

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ХАОТИЧЕСКИМ ВРЕМЕННЫМ РЕАЛИЗАЦИЯМ

В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров, А. С. Караваев, Б. П. Безручко*

*Саратовское отделение Института радиотехники и электроники Российской академии наук
410019, Саратов, Россия*

Поступила в редакцию 5 августа 2004 г.

Предложены методы восстановления модельных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом по временному ряду наблюдаемой для различных классов систем с запаздыванием. Методы опираются на закономерности расположения экстремумов во временных реализациях наблюдаемых колебаний и проецирование бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в специальным образом выбранные подпространства малой размерности. Эффективность методов продемонстрирована при реконструкции дифференциальных уравнений с запаздыванием по их хаотическим решениям, в том числе с добавленным шумом, а также при конструировании моделей реальных систем с запаздыванием по хаотическим временным реализациям.

PACS: 05.45.-a

1. ВВЕДЕНИЕ

Системы, поведение которых определяется не только текущим состоянием, но и состояниями в предыдущие моменты времени, широко распространены в природе [1]. Обычно они моделируются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Такие модели успешно применяются во многих разделах физики, биологии, физиологии и химии. Например, в динамике популяций запаздывание связано с тем, что особи участвуют в репродукции лишь после периода взросления [2], а в пространственно-развитых системах оно определяется тем, что сигналы распространяются с конечной скоростью и им требуется время на преодоление расстояний [3]. К классу систем с запаздыванием относятся, например, и ставшие эталонными уравнение Икеды [4], моделирующее пассивный оптический резонатор, уравнения Ланга–Кобаяши [5], описывающие полупроводниковые лазеры с оптической обратной связью, уравнение Маккея–Гласса [6] для процесса выработки организмом красных кровяных клеток и многие другие модели, используемые для описания различных процессов в живых организмах, от

метаболизма глюкозы до распространения инфекционных заболеваний [7].

В достаточно общем случае системы с запаздывающей обратной связью описываются уравнением следующего вида:

$$\varepsilon_n x^{(n)}(t) + \varepsilon_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + \varepsilon_1 \dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_k)), \quad (1)$$

где $x(t)$ — состояние системы в момент времени t , $x^{(n)}(t)$ — производная по времени порядка n , τ_1, \dots, τ_k — времена запаздывания, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — параметры, характеризующие инерционные свойства системы. Даже уравнения с запаздыванием первого порядка могут демонстрировать хаотические колебания очень высокой размерности [3, 8], что осложняет решение задачи реконструкции по временному ряду, вынуждая разрабатывать специальные приемы. Большинство из них основано на проецировании бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в подпространства малой размерности. При этом используются такие критерии качества реконструкции системы с запаздыванием, как минимальная ошибка прогноза построенной модели [9–11], минимальная величина информационной энтропии [12] или различные меры сложности

*E-mail: sbire@sgu.ru

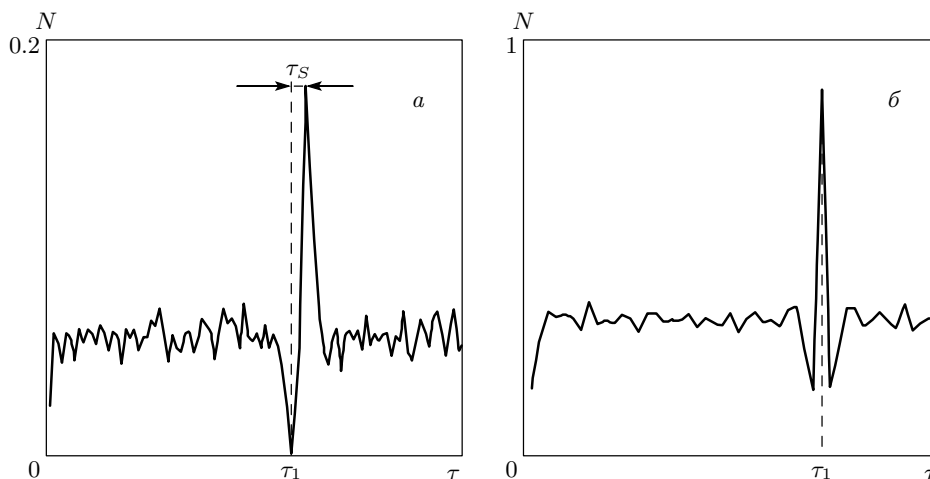


Рис. 1. Качественный вид зависимости числа N пар экстремумов хаотического временного ряда системы с запаздыванием, удаленных друг от друга на время τ , от величины τ при наличии инерционности в системе (а) и при ее отсутствии (б). $N(\tau)$ нормировано на общее число экстремумов во временном ряду

спроецированного временного ряда [13–16]. Известны также методы исследования систем с запаздыванием, основанные на применении регрессионного анализа [17–19].

В данной работе мы описываем оригинальную методику определения времени запаздывания, основанную на статистическом анализе временных интервалов между экстремумами временного ряда, и предлагаем на ее основе методы реконструкции для различных классов систем с запаздыванием. В частности, впервые предложены методы определения по временным реализациям параметров систем с запаздыванием высокого порядка и с несколькими временами задержки, а также впервые предложены методы восстановления кольцевых систем с запаздыванием по временным рядам различных наблюдаемых динамических переменных.

2. ОСОБЕННОСТИ ВРЕМЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Статистический анализ временных интервалов, разделяющих экстремумы во временных реализациях различных модельных и реальных систем с запаздыванием, позволяет выделить следующие общие закономерности. При наличии инерционности в системе зависимость числа N пар экстремумов временной реализации, удаленных друг от друга на время τ , от величины τ имеет четкий минимум при времени, соответствующем времени запаздывания систе-

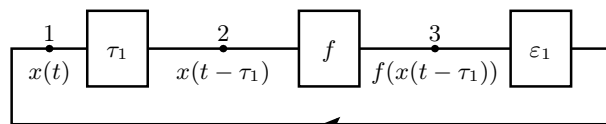


Рис. 2. Блок-схема кольцевой системы с запаздывающей обратной связью. Элементы, обозначенные τ_1 , f и ε_1 , обеспечивают, соответственно, задержку, нелинейное и инерционное преобразование колебаний в системе. Цифрами 1–3 отмечены точки, в которых может быть измерена динамическая переменная

мы, рис. 1а. Поясним эту качественную особенность графика $N(\tau)$ на примере одного из наиболее широко используемых дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_1)). \tag{2}$$

В общем случае уравнение (2) является математической моделью колебательной системы, известной в радиофизике как генератор с запаздывающей обратной связью [20], представляемой кольцом из трех идеализированных элементов: нелинейного, инерционного и задержки, рис. 2. При наличии инерционности ($\varepsilon_1 > 0$), что соответствует реальным ситуациям, экстремумы во временной реализации $x(t)$ близки к квадратичным, а следовательно, в экстремальных точках

$$\dot{x}(t) = 0, \quad \ddot{x}(t) \neq 0.$$

Действительно, условие

$$\dot{x}(t) = \ddot{x}(t) = 0$$

может выполняться в точке, которая либо является точкой перегиба или точкой экстремума, отличного от квадратичного, либо принадлежит временному интервалу, на котором динамическая переменная не меняется, а реализации этих условий препятствует инерционность. Можно показать, что в этом случае во временной реализации практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на время запаздывания τ_1 . Продифференцировав (2) по t , получим

$$\varepsilon_1 \ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) + \frac{df(x(t-\tau_1))}{dx(t-\tau_1)} \dot{x}(t-\tau_1). \quad (3)$$

Если при $\dot{x}(t) = 0$ в типичном случае $\ddot{x}(t) \neq 0$, то, как видно из уравнения (3), при $\varepsilon_1 \neq 0$ должно выполняться условие $\dot{x}(t-\tau_1) \neq 0$. Это означает, что на удалении τ_1 от квадратичного экстремума не должно быть другого экстремума, а следовательно, значение $N(\tau_1) \rightarrow 0$. При $\tau \neq \tau_1$ производные $\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(t-\tau)$ могут быть равны нулю одновременно, т. е. на удалении τ друг от друга экстремумы обнаружить можно.

