

# ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В ПЛАЗМЕ С АНИЗОТРОПНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЭЛЕКТРОНОВ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*Л. И. Меньшиков\**

*Российский научный центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 июня 2004 г.

Обсуждается фазовый переход, возникающий в плазме с существенно различными температурами электронов при движении поперек ( $T_{\perp}$ ) и вдоль ( $T_{\parallel}$ ) магнитного поля:  $T_{\perp}/T_{\parallel} \gg 1$ . При понижении  $T_{\parallel}$  или при увеличении магнитного поля происходит резкое сжатие дебаевского облака, окружающего ион. Объясняется эффект превышения значения сечения радиационной электрон-ионной рекомбинации над теоретическими значениями, наблюдаемый в накопительных кольцах с системами электронного охлаждения — кулерами. Обсуждается роль фазового перехода в явлении кристаллизации ионных пучков.

PACS: 52.35.-g, 52.25.Xz

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Вследствие эффекта кинематического охлаждения ускоряемого пучка [1–4] распределение электронов в кулере сильно сплющено в продольном направлении

$$f(v) = G(v_{\perp})g(v_{\parallel}), \quad \int f(v)d^3v = 1, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} G(v_{\perp}) &= \frac{1}{2\pi\Delta_{\perp}^2} \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{2\Delta_{\perp}^2}\right), \\ g(v_{\parallel}) &= (\Delta_{\parallel}\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{v_{\parallel}^2}{2\Delta_{\parallel}^2}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\Delta_{\perp} = \sqrt{T_{\perp}/m}, \quad \Delta_{\parallel} = \sqrt{T_{\parallel}/m},$$

$v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$  — поперечная и продольная к направлению магнитного поля проекции скорости электрона. Два электрона, стартующие с катода, нагретого до температуры  $T_0 \approx 0.1$  эВ, в типичном случае имеют начальные продольные скорости  $v_0 \approx \sqrt{T_0/m}$ , различающиеся на  $\Delta v_0 \sim v_0$ . При ускорении разность их энергий сохраняется, поэтому, набрав скорость  $v$

и энергию  $E = mv^2/2$ , они будут иметь разность продольных скоростей

$$\Delta v_{\parallel} \sim v_0 \Delta v_0 / v.$$

Из этих оценок с учетом взаимодействия между электронами заключаем, что в ускоренном пучке электронов [2–4]

$$T_{\perp} \sim T_0, \quad T_{\parallel} \sim T_1 + \bar{U}. \quad (3)$$

Здесь  $T_{\perp}$  и  $T_{\parallel}$  — температуры электронов при движении соответственно поперек и вдоль направления магнитного поля,  $T_1 = T_0^2/E$ ,  $\bar{U} = e^2/\bar{R}$  — средняя энергия кулоновского отталкивания между электронами пучка ( $\bar{R} = n^{-1/3}$  — среднее расстояние между электронами при их концентрации  $n$ ). В качестве примера приведем опыты [5] с полностью «ободранными» ионами урана  $U^{+Z_0}$  ( $Z_0 = 92$ ), в которых

$$\begin{aligned} n &\approx 10^6 \text{ см}^{-3}, \quad T_{\perp} \approx 0.12 \text{ эВ}, \quad E \approx 160 \text{ кэВ}, \\ T_1 &\approx 10^{-3} \text{ К}, \quad \bar{U} \approx 0.15 \text{ К}, \quad H \approx 1000 \text{ Гс}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом,

$$T_1 \ll \bar{U}, \quad T_{\parallel} \sim \bar{U} \approx 0.15 \text{ К}, \quad T_{\perp} \approx 1300 \text{ К},$$

откуда

$$T_{\perp}/T_{\parallel} \gg 1. \quad (5)$$

\*E-mail: ieronimovich@mtu-net.ru

Плазма электронов в опыте [5] является идеальной по отношению к поперечному движению ( $\xi_{\perp} = T_{\perp}/\bar{U} \sim 10^4$ ) и неидеальной по отношению к продольному:

$$\xi_{\parallel} = T_{\parallel}/\bar{U} \sim 1. \quad (6)$$

Согласно теории [6–11], учитывающей как коллективные, так и столкновительные процессы, для всех применяемых в настоящее время кулеров время релаксации электронного распределения к равновесному превышает величину порядка 1 мкс. За это время электроны пролетают в лабораторной системе расстояние более 200 м. Поскольку длина кулера  $L_c \approx 3$  м, функцию распределения (1) можно считать неизменной.

## 2. ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ЭКРАНИРОВКИ

Фурье-компонента плотности заряда дебаевского облака, образующегося вокруг относительно неподвижного иона, равна [12–14]

$$\Delta\rho(\mathbf{k}) = eZ_0 \left( \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega = 0)} - 1 \right), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} m \sum \int d^3v J_s^2(k_{\perp} r_H) \times \\ \times f(\mathbf{v}) \left( \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{T_{\parallel}} + \frac{s\omega_H}{T_{\perp}} \right) (\omega + i \cdot 0 - s\omega_H - k_{\parallel} v_{\parallel})^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

— продольная часть тензора  $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  диэлектрической проницаемости плазмы:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) q_{\alpha} q_{\beta};$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}$$

