины F_n ($n = 1, 2, \dots, 10$). Проведение подобной процедуры при ряде значений концентрации c позволило найти зависимость h_n и F_n от c . С помощью формулы (39) вычислялись $f(p, 0)$ и $f(p, \infty)$ как функции

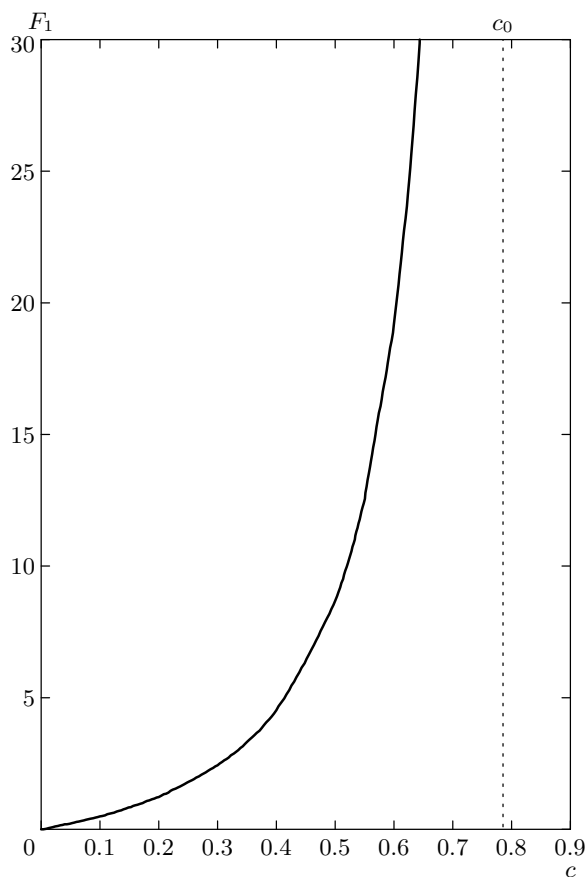


Рис. 7. Величина F_1 как функция концентрации c

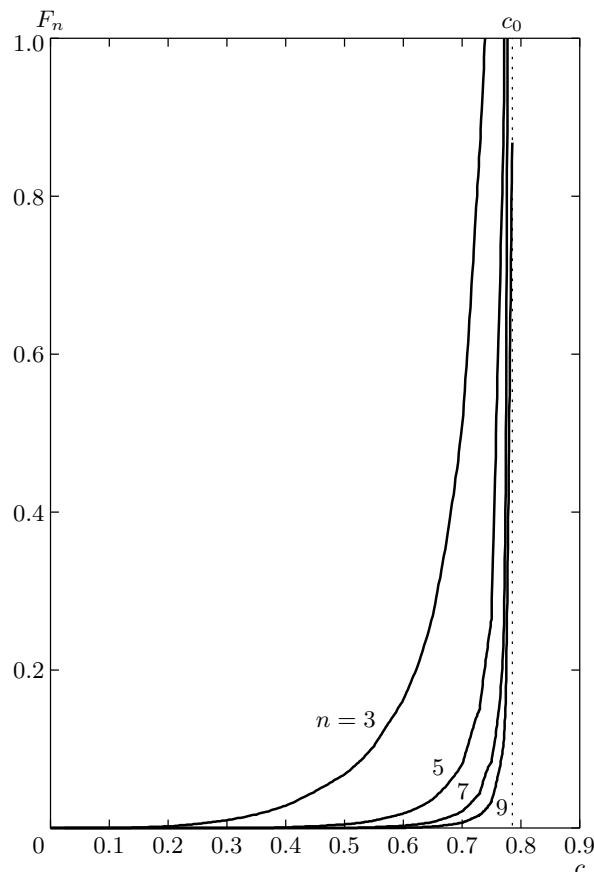


Рис. 8. Величины F_n ($n = 3, 5, 7, 9$) как функции концентрации c

$c = 1 - p$, а также $\text{Re } f(p, h)$ как функция h при фиксированной концентрации. Для контроля правильности вычислений на всех этапах расчета использовались соотношения (15), (18)–(20), (22)–(24) и (29).

Результаты проведенного в работе изучения аналитических свойств функции $f(p, \zeta)$ (при учете сорока уравнений из систем (57) и (61)) представлены в графическом виде на рис. 2–10. Для сравнения решалось алгебраическое уравнение четвертой степени для величины δ , следующее из (41) при подстановке ξ_0 из (56). Зависимость h_1, h_2, h_3 и h_4 от концентрации c для этого приближения изображена на рис. 4–6 штриховыми линиями. Отметим, что основные заключения, сделанные при $c \ll 1$ (см. выше), остаются в силе и при немалых концентрациях c . В то же время отдельного рассмотрения требует окрестность точки фазового перехода металл–диэлектрик $c_0 = 1 - p_c = \pi/4 \approx 0.785$ (при $R = a$), где требуется учет тем большего числа уравнений из систем (59) и (61), чем ближе концентрация c к c_0 .