Аналогичными свойствами обладают системы с запаздыванием более общего вида

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t-\tau_1)). \quad (4)$$

Продифференцировав уравнение (4) по времени, получим

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial F(x(t), x(t-\tau_1))}{\partial x(t)} \dot{x}(t) + \frac{\partial F(x(t), x(t-\tau_1))}{\partial x(t-\tau_1)} \dot{x}(t-\tau_1). \quad (5)$$

Откуда следует, что в типичном случае квадратичных экстремумов $\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(t-\tau_1)$ одновременно в нуль не обращаются: если $\dot{x}(t) = 0$, то $\dot{x}(t-\tau_1) \neq 0$.

В отсутствие инерционности ($\varepsilon_1 = 0$) дифференцирование уравнения (2) по t дает

$$\dot{x}(t) = \frac{df(x(t-\tau_1))}{dx(t-\tau_1)} \dot{x}(t-\tau_1). \quad (6)$$

Тогда, если $\dot{x}(t-\tau_1) = 0$, то и $\dot{x}(t) = 0$. Таким образом, при $\varepsilon_1 = 0$ за каждым экстремумом через время τ_1 во временной реализации $x(t)$ всегда следует экстремум. В результате в зависимости $N(\tau)$ при $\tau = \tau_1$ будет наблюдаться максимум, рис. 1б. При ограниченности полосы пропускания системы

($\varepsilon_1 > 0$) наиболее вероятная величина временного интервала между экстремумами во временной реализации $x(t)$ смещается от τ_1 в сторону больших значений, рис. 1а. Наблюдаемый эффект можно истолковать с помощью представлений кольцевой системы (рис. 2): инерционный элемент вносит в систему некоторую дополнительную задержку. В результате экстремумы наиболее часто располагаются на удалении $\tau_1 + \tau_s$ друг от друга. Например, численные исследования уравнения (2) с квадратичной нелинейной функцией

$$f(x) = \lambda - x^2$$

при больших значениях параметра нелинейности λ позволяют сделать оценку:

$$\tau_s \approx \varepsilon_1/2.$$

Присутствие шума во временных рядах приводит к появлению дополнительных экстремумов, не связанных с собственной динамикой системы с запаздыванием. Вследствие высокочастотного шума вероятность обнаружить пару экстремумов на удалении τ друг от друга в общем случае должна возрасти. В результате с увеличением уровня шума наблюдается увеличение среднего значения N . Вероятность обнаружить пару экстремумов на удалении τ_1 друг от друга тоже растет. Однако при не слишком больших уровнях шума эта вероятность все же меньше, чем вероятность встретить пару экстремумов на удалении $\tau \neq \tau_1$. То есть качественные особенности зависимости $N(\tau)$, обусловленные динамикой системы с запаздыванием, сохраняются при умеренном шуме.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим методику реконструкции систем с запаздыванием первого порядка на примере уравнения (2). Для нахождения времени запаздывания τ_1 нужно выделить экстремумы в исходном ряде, а затем для различных значений τ определить по всему временному ряду число N ситуаций, в которых точки, разделенные интервалом времени τ , одновременно являются экстремальными, и построить зависимость $N(\tau)$. Значению времени запаздывания τ_1 соответствует положение абсолютного минимума этой зависимости, расположенного рядом с абсолютным максимумом.

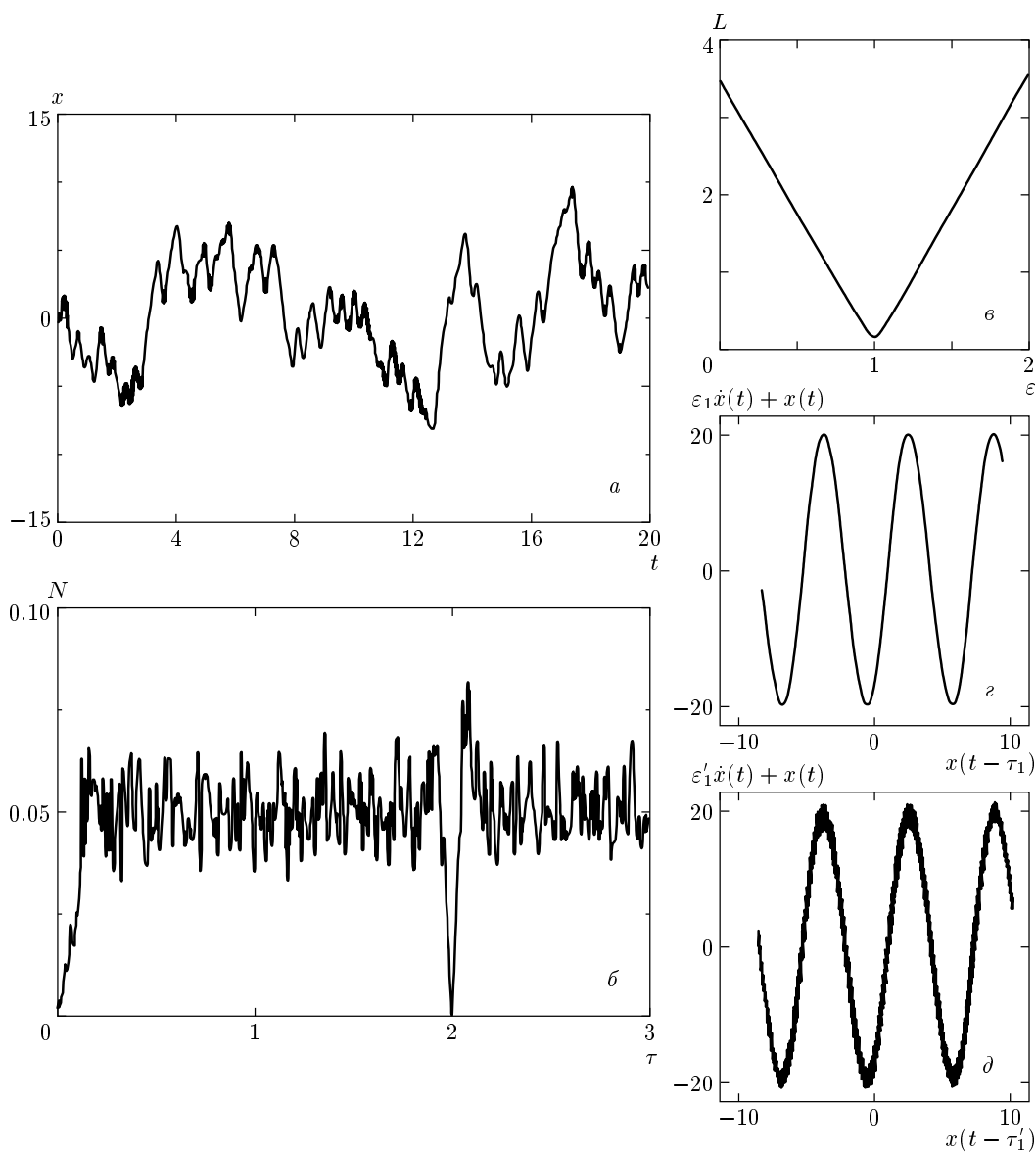


Рис. 3. *a* — Временная реализация уравнения Икеды (8). *б* — Число N пар экстремумов во временной реализации, удаленных друг от друга на время τ , в зависимости от величины τ . $N(\tau)$ нормировано на общее число экстремумов во временном ряду. $N_{min}(\tau) = N(2.00)$. *в* — Длина L линии, соединяющей упорядоченные по величине $x(t - \tau_1)$ точки на плоскости $(x(t - \tau_1), \varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t))$, в зависимости от ε . $L(\varepsilon)$ нормирована на число точек, $L_{min}(\varepsilon) = L(1.00)$. *г* — Восстановленная нелинейная функция. *д* — Восстановленная нелинейная функция при наличии 20% гауссова белого шума