— плазменная частота,

$$\omega_H = \frac{eH}{mc}$$

— ларморовская частота,

$$r_H = v_{\perp}/\omega_H$$

— ларморовский радиус,  $J_s$  — функция Бесселя,  $q_{\alpha} = k_{\alpha}/k$ . В выражении (8) осуществляется суммирование по индексу  $s$  в пределах  $(-\infty, \infty)$ . При  $H \rightarrow 0$  это суммирование можно заменить интегрированием (проще, однако, с самого начала использовать формулу для  $\varepsilon$  при  $H = 0$ , см., например, [15]), что дает

$$\Delta\rho(\mathbf{k}) = -\frac{eZ_0}{1 + k_{\parallel}^2 R_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 R_{\perp}^2}, \quad (9)$$

$$\Delta\rho(\mathbf{r}) = -\frac{eZ_0}{4\pi R_{\parallel} R_{\perp}^2} \frac{e^{-L}}{L}, \quad (10)$$

где

$$L = \sqrt{(z/R_{\parallel})^2 + (r_{\perp}/R_{\perp})^2},$$

$$R_{\parallel} = \sqrt{\frac{T_{\parallel}}{4\pi n e^2}}, \quad R_{\perp} = \sqrt{\frac{T_{\perp}}{4\pi n e^2}},$$

ось  $z$  направлена вдоль направления магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Таким образом, при  $H = 0$  дебаевское облако представляет собой сильно сплюснутый диск с размерами

$$l_{\parallel} \sim R_{\parallel} \ll l_{\perp} \sim R_{\perp}.$$

Теперь рассмотрим случай сильных магнитных полей (критерий будет дан ниже), заранее предполагая, что размер дебаевского облака в этом случае мал:

$$r_D \ll \bar{r}_H, \quad (11)$$

что подтвердится в ходе вычислений и будет также обосновано из физических соображений. Поскольку

$$k_{\perp} \sim |k_{\parallel}| \sim \frac{1}{r_D} \ll \frac{1}{\bar{r}_H}, \quad (12)$$

для функции Бесселя применимо асимптотическое выражение

$$J_s^2(y) \approx \frac{\theta(y-s)}{\pi\sqrt{y^2-s^2}}, \quad (13)$$

где квадрат быстроосциллирующего косинуса был заменен на его среднее значение, равное 1/2. Из свойств четности подынтегрального выражения (8) по отношению к заменам

$$s \rightarrow -s, \quad v_{\parallel} \rightarrow -v_{\parallel}$$

следует, что сингулярный множитель можно заменить на его главное значение:

$$\frac{1}{i \cdot 0 - s\omega_H - k_{\parallel} v_{\parallel}} \rightarrow P \left( -\frac{1}{s\omega_H + k_{\parallel} v_{\parallel}} \right). \quad (14)$$

Из выражений (12)–(14) заключаем, что при условии

$$\beta = \frac{|k_{\parallel} v_{\parallel}|}{\omega_H} \sim \frac{\Delta_{\parallel}}{r_D \omega_H} \ll 1 \quad (15)$$

основной вклад в (8) дает слагаемое с  $s = 0$ :

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \approx 1 + \frac{q_0^3}{k^2 k_{\perp}}, \quad (16)$$

$$q_0 = \left( \sqrt{2\pi} R_{\parallel}^2 \bar{r}_H \right)^{-1/3}, \quad (17)$$

$$\Delta\rho(\mathbf{k}) = -\frac{eZ_0}{1 + k^2 k_{\perp} / q_0^3}, \quad (18)$$

$$\Delta\rho(\mathbf{r}) = -eZ_0 q_0^3 (4\pi)^{-1} \times \\ \times \int_0^{\infty} dk_{\perp} J_0(k_{\perp} r_{\perp}) e(-k|z|), \quad (19)$$

где

$$k = \sqrt{k_{\perp}^2 + q_0^3 / k_{\perp}}.$$

Из выражения (19) устанавливаем характерные размеры дебаевского облака в продольном и поперечном направлениях:

$$l_{\perp} \sim l_{\parallel} \sim r_D = \frac{1}{q_0} \sim (R_{\parallel}^2 \bar{r}_H)^{1/3}. \quad (20)$$

Из выражения (20) следует, что условие (15) эквивалентно условию

$$\bar{r}_H \ll R_{\parallel} \sqrt{\frac{\Delta_{\perp}}{\Delta_{\parallel}}}. \quad (21)$$

В противоположном случае

$$\bar{r}_H \gg R_{\perp} \sqrt{\frac{\Delta_{\perp}}{\Delta_{\parallel}}} \quad (22)$$

суммирование по  $s$  в формуле (8) можно заменить интегрированием по  $ds$ , что эквивалентно пределу  $\omega_H \rightarrow 0$  ( $H \rightarrow 0$ ). Отсюда ясно, что формулы (9), (10) справедливы при условии (22), а не при кажущемся на первый взгляд очевидным условии  $\bar{r}_H \gg R_{\perp}$ , что является особенностью случая (5).

Из выражения (20) следует, что исходное предположение (11) выполняется при условии

$$R_{\parallel} \ll \bar{r}_H \quad (23)$$

вместе с неравенством (21), определяющим величины магнитного поля, при которых справедлива формула (20). При этом всегда выполняется неравенство

$$R_{\parallel} \ll r_D \ll \bar{r}_H. \quad (24)$$

Теперь рассмотрим предельно сильные магнитные поля:

$$\bar{r}_H \ll R_{\parallel} \quad (25)$$

(этот случай называют случаем «замагниченных» электронов [2, 3]). В этом пределе ларморовский радиус можно считать равным нулю, поэтому электроны движутся только вдоль силовых линий магнитного поля, подобно бусинкам малого радиуса, нанизанным на натянутые струны. Такое движение характеризуется температурой  $T_{\parallel}$ , поэтому в случае (25) дебаевское облако является сферически-симметричным,