Заметим, что сравнение «усеченных» (при

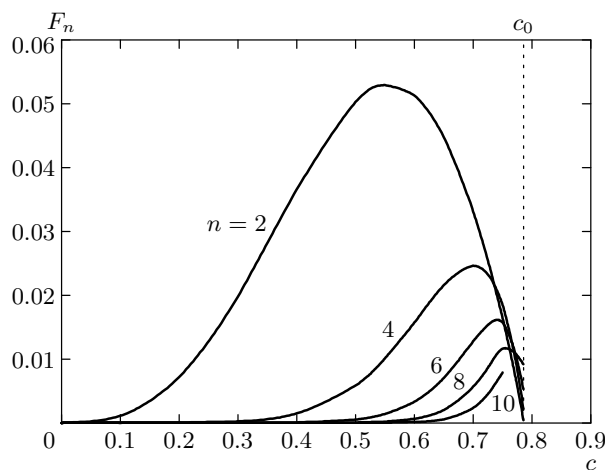


Рис. 9. Величины F_n ($n = 2, 4, 6, 8, 10$) как функции концентрации c

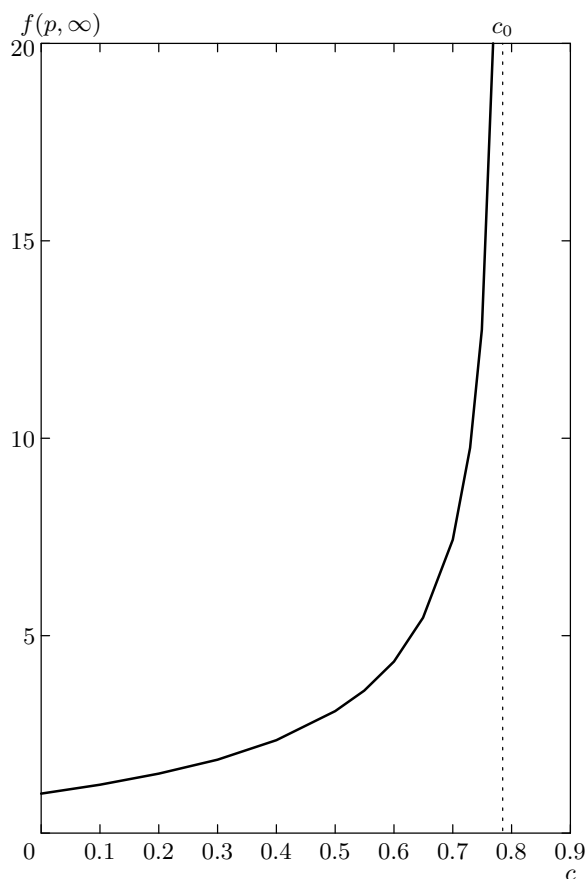


Рис. 10. Величина $f(p, \infty)$ как функция концентрации $c = 1 - p$

$n \leq 10$) формул (12), (21) и (28) с результатами численного изучения $f(p, \zeta)$ при $\zeta = h > 0$ показывает, что расхождение не превышает величины, равной примерно 1% при концентрации включений $c \leq 0.73$ для всех $0 \leq h \leq \infty$. Это позволяет использовать такое приближение для вычисления $f(p, h)$ в широком диапазоне изменения аргументов p и h . Более того, можно думать, что при указанных ограничениях на концентрацию такая формула будет удовлетворительно описывать функцию $f(p, \zeta)$ и при комплексных ζ (за исключением некоторой области вокруг точки $\zeta = -1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. T. G. Castner, N. K. Lee, G. S. Cieloszyk, and G. L. Salingier, Phys. Rev. Lett. **34**, 1627 (1975).
2. A. Zilberstein, B. Pannetier, and P. Merenda, Phys. Lett. **54A**, 145 (1975).
3. Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос, УФН **117**, 401 (1975).
4. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).
5. В. Е. Дубров, М. Е. Левинштейн, М. С. Шур, ЖЭТФ **70**, 2014 (1976).
6. А. П. Виноградов, А. М. Каримов, А. Т. Кунавин и др., ДАН СССР **275**, 590 (1984).
7. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **88**, 1664 (1985).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
9. D. J. Bergman, Phys. Rep. **43**, 377 (1978).
10. D. J. Bergman, Ann. Phys. **138**, 78 (1982).
11. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **89**, 1796 (1985).
12. Lord Rayleigh, Phil. Mag. **34**, 481 (1892).
13. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ **117**, 978 (2000).
14. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖТФ **71**, 106 (2001).
15. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
16. S. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. **45**, 574 (1973).
17. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **94**, 95 (1988).
18. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, Наука, Москва (1979).