Для определения по хаотической временной реализации параметра инерционности ε_1 и нелинейной функции f запишем уравнение (2) в виде

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) = f(x(t - \tau_1)). \tag{7}$$

Таким образом, если построить на плоскости множество точек с координатами $(x(t - \tau_1), \varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t))$, то оно воспроизведет функцию f . Поскольку зара-

нее величина ε_1 неизвестна, будем строить зависимости $\varepsilon \dot{x}(t) + x(t)$ от $x(t - \tau_1)$ для различных значений ε , добиваясь однозначной зависимости на плоскости $(x(t - \tau_1), \varepsilon \dot{x}(t) + x(t))$, которая возможна лишь при $\varepsilon = \varepsilon_1$. В качестве количественного критерия однозначности при таком поиске ε_1 будем использовать минимальную длину линии $L(\varepsilon)$, соединяющей точки на плоскости $(x(t - \tau_1), \varepsilon \dot{x}(t) + x(t))$, упорядо-

ченные по величине координаты $x(t - \tau_1)$. Минимум зависимости $L(\varepsilon)$ будет наблюдаться при $\varepsilon = \varepsilon_1$, а построенное при этом значение множество точек на плоскости $(x(t - \tau_1), \varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t))$ воспроизведет нелинейную функцию, которую при необходимости можно аппроксимировать. Отметим, что в отличие от других методов, использующих для восстановления нелинейной функции только экстремальные точки или точки, удовлетворяющие определенным условиям [13, 14], предлагаемый нами подход использует все точки временного ряда. Это позволяет по коротким временным рядам более полно восстанавливать нелинейную функцию даже в случаях слабо развитого хаоса.

Для иллюстрации работоспособности предлагаемого подхода мы реконструировали различные уравнения систем с запаздыванием вида (2) по временным рядам, полученным при их численном решении. В частности, метод применен к временным рядам уравнения Икеды [4], описывающего динамику пассивного оптического резонатора:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \mu \sin(x(t - \tau_1) - x_0). \quad (8)$$

Уравнение Икеды (8) относится к системам с запаздыванием, описываемым уравнением (2) с $\varepsilon_1 = 1$. Параметры $\mu = 20$, $\tau_1 = 2$, $x_0 = \pi/3$ соответствовали движению системы на хаотическом аттракторе высокой размерности [21]. На рис. 3а приведен фрагмент временного ряда. Масштабы таковы, что 200 точек ряда занимали временной интервал, равный времени задержки $\tau_1 = 2$. Весь ряд состоял из 20000 точек и содержал около 1100 экстремумов.

Подсчитав число N одновременных обращений в нуль $\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(t - \tau)$ для различных значений τ , перебираемых с шагом 0.01, построим зависимость $N(\tau)$, рис. 3б. Для оценки производной $\dot{x}(t)$ по временному ряду мы использовали локальную параболическую аппроксимацию. Абсолютный минимум $N(\tau)$ наблюдается при $\tau = \tau_1 = 2.00$, что в точности соответствует времени запаздывания. При построении зависимости $L(\varepsilon)$, рис. 3в, шаг изменения ε также выбирался равным 0.01. Минимум $L(\varepsilon)$ наблюдается точно при $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1.00$. На рис. 3г приведена восстановленная нелинейная функция. Она практически совпадает с истинной функцией уравнения (8). Заметим, что для построения $L(\varepsilon)$ и восстановления мультимодальной функции f мы использовали лишь 2000 точек временного ряда. Амплитуда синусоиды, рис. 3г, позволяет определить параметр μ , а значение функции при $x(t - \tau_1) = 0$ — найти параметр x_0 .

Для оценки возможностей метода при наличии возмущений мы применили его к рядам, полученным при добавлении к временному ряду уравнения (8) гауссова белого шума с нулевым средним значением. Даже при 20 %-м шуме положение абсолютного минимума $N(\tau)$ позволило нам точно восстановить время запаздывания $\tau_1' = 2.00$, а положение минимума $L(\varepsilon)$ — получить близкую оценку параметра инерционности $\varepsilon_1' = 0.98$. Восстановленная при найденных τ_1' и ε_1' нелинейная функция изображена на рис. 3д. Несмотря на достаточно высокий уровень шума и неточность определения ε_1 , качество восстановления нелинейной функции достаточно хорошее, существенно лучше, чем в работе [19] при тех же значениях параметров уравнения Икеды.

В качестве второго примера рассмотрим применение метода к временным рядам реального радиотехнического кольцевого генератора с запаздывающей обратной связью. При схематическом представлении этого генератора в виде рис. 2 запаздывание сигнала на время τ_1 обеспечивается линией задержки, роль нелинейного элемента выполняет усилитель с передаточной характеристикой f , а инерционность определяется фильтром, параметры которого задают величину ε_1 . В случае, когда инерционным элементом является низкочастотный RC -фильтр первого порядка, такой генератор описывается уравнением

$$RC\dot{V}(t) = -V(t) + f(V(t - \tau_1)), \quad (9)$$

где $V(t)$ и $V(t - \tau_1)$ — напряжения на входе и выходе линии задержки, R и C — сопротивление и емкость элементов фильтра. Уравнение (9) имеет вид (2) с $\varepsilon_1 = RC$.

При $\tau_1 = 31.7$ мс и $\varepsilon_1 = 1.007$ мс мы записывали сигнал $V(t)$, рис. 4а, с помощью аналого-цифрового преобразователя с частотой выборки $f_s = 4$ кГц. Так как время задержки τ_1 не кратно периоду выборки точек $T_s = 0.25$ мс, величина τ_1 не может быть определена абсолютно точно. При шаге изменения τ , равном T_s , абсолютный минимум $N(\tau)$ наблюдается при $\tau_1' = 31.75$ мс, рис. 4б. Построенная при τ_1' и шаге изменения ε , равном 0.025 мс, зависимость $L(\varepsilon)$ демонстрирует минимум при $\varepsilon_1' = 1.000$ мс, рис. 4в. На рис. 4г приведена восстановленная нелинейная функция, практически совпадающая с истинной передаточной характеристикой усилителя.