$$l_{\perp} = l_{\parallel} = r_D = R_{\parallel}, \quad (26)$$

и описывается формулой (10), в которой следует заменить  $R_{\perp}$  на  $R_{\parallel}$ . Действительно, согласно (25), оценка (12) переписывается теперь в виде

$$k_{\perp} \sim |k_{\parallel}| \sim \frac{1}{r_D} \ll \frac{1}{\bar{r}_H},$$

поэтому в выражении (8)  $k_{\perp} r_H \ll 1$ , значит, можно пренебречь слагаемыми с  $s \neq 0$  и положить

$$J_0(k_{\perp} r_H) \approx 1.$$

Получаем

$$\varepsilon(\mathbf{k}, 0) \approx 1 + \frac{1}{k^2 R_{\parallel}^2}, \quad \Delta\rho(\mathbf{k}) = -\frac{eZ_0}{1 + k^2 R_{\parallel}^2}, \quad (27)$$

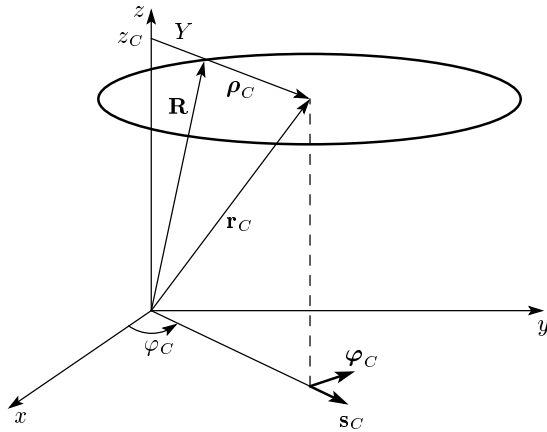
что и подтверждает сказанное выше по поводу формулы (26).

Условие (25) называют «замагниченностью» электронов по отношению к коллективным взаимодействиям с ионами. Его следует отличать от условия «замагниченности» по отношению к парным взаимодействиям  $\bar{r}_H \ll \bar{R}$ , когда при парном столкновении с ионом электрон проявляет себя как точечная бусинка, движущаяся только вдоль силовой линии магнитного поля.

### 3. МОДЕЛЬ ЭКРАНИРОВКИ ЭЛЕКТРОННЫМИ КОЛЬЦАМИ

Исходные соотношения (7), (8) и все результаты предыдущего раздела получаются из уравнений Максвелла и линеаризованного уравнения Власова [12–15]. В плазме кулеров происходят, однако, явления, описание которых требует выхода за рамки линейного приближения.

Из соотношения (5) ясно, что по быстрому ларморовскому вращению электронов можно провести усреднение. Тогда каждый электрон будет представлять собой кольцо радиуса  $r_H$  с линейной плотно-



**Рис. 1.** Координаты, задающие положение электронного кольца относительно иона, расположенного в начале координат:  $\mathbf{r}_C$  — радиус-вектор центра кольца,  $\varphi_C$  и  $\mathbf{s}_C$  — единичные векторы,  $\mathbf{s}_C \parallel \boldsymbol{\rho}_C$ ,  $\varphi_C \perp \mathbf{s}_C$

стью заряда  $e/2\pi r_H$ . Потенциальная энергия кольца в поле иона равна (см. рис. 1)

$$U(\mathbf{r}_C) \approx \begin{cases} -\frac{Z_0 e^2}{2\pi r_H} \ln\left(\frac{r_H}{R}\right), & R \ll r_H, \\ -\frac{Z_0 e^2}{r_C}, & r_C \gg r_H, \end{cases} \quad (28)$$

где  $R$  — расстояние от иона до ближайшей точки кольца. При  $R \ll r_H$  формула (28) описывает взаимодействие иона с прямолинейной заряженной нитью.

Кольцо совершает одномерное движение вдоль оси  $z$ , характеризующееся температурой  $T_{\parallel}$ , поэтому концентрация центров колец дается формулой Больцмана

$$n_C(\mathbf{r}_C) = n \exp\left(-\frac{U(\mathbf{r}_C)}{T_{\parallel}}\right). \quad (29)$$

При  $R \ll r_H$  имеем

$$n_C(\mathbf{r}_C) = n \left(\frac{r_H}{R}\right)^{\gamma}, \quad (30)$$

где

$$\gamma = \frac{Z_0 e^2}{\pi r_H T_{\parallel}}. \quad (31)$$

Аналогия, следующая из сочетания экспоненты и логарифма в формулах (29), (28), а также из степенной зависимости (30), наводит на мысль о возможности фазового перехода, математически (но

не физически) напоминающего переход Березинского–Костерлица–Таулесса (БКТ) [16,17]. Прежде чем переходить к рассмотрению этого эффекта, обнесуем модель электронных колец. Для этого покажем, что в линейном приближении, когда

$$\begin{aligned} n_C(\mathbf{r}_C) &\approx n + \Delta n_C(\mathbf{r}_C), \\ \Delta n_C(\mathbf{r}_C) &= -\frac{nU(\mathbf{r}_C)}{T_{\parallel}}, \end{aligned} \quad (32)$$