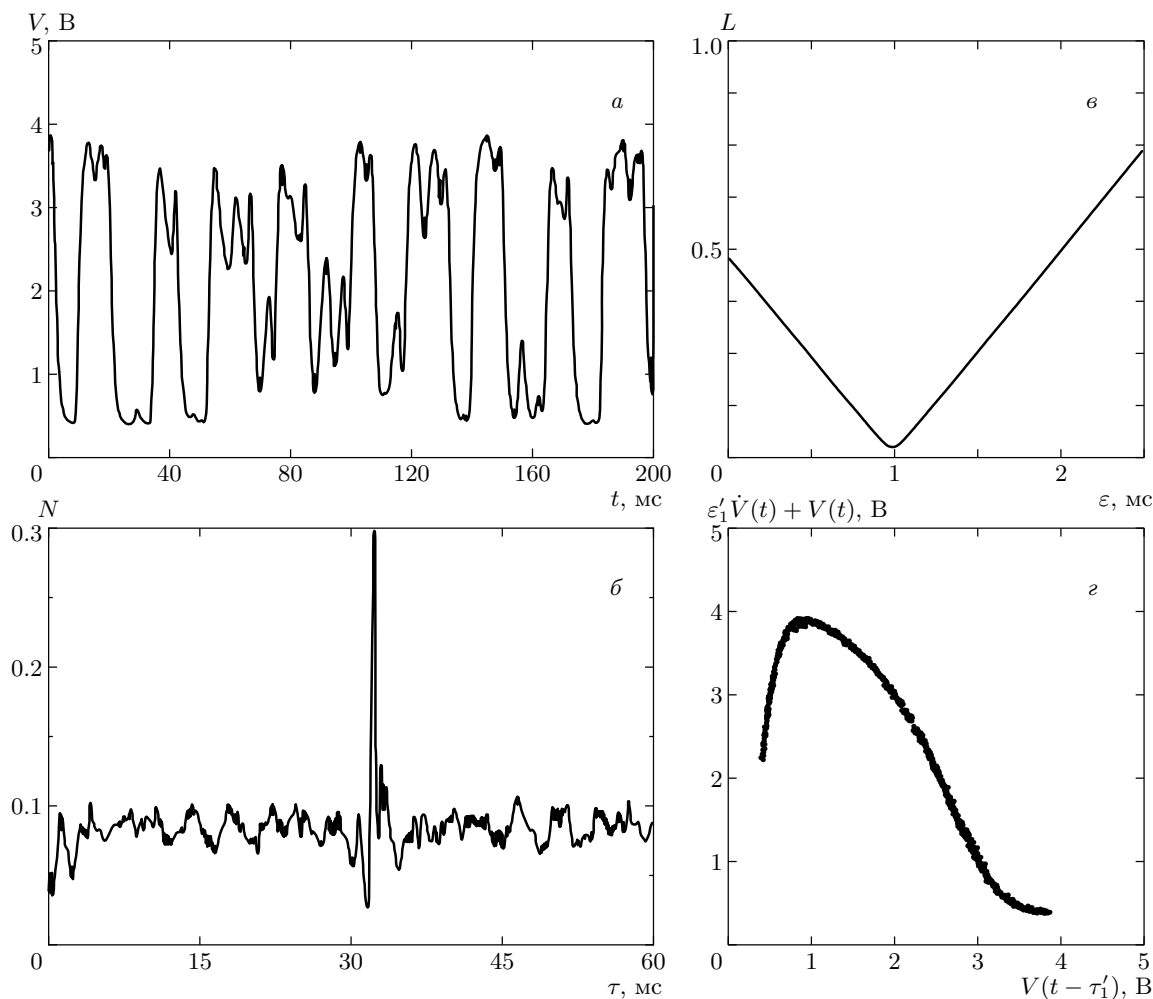


Рис. 4. *a* — Экспериментальная временная реализация генератора с запаздывающей обратной связью. *б* — Число N пар экстремумов во временной реализации на удалении τ друг от друга, нормированное на общее число экстремумов, $N_{min}(\tau) = N(31.75 \text{ мс})$. *в* — Зависимость $L(\varepsilon)$, нормированная на число точек, $L_{min}(\varepsilon) = L(1.000 \text{ мс})$. *г* — Восстановленная нелинейная функция

4. ОСОБЕННОСТИ РЕКОНСТРУКЦИИ КОЛЬЦЕВЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В кольцевых системах с запаздыванием, описываемых уравнением вида (2), динамическая переменная может быть измерена в различных точках системы, обозначенных на рис. 2 цифрами 1–3. Отметим, что такая возможность может предоставляться не всегда, например, из-за монолитности устройства или принципиальной неразделимости мест локализации свойств объекта. Случай, когда наблюдаемой величиной является динамическая переменная $x(t)$, измеренная в точке 1, рассмотрен нами в предыдущем разделе.

Когда наблюдаемой величиной является динами-

ческая переменная $x(t - \tau_1)$, измеренная в точке 2, рис. 2, для оценки параметров системы (2) можно использовать ту же процедуру, что и в описанном выше случае наблюдаемой $x(t)$, так как переменная $x(t - \tau_1)$ просто сдвинута во времени на τ_1 относительно $x(t)$. Например, при восстановлении кольцевого генератора с запаздывающей обратной связью, описываемого уравнением (9), по экспериментальному временному ряду напряжения на выходе линии задержки $V(t - \tau_1)$ мы получили результаты, качественно подобные представленным на рис. 4 для случая реконструкции системы по переменной $V(t)$.

Рассмотрим методику восстановления системы с запаздыванием вида (2) для третьего возможного случая, когда наблюдаемой переменной является ве-

личина $f(x(t - \tau_1))$, измеренная в точке 3, рис. 2. Во временной реализации переменной $f(x(t - \tau_1))$, так же как во временной реализации $x(t)$ систем с запаздыванием вида (2), практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на время запаздывания τ_1 , так как

$$\frac{df(x(t - \tau_1))}{dt} = \left(\frac{df(x(t - \tau_1))}{dx} \right) \dot{x}(t - \tau_1).$$

Тогда для нахождения τ_1 нужно для различных значений времени τ определить число N пар экстремумов во временной реализации $f(x(t - \tau_1))$, удаленных друг от друга на τ , и построить зависимость $N(\tau)$. Значению τ_1 соответствует положение абсолютного минимума $N(\tau)$.

Нелинейную функцию f можно восстановить, построив зависимость $f(x(t - \tau_1))$ от $x(t - \tau_1)$. Чтобы найти неизвестные нам значения $x(t - \tau_1)$, отфильтруем имеющийся хаотический временной ряд переменной $f(x(t - \tau_1))$ низкочастотным фильтром первого порядка с частотой среза $\nu_1 = 1/\varepsilon_1$ и сдвинем сигнал $x(t)$ на выходе фильтра на уже определенное нами время задержки τ_1 . Поскольку величина ε_1 и, соответственно, ν_1 заранее неизвестны, будем строить для различных значений частоты среза фильтра ν зависимости $f(x(t - \tau_1))$ от $u(t - \tau_1)$, где $u(t - \tau_1)$ — сигнал на выходе фильтра, сдвинутый на время τ_1 , добиваясь однозначной зависимости, которая возможна лишь при $\varepsilon = \varepsilon_1$. В качестве количественного критерия однозначности при таком поиске ε_1 мы вновь использовали минимальную длину линии $L(\varepsilon)$, соединяющей точки на плоскости $(u(t - \tau_1), f(x(t - \tau_1)))$, упорядоченные по величине абсциссы. Минимум $L(\varepsilon)$ будет наблюдаться при $\varepsilon = \varepsilon_1$, а построенная при этом зависимость $f(x(t - \tau_1))$ от $u(t - \tau_1)$ воспроизведет нелинейную функцию.

В качестве иллюстрации восстановим по временному ряду переменной $f(x(t - \tau_1))$ эталонное уравнение с запаздыванием первого порядка — уравнение Маккея–Гласса [6]

$$\dot{x}(t) = -bx(t) + \frac{ax(t - \tau_1)}{1 + x^c(t - \tau_1)}, \quad (10)$$

которое может быть приведено к виду (2) делением на b . Параметры системы (10)

$$a = 0.2, \quad b = 0.1, \quad c = 10, \quad \tau_1 = 300$$

соответствовали движению на хаотическом аттракторе высокой размерности [8].

Фрагмент временного ряда переменной $f(x(t - \tau_1))$ системы Маккея–Гласса приведен

на рис. 5а. Положение абсолютного минимума $N(\tau)$, рис. 5б, позволяет определить время запаздывания $\tau'_1 = 300$. Шаг изменения τ на рис. 5б равен единице. Минимум зависимости $L(\varepsilon)$, рис. 5в, наблюдается при $\varepsilon'_1 = 10.0$ ($\varepsilon_1 = 1/b = 10$). Шаг изменения ε на рис. 5в равен 0.1. Нелинейная функция, построенная при найденных τ'_1 и ε'_1 , рис. 5г, практически совпадает с истинной нелинейной функцией. Описанный метод позволяет с хорошей точностью восстанавливать параметры системы Маккея–Гласса при уровнях шума до 10 %.

5. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Рассмотренный на примере систем с запаздыванием вида (2) и (4) метод определения времени задержки, основанный на статистическом анализе временных интервалов между экстремумами временного ряда, может быть распространен на системы с запаздыванием более высокого порядка

$$\varepsilon_n x^{(n)}(t) + \varepsilon_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + \varepsilon_1 \dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau_1)). \quad (11)$$

Продифференцировав уравнение (11) по времени, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_n x^{(n+1)}(t) + \varepsilon_{n-1} x^{(n)}(t) + \dots + \varepsilon_1 \ddot{x}(t) &= \\ &= \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_1))}{\partial x(t)} \dot{x}(t) + \\ &+ \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_1))}{\partial x(t - \tau_1)} \dot{x}(t - \tau_1). \end{aligned} \quad (12)$$

При $\dot{x}(t) = 0$ условие $\dot{x}(t - \tau_1) \neq 0$ должно выполняться в тех случаях, когда левая часть уравнения (12) отлична от нуля. Вероятность обращения левой части уравнения (12) в нуль в общем случае очень мала, и поэтому график зависимости $N(\tau)$ качественно должен иметь такой же вид, как в случае дифференциальных уравнений с запаздыванием первого порядка вида (2) и (4).

Предложенный нами метод оценки параметра инерционности и нелинейной функции, использующий проецирование бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в специальном образом выбранные двумерные пространства, также может быть применен к системам с запаздыванием более высокого порядка, чем (2). Например, если динамика системы с запаздыванием описывается

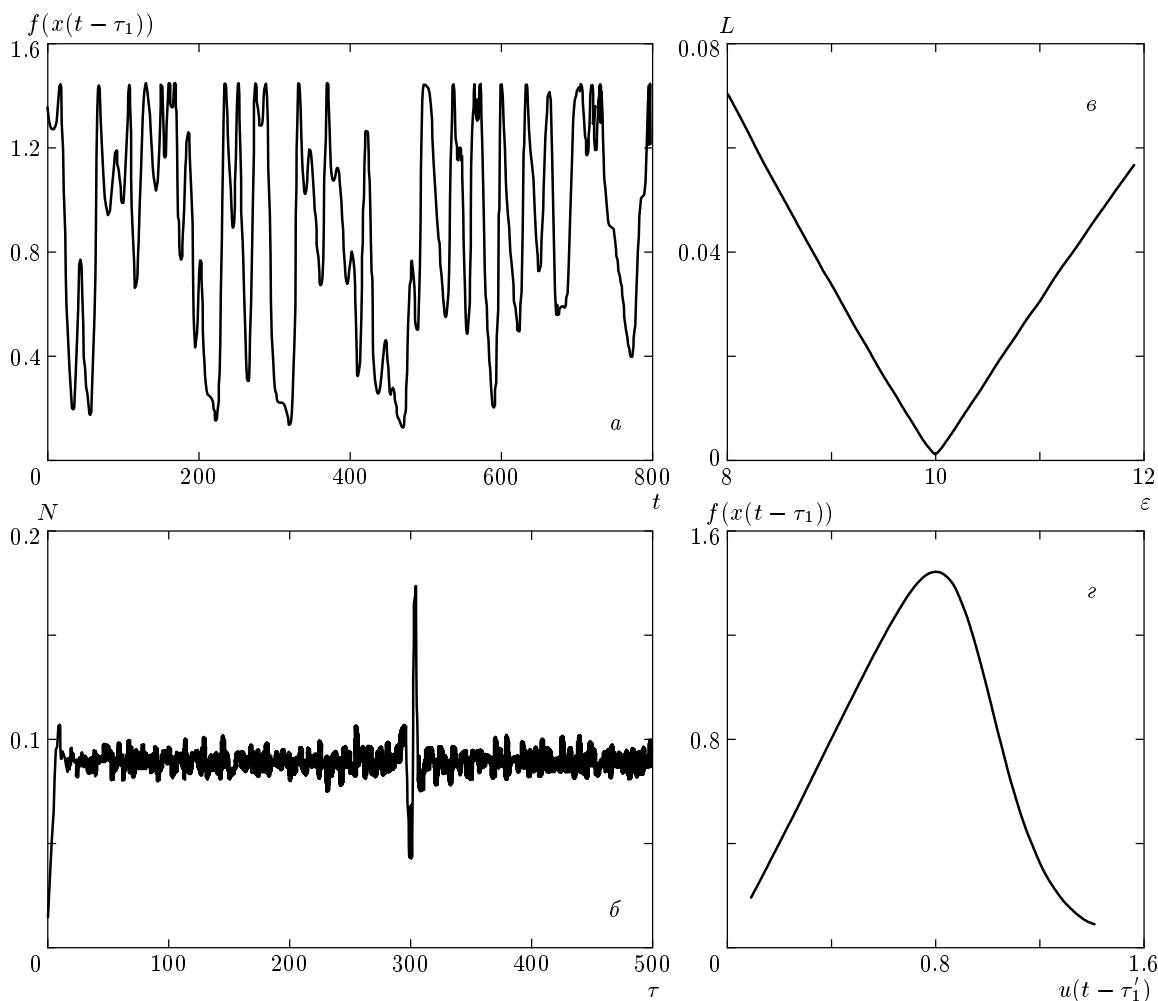


Рис. 5. *a* — Временная реализация переменной $f(x(t-\tau_1))$ системы Маккея–Гласса. *б* — Число N пар экстремумов в реализации $f(x(t-\tau_1))$ на удалении τ друг от друга, нормированное на общее число экстремумов, $N_{min}(\tau) = N(300)$. *в* — Длина L линии, соединяющей упорядоченные по величине $u(t-\tau'_1)$ точки на плоскости $(u(t-\tau'_1), f(x(t-\tau_1)))$, в зависимости от ε . $L(\varepsilon)$ нормирована на число точек, $L_{min}(\varepsilon) = L(10.0)$. *г* — Восстановленная нелинейная функция

ся дифференциальным уравнением с запаздыванием второго порядка

$$\varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_1)), \quad (13)$$

нелинейную функцию можно восстановить, построив на плоскости множество точек с координатами

$$(x(t - \tau_1), \varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t)).$$

Так как параметры ε_1 и ε_2 априори неизвестны, необходимо строить зависимость

$$\hat{\varepsilon}_2 \ddot{x}(t) + \hat{\varepsilon}_1 \dot{x}(t) + x(t)$$

от $x(t - \tau_1)$ при различных параметрах $\hat{\varepsilon}_1$ и $\hat{\varepsilon}_2$, добиваясь однозначности, которая возможна только при

$\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1, \hat{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2$. При таком поиске ε_1 и ε_2 мы рассчитывали длину линии $L(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$, соединяющей упорядоченные по величине координаты $x(t - \tau_1)$ точки на плоскости

$$(x(t - \tau_1), \hat{\varepsilon}_2 \ddot{x}(t) + \hat{\varepsilon}_1 \dot{x}(t) + x(t)).$$

Минимум $L(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$ будет наблюдаться при $\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1, \hat{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2$, а построенное при этих значениях множество точек на плоскости воспроизведет нелинейную функцию. При наличии шумов качество восстановления ухудшается по сравнению со случаем систем с запаздыванием первого порядка, так как процедура требует численного вычисления второй производной.