модель колец воспроизводит результаты линейной теории из предыдущего раздела. На качественном уровне это ясно из следующих оценок. Кольца группируются вблизи иона: их центры находятся приблизительно на расстоянии  $r_H$  от него, а ближайшие края колец — на расстояниях  $R \ll r_H$ , что дает вблизи иона сгусток плотности электронов с размером порядка  $r_D \ll r_H$  (дебаевское облако). Согласно формулам (32), (28),

$$\Delta n_C \sim \frac{Z_0 e^2 n}{r_H T_{\parallel}}.$$

В дебаевской сфере находится доля заряда кольца порядка  $r_D/r_H$ . Центры колец сгруппированы в кольцевой области, заключенной между коаксиальными цилиндрами с радиусами

$$\rho_1 \approx r_H, \quad \rho_2 \approx r_H + r_D$$

и толщиной порядка  $r_D$  в направлении оси  $z$ . Объем этой области

$$V_C \sim r_H r_D^2,$$

следовательно, число избыточных электронов  $\Delta N_e$  в дебаевском облаке порядка

$$\Delta N_e \sim V_C \Delta n_C \left(\frac{r_D}{r_H}\right). \quad (33)$$

Соотношение (20) следует отсюда и из условия экранировки

$$\Delta N_e = Z_0. \quad (34)$$

При параллельном переносе кольца векторы смещения всех его точек одинаковы, поэтому плотность заряда кольца в произвольной точке  $\mathbf{r}$  зависит лишь от разности  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_C$ :

$$\rho_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_C) = \rho_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_C).$$

Плотность избыточного заряда, созданного всеми кольцами в точке  $r$ , равна

$$\Delta \rho(\mathbf{r}) = \int \Delta n_C(\mathbf{r}_C) \rho_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) d^3 r_C. \quad (35)$$

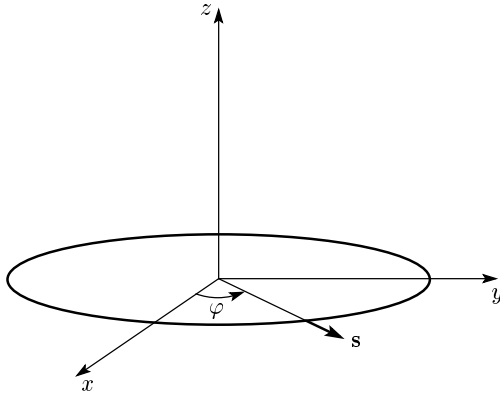


Рис. 2. Пояснение к расчету формфактора заряда электронного кольца

Здесь  $\Delta n_C(\mathbf{r}_C)$  определена в (32), а потенциальная энергия кольца равна

$$U(\mathbf{r}_C) = \int \phi(\mathbf{r}) \rho_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) d^3r, \quad (36)$$

где  $\phi(\mathbf{r})$  — суммарный электрический потенциал в точке  $r$ . Из уравнения Пуассона

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = -4\pi Z_0 e \delta(\mathbf{r}) - 4\pi \Delta \rho(\mathbf{r})$$

получаем

$$k^2 \phi(\mathbf{k}) = 4\pi Z_0 e + 4\pi \Delta \rho(\mathbf{k}). \quad (37)$$

Из соотношений (35), (36) и (32) следует формула

$$\begin{aligned} \Delta \rho(\mathbf{k}) = \Delta n_C(\mathbf{k}) \rho_0(\mathbf{k}) &= -\frac{n \rho_0(\mathbf{k}) U(\mathbf{k})}{T_{\parallel}} = \\ &= -\frac{n |\rho_0(\mathbf{k})|^2 \phi(\mathbf{k})}{T_{\parallel}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Для кольца, расположенного в плоскости  $xy$  (см. рис. 2) имеем

$$\rho_0(\mathbf{r}) = -e \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \delta(\mathbf{r} - r_H \mathbf{s}),$$

где  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\rho}/\rho$ , поэтому формфактор заряда кольца равен

$$\begin{aligned} \rho_0(\mathbf{k}) &= \int d^3r \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \rho_0(\mathbf{r}) = \\ &= -e \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \exp(-i\mathbf{k} \cdot r_H \mathbf{s}) = -e J_0(k_{\perp} r_H). \end{aligned} \quad (39)$$

При  $k_{\perp} r_H \gg 1$  после усреднения по распределению (1) и по осцилляциям квадрата косинуса (ср. с разд. 2) из соотношений (39), (38) и (37) получаем формулу (18), что доказывает применимость модели электронных колец при магнитных полях, соответствующих ларморовскому радиусу (23), (21) (в случае (25) замагниченных электронов применимость модели колец уже была обоснована в конце разд. 2). Физическая причина справедливости модели колец ясна из соотношения (5): согласно (28), характерная энергия взаимодействия кольца мала по сравнению с кинетической энергией электрона:

$$T_{\perp} \gg |U| \sim Z_0 e^2 / r_H.$$

#### 4. ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД

Напомним простой способ оценки дебаевского радиуса  $r_D$  в равновесной плазме с температурой  $T$ . Из линеаризованной формулы Больцмана для избыточной плотности электронов имеем

$$\Delta n \approx n(e\phi/T).$$

Внутри дебаевского облака при  $r \sim r_D$

$$\phi \sim \phi_0 = \frac{Z_0 e}{r} \sim \frac{Z_0 e}{r_D}, \quad (40)$$

поэтому аналогично (33) получаем

$$\Delta N_e \sim \Delta n r_D^3 \sim Z_0 n e^2 r_D^2 / T.$$

Отсюда и из соотношения (34) следует обычная формула:

$$r_D \sim \sqrt{T/ne^2}.$$

Согласно соотношению (40), при оценке размера дебаевского облака вместо истинной потенциальной энергии электрона  $U = -e\phi$  можно использовать потенциальную энергию взаимодействия иона с электроном без учета экранировки. В нашем случае это означает, что можно пользоваться формулой (30) модели колец. Она позволит выяснить характер физических явлений вне области применимости рассмотренного в предыдущих разделах линейного приближения. Для простоты сначала рассмотрим случай, когда ларморовский радиус  $r_H$  одинаков для всех электронов:

$$r_H = \text{const}. \quad (41)$$

Плотность заряда электронов вблизи иона равна (рис. 1)

$$\rho(\mathbf{r}) \sim n \int d^3r_C \left(\frac{r_H}{R}\right)^{\gamma} \rho_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_C). \quad (42)$$

В области

$$r \ll r_H \quad (43)$$

обод кольца можно считать прямолинейным, поэтому

$$\rho_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_C) \approx -e(2\pi r_H)^{-1} \delta(z-z_C) \delta[(\mathbf{r}-\mathbf{R}) \cdot \mathbf{s}_C], \quad (44)$$

где  $\mathbf{s}_C = \boldsymbol{\rho}_C/\rho_C$ . Поскольку выполнено условие (43), имеем

$$\rho_C \approx r_H,$$

$$d^3 r_C \approx dz_C \rho_C d\rho_C d\phi_C \approx r_H dz_C dY d\phi_C,$$

где вместо  $\rho_C$  введена новая координата  $Y = \rho_C - r_H$ , принимающая значения в интервале  $(-\infty, \infty)$ . Вследствие аксиальной симметрии

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r_\perp, z), \quad r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2},$$

поэтому при интегрировании в (42) можно полагать, что  $\mathbf{r} = (r_\perp, 0, z)$ , т. е. что вектор  $\mathbf{r}$  лежит в плоскости  $xz$ :

$$\begin{aligned} \rho(r_\perp, z) &\approx -en \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dY \left[ \frac{r_H}{\sqrt{Y^2 + z^2}} \right]^\gamma \times \\ &\times \delta(r_\perp \cos \phi_C - Y) = \\ &= -en \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_C}{2\pi} \left[ \frac{r_H^2}{r_\perp^2 \cos^2 \phi_C + z^2} \right]^{\gamma/2}. \quad (45) \end{aligned}$$

Рассматривая предельные случаи этого выражения, получаем

$$\rho(r_\perp, z) \approx \begin{cases} -\frac{en}{r_\perp} r_H^\gamma |z|^{-\gamma+1}, & |z| \ll r_\perp, \\ -\frac{en}{|z|} r_H^\gamma |z|^{-\gamma+1}, & |z| \gg r_\perp. \end{cases} \quad (46)$$

Интерполяционная формула, охватывающая оба предельных случая, имеет вид

$$\rho(r_\perp, z) \approx -\frac{en}{r} r_H^\gamma (z^2 + z_1^2)^{(-\gamma+1)/2}. \quad (47)$$

Здесь  $z_1$  — величина  $R$ , при которой приближение электронных колец нарушается. Для равновесного дебаевского облака

$$|z_1| \approx R_T = \frac{Z_0 e^2}{T_\perp} \quad (48)$$

(ниже будет показано, что в кулерах дебаевские облака не успевают полностью прийти в равновесие,

поэтому реальные значения продольного размера облака  $z_1$  значительно больше  $R_T$ ). Теперь рассчитаем заряд дебаевского облака:

$$\begin{aligned} Q_D &\approx \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) \approx \\ &\approx -en \int r_\perp dr_\perp dz r^{-1} r_H^\gamma (z^2 + z_1^2)^{(-\gamma+1)/2} \approx \\ &\approx en r_H^\gamma l_\perp J, \quad (49) \end{aligned}$$

$$J = \int_0^\infty dz (z^2 + z_1^2)^{(-\gamma+1)/2}. \quad (50)$$

Здесь  $l_\perp$  — поперечный размер облака, выражение для которого будет приведено ниже.

Из соотношений (49), (50) заключаем, что имеется критическое значение параметра  $\gamma$ :

$$\gamma_C = 2. \quad (51)$$

При

$$\gamma < \gamma_C \quad (52)$$

основной вклад в интеграл  $J$  дают большие  $|z|$ . Физически это означает, что в случае (52) применима линейная теория (см. разд. 2). При

$$\gamma > \gamma_C \quad (53)$$

основной вклад в  $J$  вносят малые  $|z|$ :

$$|z| \sim z_1. \quad (54)$$

Таким образом, при снижении температуры  $T_\parallel$  до величины

$$T_C = \frac{Z_0 e^2}{2\pi r_H} \quad (55)$$

дебаевское облако сжимается (см. таблицу). То же самое происходит, если при  $T_\parallel = \text{const}$  увеличивать магнитное поле до величины  $H_C$ , при которой ларморовский радиус уменьшается до значения

$$r_{cr} = Z_0 e^2 / 2\pi T_\parallel.$$

При сжатии дебаевского облака меняется корреляционная энергия плазмы (см., например, [18]), поэтому это фазовый переход первого рода, подобный кристаллизации жидкости. Это верно, однако, в случае (41). В действительности  $r_H$  различен для разных электронов, поэтому фазовый переход «растягивается» на целый температурный интервал

Размеры дебаевского облака при различных значениях температуры  $T_{\parallel}$  для промежуточных (условия (21), (23)) и сильных (условия (25)) магнитных полей