Проиллюстрируем такой подход на примере

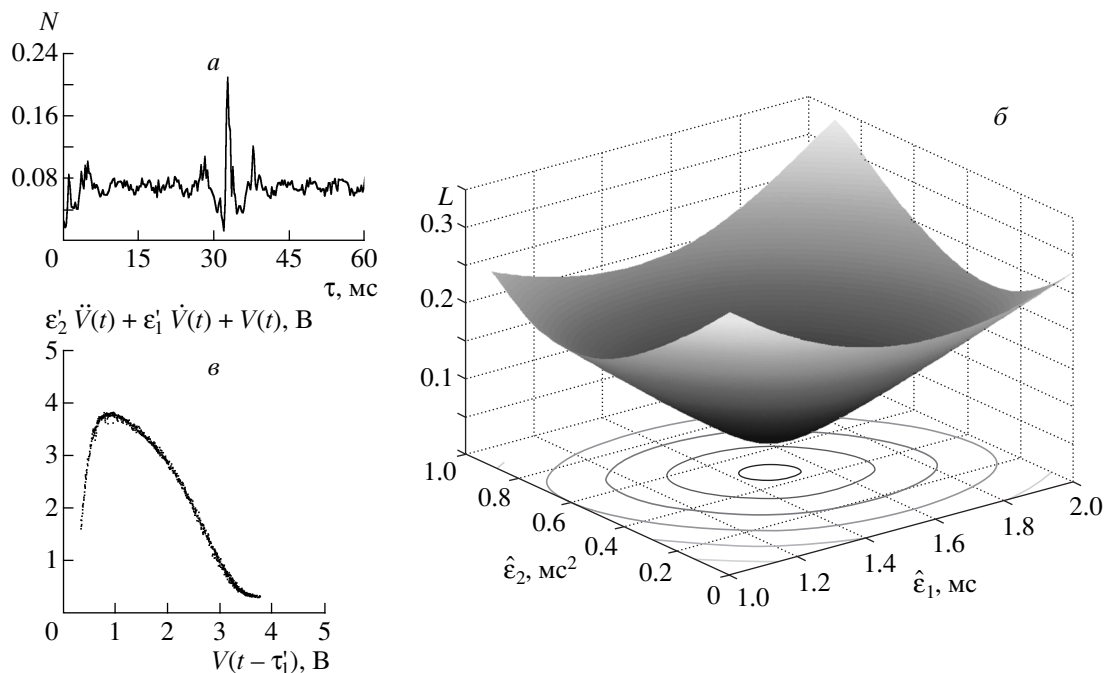


Рис. 6. Восстановление модельного уравнения генератора с запаздывающей обратной связью с двухзвенным фильтром. *a* — Число N пар экстремумов экспериментального временного ряда генератора на удалении τ друг от друга, нормированное на общее число экстремумов, $N_{min}(\tau) = N(31.75 \text{ мс})$. *б* — Зависимость $L(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2)$, нормированная на число точек, $L_{min}(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2) = L(1.48 \text{ мс}, 0.48 \text{ мс}^2)$. *в* — Восстановленная нелинейная функция

экспериментального временного ряда генератора с запаздывающей обратной связью, содержащего два последовательно соединенных низкочастотных RC -фильтра. Динамика такого генератора описывается уравнением (13), где $x(t)$ и $x(t - \tau_1)$ — напряжения на входе и выходе линии задержки,

$$\epsilon_1 = R_1 C_1 + R_2 C_2, \quad \epsilon_2 = R_1 C_1 R_2 C_2,$$

R_1 и C_1 , R_2 и C_2 — сопротивление и емкость элементов соответственно первого и второго фильтров.

С помощью АЦП мы записывали временной ряд напряжения на входе линии задержки с частотой выборки 4 кГц при $\tau_1 = 31.7 \text{ мс}$, $R_1 C_1 = 1.007 \text{ мс}$ и $R_2 C_2 = 0.479 \text{ мс}$ ($\epsilon_1 = 1.486 \text{ мс}$ и $\epsilon_2 = 0.482 \text{ мс}^2$). Абсолютный минимум зависимости $N(\tau)$ наблюдается при $\tau'_1 = 31.75 \text{ мс}$, рис. 6*a*. График $L(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2)$, рис. 6*б*, построенный при шаге изменения $\hat{\epsilon}_1$, равном 0.01 мс, и шаге изменения $\hat{\epsilon}_2$, равном 0.01 мс², демонстрирует минимум при $\epsilon'_1 = 1.48 \text{ мс}$ и $\epsilon'_2 = 0.48 \text{ мс}^2$. Эти значения позволяют получить следующие оценки параметров фильтров: $(R_1 C_1)' = 1.00 \text{ мс}$ и $(R_2 C_2)' = 0.48 \text{ мс}$. Восстановленная нелинейная функция, рис. 6*в*, хорошо совпадает с истинной передаточной характеристикой нелинейного элемента.

6. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ДВУМЯ ВРЕМЕНАМИ ЗАДЕРЖКИ

Рассмотрим систему с запаздыванием с двумя различными временами задержки τ_1 и τ_2 :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2)). \quad (14)$$

Дифференцирование уравнения (14) по t дает

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial F}{\partial x(t)} \dot{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial x(t - \tau_1)} \dot{x}(t - \tau_1) + \frac{\partial F}{\partial x(t - \tau_2)} \dot{x}(t - \tau_2). \quad (15)$$

Так же, как и временная реализация уравнения (4), реализация $x(t)$ уравнения (14) имеет преимущественно квадратичные экстремумы, следовательно, $\dot{x}(t) = 0$ и $\ddot{x}(t) \neq 0$ в экстремальных точках. Отсюда следует, что если $\dot{x}(t) = 0$, то должно выполняться условие

$$a\dot{x}(t - \tau_1) + b\dot{x}(t - \tau_2) \neq 0, \quad (16)$$

где

$$a = \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2))}{\partial x(t - \tau_1)},$$

$$b = \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2))}{\partial x(t - \tau_2)}$$

Для выполнения условия (16) необходимо, чтобы $\dot{x}(t - \tau_1) \neq 0$ или/и $\dot{x}(t - \tau_2) \neq 0$. Это означает, что производные $\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(t - \tau_1)$ или $\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(t - \tau_2)$ одновременно в нуль не обращаются, т. е. на удалении τ_1 или τ_2 от квадратичного экстремума не должно быть другого экстремума. В результате число экстремумов, разделенных интервалами времени τ_1 и τ_2 , будет существенно меньше, чем число экстремумов, разделенных другими значениями времени τ , следовательно, график $N(\tau)$ будет демонстрировать ярко выраженные минимумы при $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$.

Метод реконструкции по временному ряду остальных характеристик системы с двумя временами задержки проиллюстрируем на примере системы с запаздыванием вида

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) = -x(t) + f_1(x(t - \tau_1)) + f_2(x(t - \tau_2)). \quad (17)$$

В результате дифференцирования уравнения (17) по t получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) + \frac{\partial f_1(x(t - \tau_1))}{\partial x(t - \tau_1)} \dot{x}(t - \tau_1) + \\ + \frac{\partial f_2(x(t - \tau_2))}{\partial x(t - \tau_2)} \dot{x}(t - \tau_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Из уравнения (18) следует, что если выполняется условие

$$\dot{x}(t - \tau_1) = \dot{x}(t - \tau_2) = 0, \quad (19)$$

то

$$\varepsilon_1 \ddot{x}(t) = -\dot{x}(t).$$

Откуда получаем формулу для параметра инерционности

$$\varepsilon_1 = -\frac{\dot{x}(t)}{\ddot{x}(t)}. \quad (20)$$

Таким образом, параметр ε_1 можно оценить, если найти точки реализации $x(t)$, для которых выполняется условие (19), определить в этих точках первую и вторую производные, вычислить значения ε_1 по формуле (20) и найти их среднее.