Величина $r_H$	Обозначение размера облака	$T_{\parallel} > T_C$	$T_{\parallel} < T_C$
(21), (23)	$l_{\perp}$	$(R_{\parallel}^2 r_H)^{1/3}$	$(R_{\parallel}^2 r_H)^{1/3}$
	$l_{\parallel}$	$(R_{\parallel}^2 r_H)^{1/3}$	$R_T$
(25)	$l_{\perp}$	$R_{\parallel}$	$r_H$
	$l_{\parallel}$	$R_{\parallel}$	$R_T$

$\Delta t_{\parallel} \sim T_C$ , т. е. он подобен кристаллизации жидкости в аморфное состояние. Имеется и другая причина для этого. При понижении  $T_{\parallel}$  до  $T_C$  параметр  $\gamma$  снижается до  $\gamma_C = 2$ . При дальнейшем понижении  $T_{\parallel}$  число электронов в облаке, окружающем ион, увеличивается, в результате чего суммарный заряд  $Z$  иона вместе с облаком уменьшается, но при этом все время выполняется условие

$$\gamma = \frac{Ze^2}{\pi r_H T_{\parallel}} = 2,$$

что позволяет установить закон уменьшения суммарного заряда:

$$Z = Z_0 \left( \frac{T_{\parallel}}{T_C} \right).$$

Поскольку в плазме заряд экранируется, суммарный заряд дебаевского облака равен по модулю и противоположен по знаку заряду иона:

$$Q_D = -Z_0 e. \quad (56)$$

В равновесной идеальной плазме с температурой  $T$  в дебаевской сфере находится число электронов

$$N_D \approx nr_D^3 \approx \xi^{3/2},$$

где

$$\xi = T/\bar{U} = T\bar{R}/e^2 \gg 1$$

— параметр идеальности плазмы. Под действием поля иона в дебаевской сфере возникает небольшой избыток электронов, так что суммарный заряд облака становится равным величине (56). Для рассматриваемой в данной работе неравновесной анизотропной плазмы (5) и линейной области, которая имеет место при  $T_{\parallel} > T_C$ , это видно из формул линейного приближения (18), (27) и соотношения  $Q_D = \Delta\rho(\mathbf{k} = 0)$ .

При  $T_{\parallel} < T_C$  дебаевское облако состоит из двух частей: сгустка вблизи иона с малым продольным размером (54) и зарядом

$$-(Z_0 - Z)e = -eZ_0 \left( 1 - \frac{T_{\parallel}}{T_C} \right)$$

и внешней части облака размером порядка  $r_H$  и зарядом

$$-eZ_0(T_{\parallel}/T_C).$$

В случае (21), (23) в создании дебаевского облака принимает участие число электронов порядка числа центров колец, помещающихся в области объемом порядка  $V_C \approx r_H r_D^2$  (см. вывод формулы (33)):

$$N_D \approx V_C n \approx \left( \frac{r_H}{r_D} \right) \left( \frac{T_{\parallel}}{T_C} \right) Z_0 \approx \approx \left( \frac{r_H}{R_{\parallel}} \right)^{2/3} \left( \frac{t_{\parallel}}{T_C} \right) Z_0 \gg Z_0, \quad (57)$$

т. е. такое облако представляет собой коллективное образование. Оно образуется быстро, за характерное для коллективных взаимодействий время  $\tau_p \approx 1/\omega_p \approx 3$  нс.

В случае замагниченных электронов (25) в линейной области ( $T_{\parallel} > T_C$ ) имеем

$$N_D \approx nR_{\parallel}^3 \approx \xi^{3/2}, \quad (58)$$

поэтому, согласно (6), в кулере дебаевское облако представляет собой по существу собственную оболочку иона, составленную из слабосвязанных электронных колец. Относительные флуктуации формы и размеров этого облака порядка единицы. При  $T_{\parallel} > T_C$  оно образуется за время порядка  $\tau_p \approx 1/\omega_p$ . Кинетика образования облака при  $T_{\parallel} > T_C$  требует детального исследования, что выходит за рамки данной статьи. Грубая оценка времени образования дается в следующем разделе. В случае (25)

температура фазового перехода существенно отличается от (55). Действительно, согласно соотношениям (49), (50), число электронов в сжавшейся оболочке иона

$$N_D \approx nr_H^3 (\gamma - 2)^{-1} \left( \frac{r_H}{R_T} \right)^{\gamma-2}. \quad (59)$$

Отсюда и из условия экранировки  $N_D = Z_0$  (нейтральность иона вместе с оболочкой) получаем

$$\gamma_C \approx 2 + \frac{\ln(Z_0/nr_H^3)}{\ln(r_H/R_T)}. \quad (60)$$

Обсуждаемый здесь фазовый переход возникает при условии (5), когда распределение электронов резко анизотропно, неравновесно, поэтому, возможно, более точно его следовало бы назвать образованием неравновесной диссипативной структуры.

## 5. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАМИ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Прямые экспериментальные подтверждения рассматриваемого в данной статье эффекта отсутствуют, но имеются косвенные: эффект превышения значения наблюдаемой скорости радиационной рекомбинации электронов на голых ионах над теоретическими значениями [5, 19–21]. Увеличение рекомбинации легко объяснить, если предположить, что при понижении  $T_{\parallel}$  или уменьшении скорости иона относительно электронного облака, имеющего температуру  $T_{\parallel} < T_C$ , вблизи иона возникает облако с повышенной плотностью электронов. Оценки по формулам (55), (60) согласуются с наблюдаемыми величинами энергий движения электронов относительно ионов, при которых начинается рост сечения рекомбинации. Так, для ионов урана в плазме с параметрами (4), (5) из соотношения (60) следует  $T_C = 0.001$  эВ, что согласуется с результатами работы [5]. Для полностью ободранных ионов углерода при  $T_{\perp} = 0.008$  эВ (что достигается в результате адиабатического поперечного расширения пучка электронов при его выводе в область слабого магнитного поля),  $H = 400$  Гс и  $n = 10^7$  см<sup>-3</sup> получаем  $T_C = 5 \cdot 10^5$  эВ, что согласуется с результатами работы [21]. Теперь обсудим возможность объяснения эффекта кристаллизации пучков [22–26] на основе фазового перехода.

В работах [22, 23] на протонном накопителе НАП-М было обнаружено, что при снижении числа ионов  $N_i$  в кольце до  $N_i \approx 3 \cdot 10^7$  начинает быстро уменьшаться разброс протонов по им-

пульсам, что соответствует уменьшению их температур  $\tau_{\parallel}$  и  $\tau_{\perp}$  до предельно достижимого значения [2]  $\tau_{\parallel} \approx \tau_{\perp} \approx T_{\parallel} \approx 10^{-4}$  эВ. Было установлено, что при этом резко уменьшаются шумы шоттки-сигналов пучка, что говорит о появлении корреляций между положениями протонов в пучке. При указанном числе протонов в кольце длиной  $C_{ring} = 65$  м среднее расстояние между протонами составляет  $l_{\parallel} \approx 3 \cdot 10^{-4}$  см, а средняя энергия их отталкивания  $\bar{U} \approx e^2/l_{\parallel} \approx 5$  К. Из всех этих фактов следует [24, 25], что протоны в пучке выстраиваются в «линейку» на одинаковом расстоянии друг от друга. Аналогичный эффект был обнаружен в опытах с тяжелыми ионами, например, ионами урана [26]. Установлено, что в этом случае разброс по импульсам снижается (причем гораздо более резко, скачкообразно, на два порядка) при уменьшении числа ионов в кольце до  $N_i \approx 10^3$ , что при  $C_{ring} = 108$  м соответствует  $\bar{U} \sim Z_0^2 e^2/l_{\parallel} \sim 5$  К. Возможное объяснение этому эффекту дано в работе [27]. Изменение во времени температур  $\tau_{\parallel}$  и  $\tau_{\perp}$  ионов в накопительном кольце описывается приближенными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{\perp}}{dt} &= q - \lambda(\tau_{\perp} - \tau_{\parallel}) - \lambda_C \tau_{\perp}, \\ \frac{d\tau_{\parallel}}{dt} &= q - \lambda(\tau_{\perp} - \tau_{\parallel}) - \lambda_C \tau_{\parallel}, \end{aligned} \quad (61)$$

где нагрев поперечного движения ионов в пучке, происходящий из-за действия машинных резонансов [2], представлен слагаемым  $q$ ;  $\lambda$  — константа скорости поперечно-продольной релаксации ионов, возникающей из-за так называемого внутрипучкового рассеяния ионов друг на друге (ВПП), приводящего к обмену энергией между поперечным и продольным движениями ионов;  $\lambda_C$  — константа скорости процесса электронного охлаждения ионов (для простоты в (61) принято, что значения констант  $\lambda_C$  для продольного и поперечного движений одинаковы). В стационарном состоянии пучка из (61) имеем

$$\tau_{\parallel} = \Lambda q, \quad (62)$$

$$\frac{\tau_{\parallel}}{\tau_{\perp}} = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_C} \approx \frac{\lambda}{\lambda_C}, \quad (63)$$

где

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\lambda_C(2\lambda + \lambda_C)} \approx \frac{\lambda}{\lambda_C^2}. \quad (64)$$

Здесь учтено, что практически всегда  $\lambda \ll \lambda_C$ , и поэтому  $\tau_{\parallel} \ll \tau_{\perp}$ , точнее [28]

$$\frac{\tau_{\parallel}}{\tau_{\perp}} \approx 0.001. \quad (65)$$



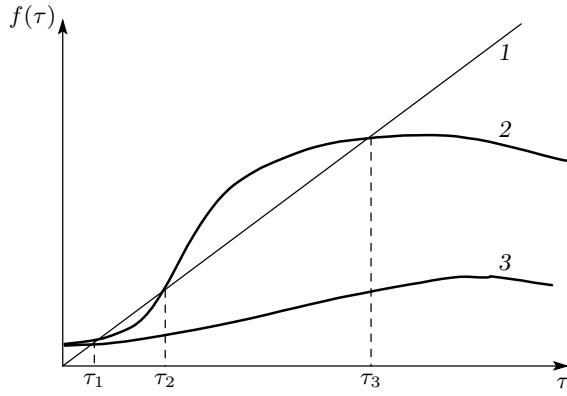


Рис. 3. Графическое решение уравнения (62) при  $\tau_{\parallel} = \tau_{\perp} = \tau$ . Прямая 1:  $f(\tau) = \tau$  (левая часть (62)), кривые 2 и 3:  $f(\tau) = \Lambda q$  (правая часть (62)) при  $N_i > N_C$  и  $N_i < N_C$ , соответственно