Для восстановления нелинейных функций f_1 и f_2 спроецируем траекторию, задаваемую уравнением (17), в трехмерное пространство

$$(x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t)).$$

При этом множество точек, посещаемых системой в этом пространстве, располагается на двумерной поверхности, так как согласно (17)

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) = f_1(x(t - \tau_1)) + f_2(x(t - \tau_2)). \quad (21)$$

Сечение этой поверхности плоскостью $x(t - \tau_2) = \text{const}$ позволяет с точностью до константы определить вид нелинейной функции f_1 , так как точки сечения удовлетворяют уравнению

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) = f_1(x(t - \tau_1)) + c_1,$$

где

$$c_1 = f_2(x(t - \tau_2))$$

при выбранном постоянном значении $x(t - \tau_2)$. Аналогично можно восстановить с точностью до константы нелинейную функцию f_2 , построив сечение $x(t - \tau_1) = \text{const}$, точки которого описываются уравнением

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) = f_2(x(t - \tau_2)) + c_2,$$

где

$$c_2 = f_1(x(t - \tau_1))$$

при фиксированном $x(t - \tau_1)$.

Продемонстрируем работоспособность метода при реконструкции по временному ряду обобщенного уравнения Маккея–Гласса, получаемого введением второго времени запаздывания:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = -bx(t) + \frac{a_1 x(t - \tau_1)}{2(1 + x^c(t - \tau_1))} + \\ + \frac{a_2 x(t - \tau_2)}{2(1 + x^c(t - \tau_2))}. \end{aligned} \quad (22)$$

Поделив обе части уравнения (22) на b , можно привести его к виду (17) с $\varepsilon_1 = 1/b$. На рис. 7а приведена зависимость $N(\tau)$ при $a_1 = 0.3$, $a_2 = 0.2$, $b = 0.1$, $c = 10$, $\tau_1 = 70$, $\tau_2 = 300$. Положение первых двух наиболее ярко выраженных минимумов $N(\tau)$ позволяет восстановить времена запаздывания $\tau'_1 = 69$ и $\tau'_2 = 300$. Еще один характерный минимум $N(\tau)$ наблюдается вблизи $\tau = \tau_1 + \tau_2$. При восстановленных параметрах τ'_1 и τ'_2 мы получили среднее значение параметра инерционности $\varepsilon'_1 = 9.4$ ($\varepsilon_1 = 1/b = 10$).

Для уменьшения погрешности определения ε_1 по формуле (20) мы исключали из рассмотрения точки с очень малой величиной $\ddot{x}(t)$.

Спроецировав временной ряд уравнения (22) в трехмерное пространство

$$(x(t - \tau'_1), x(t - \tau'_2), \varepsilon'_1 \dot{x}(t) + x(t))$$

и построив сечения этого пространства плоскостями $x(t - \tau'_2) = \text{const}$ и $x(t - \tau'_1) = \text{const}$, мы получили в этих сечениях восстановленные с точностью до константы нелинейные функции f_1 и f_2 . Однако из-за погрешностей определения параметров τ_1 и ε_1 нелинейные функции восстановились недостаточно точно.

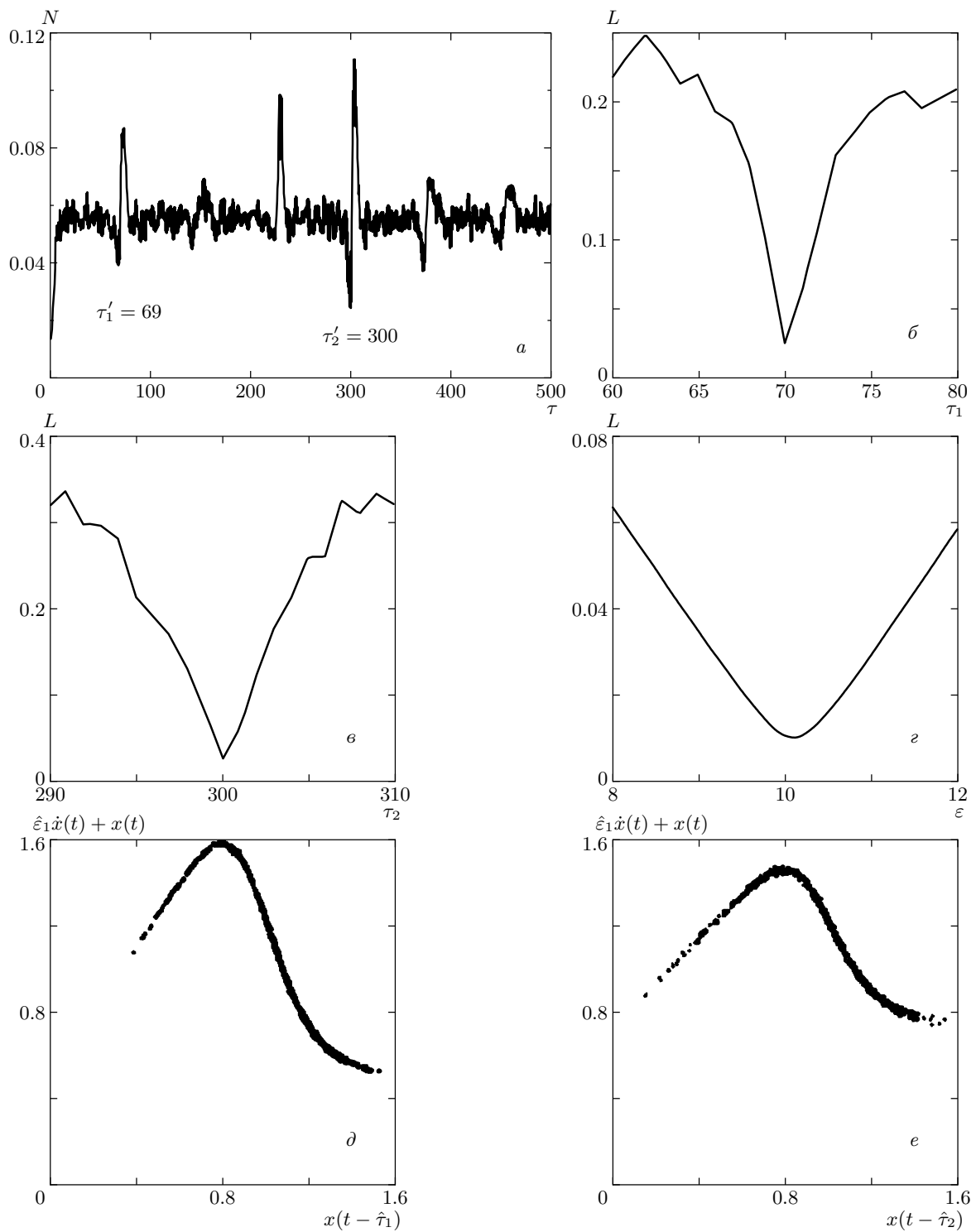


Рис. 7. *a* — Число N пар экстремумов временного ряда уравнения (22), удаленных друг от друга на время τ , в зависимости от величины τ . $N(\tau)$ нормировано на общее число экстремумов во временном ряду. *б* — Длина L линии, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки сечения $x(t - \hat{\tau}_2) = 1$ в зависимости от τ_1 , $L_{min}(\tau_1) = L(70)$. *в* — Длина L линии, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки сечения $x(t - \hat{\tau}_1) = 1$ в зависимости от τ_2 , $L_{min}(\tau_2) = L(300)$. *г* — Длина L линии, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки сечения $x(t - \hat{\tau}_2) = 1$ в зависимости от ε , $L_{min}(\varepsilon) = L(10.1)$. *д* — Нелинейная функция f_1 , восстановленная с точностью до $\hat{c}_1 = f_2(x(t - \hat{\tau}_2))$, где $x(t - \hat{\tau}_2) = 1$. *е* — Нелинейная функция f_2 , восстановленная с точностью до $\hat{c}_2 = f_1(x(t - \hat{\tau}_1))$, где $x(t - \hat{\tau}_1) = 1$.

Для достижения более высокого качества реконструкции модельного уравнения можно использовать следующую процедуру уточнения параметров. Меняя величину τ_1 в малой окрестности $\tau_1' = 69$, мы проецировали временной ряд в различные пространства вложения

$$(x(t - \tau_1), x(t - \tau_2'), \varepsilon_1' \dot{x}(t) + x(t))$$

и строили их сечения плоскостью $x(t - \tau_2') = \text{const}$, отыскивая сечение, точки которого расположены вдоль узкой линии, демонстрируя близкую к однозначной зависимость. В качестве количественного критерия однозначности использовалась минимальная длина линии $L(\tau_1)$, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки сечения. График $L(\tau_1)$ демонстрирует минимум при $\hat{\tau}_1 = 70$, рис. 7б. Аналогичным образом проведено уточнение времени запаздывания τ_2 . Временной ряд проецировался в пространства

$$(x(t - \hat{\tau}_1), x(t - \tau_2), \varepsilon_1' \dot{x}(t) + x(t))$$

при различных значениях τ_2 , взятых из малой окрестности $\tau_2' = 300$, и строились их сечения $x(t - \hat{\tau}_1) = \text{const}$. Обратим внимание, что при этом при построении сечения используется уже уточненное время запаздывания $\hat{\tau}_1 = 70$. Минимум $L(\tau_2)$ наблюдается при $\hat{\tau}_2 = 300$, рис. 7в. В общем случае, если $\hat{\tau}_2 \neq \tau_2'$, процедура уточнения τ_1 повторяется вновь при сечении пространств вложения плоскостью $x(t - \hat{\tau}_2) = \text{const}$ с уточненным значением $\hat{\tau}_2$. Последовательное уточнение параметров τ_1 и τ_2 продолжается до тех пор, пока они не перестают изменяться. При небольших отклонениях начальных приближений τ_1' и τ_2' от истинных значений процедура является сходящейся и позволяет точно определить оба времени запаздывания.

После уточнения значений времен запаздывания следует провести уточнение параметра инерционности. Его новая оценка $\hat{\varepsilon}_1$ может быть получена описанным выше способом по формуле (20). Однако более надежной является оценка, при которой используются все точки одного из сечений. Такую оценку можно получить, проецируя временной ряд, теперь уже при вариации параметра ε в окрестности ε_1' , в пространства

$$(x(t - \hat{\tau}_1), x(t - \hat{\tau}_2), \varepsilon \dot{x}(t) + x(t))$$

и находя в сечении $x(t - \hat{\tau}_1) = \text{const}$ или $x(t - \hat{\tau}_2) = \text{const}$ зависимость, наиболее близкую к однозначной. Зависимость $L(\varepsilon)$, нормированная так же, как

$L(\tau_1)$ и $L(\tau_2)$ на число точек в сечении, демонстрирует минимум при $\hat{\varepsilon}_1 = 10.1$, рис. 7г. Отметим, что предложенная методика последовательного уточнения параметров имеет на несколько порядков более высокое быстродействие, чем метод одновременного перебора трех параметров ε_1 , τ_1 и τ_2 пространства вложения

$$(x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t)).$$

Результаты восстановления нелинейных функций системы с двумя временами запаздывания (22) при уточненных параметрах $\hat{\varepsilon}_1 = 10.1$, $\hat{\tau}_1 = 70$, $\hat{\tau}_2 = 300$, представлены на рис. 7д, е. Сечения двумерной поверхности, описываемой уравнением (21), позволяют восстановить с точностью до константы вид нелинейных функций f_1 и f_2 . Для оценки возможностей метода при наличии возмущений мы применили его к зашумленным данным и обнаружили, что метод позволяет с хорошей точностью восстановить исследуемую систему при уровнях шума порядка 10%.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для различных классов систем с запаздыванием нами предложены методы их реконструкции по хаотическому временному ряду, основанные на статистическом анализе временных интервалов между экстремумами ряда и проецировании бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в специальный образом выбранные подпространства малой размерности. Методы могут быть применены к системам различной природы, если они имеют одинаковую структуру модельных уравнений, и позволяют восстановить времена запаздывания, параметры инерционности и нелинейные функции систем даже в присутствии шума достаточно высокого уровня. Метод определения времени запаздывания использует только операции сравнения и сложения, не применяя ни сортировку точек, ни вычисление ошибки аппроксимации или каких-либо мер сложности движения, а поэтому не требует больших вычислительных затрат. Предложенные для систем с одним временем запаздывания способы определения параметров инерционности и восстановления нелинейной функции используют все точки временного ряда, что позволяет успешно применять метод к коротким временным рядам даже в режимах слаборазвитого хаоса.

Показано, что предложенные методы позволяют восстановить модельные уравнения кольцевых

систем с запаздыванием по временным рядам различных наблюдаемых динамических переменных, измеренных в различных точках системы. Работоспособность методов проиллюстрирована на примере временных рядов, полученных в численном эксперименте, в том числе при добавлении шума, и на примере временных рядов реальной радиофизической системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-17593), CRDF (Award № REC-006) и INTAS (грант № 03-55-920).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. K. Hale and S. M. V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, New York (1993).
2. Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, Boston (1993).
3. С. П. Кузнецов, Изв. ВУЗов. Радиофизика **25**, 1410 (1982).
4. K. Ikeda, Opt. Commun. **30**, 257 (1979).
5. R. Lang and K. Kobayashi, IEEE J. Quant. Electron. **16**, 347 (1980).
6. M. C. Mackey and L. Glass, Science **197**, 287 (1977).
7. G. A. Bocharov and F. A. Rihan, J. Comp. Appl. Math. **125**, 183 (2000).
8. J. D. Farmer, Physica D **4**, 366 (1982).
9. R. Hegger, M. J. Bünner, H. Kantz, and A. Giaquinta, Phys. Rev. Lett. **81**, 558 (1998).
10. C. Zhou and C.-H. Lai, Phys. Rev. E. **60**, 320 (1999).
11. V. S. Udaltsov, J.-P. Goedgebuer, L. Larger et al., Phys. Lett. A **308**, 54 (2003).
12. Y.-C. Tian and F. Gao, Physica D **108**, 113 (1997).
13. M. J. Bünner, M. Popp, Th. Meyer et al., Phys. Lett. A **211**, 345 (1996).
14. M. J. Bünner, M. Popp, Th. Meyer et al., Phys. Rev. E **54**, 3082 (1996).
15. M. J. Bünner, Th. Meyer, A. Kittel, and J. Parisi, Phys. Rev. E **56**, 5083 (1997).
16. M. J. Bünner, M. Ciofini, A. Giaquinta et al., Eur. Phys. J. D **10**, 165 (2000).
17. H. Voss and J. Kurths, Phys. Lett. A **234**, 336 (1997).
18. S. P. Ellner, B. E. Kendall, S. N. Wood et al., Physica D **110**, 182 (1997).
19. H. Voss and J. Kurths, Chaos, Solitons and Fractals **10**, 805 (1999).
20. А. С. Дмитриев, В. Я. Кислов, *Стохастические колебания в радиофизике и электронике*, Наука, Москва (1989).
21. K. Ikeda and K. Matsumoto, Physica D **29**, 223 (1987).