При  $\tau_{\parallel} \ll \tau_{\perp}$  можно считать, что  $\lambda_C$  не зависит от  $\tau_{\parallel}$ , однако для  $\lambda$  это приближение несправедливо: согласно численным расчетам [29], константа ВПР  $\lambda$  имеет максимум при  $\tau_{\parallel} \approx 1$  К, физическая природа которого состоит в следующем. При  $\tau_{\parallel} \gg 1$  К пучок представляет собой ионный газ, в котором ионы свободно перемещаются относительно друг друга, испытывая приводящее к поперечно-продольной релаксации рассеяние при сближении примерно на расстояние

$$R_{Ti} \approx Z_0^2 e^2 / \tau_{\perp} \approx Z_0^2 e^2 / \tau_{\parallel}$$

(следуя [29], рассматриваем случай  $\tau_{\parallel} \approx \tau_{\perp} \equiv \tau$ ). Поскольку  $R_{Ti}$  убывает с ростом  $\tau$ ,  $\lambda$  также убывает (как  $\tau^{1/2}$ ). При  $\tau < 1$  К ионы образуют устойчивую одномерную цепочку. Амплитуда их продольных колебаний в цепочке с ростом  $\tau$  увеличивается пропорционально  $\tau^{1/2}$ , поэтому  $\lambda$  тоже увеличивается. Следовательно, функция  $\lambda(\tau)$  имеет максимум (рис. 3). При  $\tau \rightarrow 0$  становится существенной поперечно-продольная релаксация, связанная с разного рода случайными неоднородностями в накопительном кольце, например магнитного поля, поэтому в этом предельном случае правая часть (62) стремится к некоторой ненулевой постоянной (см. рис. 3). С уменьшением числа ионов  $N_i$  в накопителе расстояние  $l_{\parallel}$  между ними возрастает, поэтому  $\lambda = \lambda(\tau, l_{\parallel})$  уменьшается. Отсюда следует, что при  $N_i > N_C$  уравнение (62) имеет три корня для  $\tau_{\parallel} \equiv \tau$ :  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ , а при  $N_i < N_C$  только один. Корень  $\tau_2$  соответствует неустойчивому решению (61): если начальное значение температуры ионов  $\tau_0$  находится в пределах  $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$ , то охлаждение

происходит интенсивнее нагрева в процессах ВПР, поэтому с течением времени  $\tau \rightarrow \tau_1$ . Аналогично, при  $\tau_2 < \tau_0 < \tau_3$  имеем  $\tau \rightarrow \tau_3$ . При  $N_i = N_C$  имеет место бифуркация: температура ионов скачком уменьшается от значения  $\tau_3$  (которое при этом совпадает с  $\tau_2$ ) до  $\tau_1$ , что согласуется с наблюдениями. В реальном случае (65) уменьшение  $\lambda$  с ростом  $\tau_{\parallel}$  начинается лишь при  $\tau_{\parallel} > \tau_{\perp} \approx 2000$  К, т. е. температуры  $\tau_2$  и  $\tau_3$  оказываются на два-три порядка выше, чем  $\tau_1$ , поэтому справедливость бифуркационного механизма [27], на наш взгляд, должна быть установлена в дополнительных расчетах.

Теперь исследуем другой механизм эффекта кристаллизации пучков, возможность которого видна из соотношений (62), (64): резкое увеличение  $\lambda_C$ , происходящее в результате рассмотренного в данной работе фазового перехода (внимание автора на эту возможность обратил А. О. Сидорин). При влете иона в кулер вокруг него сразу образуется электронное облако — «шуба» (соответствующие оценки приведены ниже) с энергией связи электронов  $\varepsilon \approx (2-3)T_{\parallel}$ . При выходе из кулера ион попадает в область с поперечным магнитным полем  $H_1 \approx 50$  Гс, применяемым для поворота электронного пучка с целью отвода его на коллектор. В системе покоя иона появляется электрическое поле  $E = H_1 v/c$ , где  $v$  — скорость иона в лабораторной системе. Поскольку разность потенциалов на размере «шубы» ( $\sim r_H$ ) достаточно велика ( $eEr_H \sim 30 \text{ эВ} \gg \varepsilon$ ), ион полностью сбрасывает ее при выходе из кулера (этот процесс иногда называют лоренцевой ионизацией, имея в виду, что в лабораторной системе она происходит вследствие действия силы Лоренца: под действием этой силы вследствие различия в величинах  $e/m$  электроны и ион испытывают различные ускорения, что приводит к разрушению «шубы»). Таким образом, каждый ион при входе в кулер подхватывает  $Z_0$  электронов и переносит их к выходу из кулера. При площади поперечного сечения ионного пучка  $S$  каждый ион собирает все электроны из внутрипучковой цилиндрической области длиной  $l \sim Z_0/nS$ . При

$$N_i > N'_C = \frac{C_{ring}}{l} \quad (66)$$

электронов не хватает для формирования «шуб». Напротив, при  $N_i > N'_C$  «шубы» образуются. Если при этом сила трения (она будет найдена позже), действующая на ион со стороны электронов, растет, то  $\lambda_C$  увеличивается. В пионерском опыте с протонами [22] энергия протонов составляла  $E_I = 65$  МэВ,  $n = 2.4 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$ ,  $S \approx 0.8 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ ,  $Z_0 = 1$ , по-

этому  $l \approx 0.5 \cdot 10^{-4}$  см. Тогда из (66) получаем  $N'_C \approx 10 \cdot 10^7$ . Для опыта [26]  $E_i = 400$  МэВ/нуклон,  $n = 2 \cdot 10^6$  см $^{-3}$ ,  $S \approx 0.5 \cdot 10^{-5}$  см $^2$ ,  $Z_0 = 92$ , поэтому  $l \approx 10$  см,  $N'_C \approx 10^3$ . Эти оценки согласуются с приведенными ранее измеренными критическими числами ионов:  $N'_C \sim N_C$ , что наводит на мысль связать эффект кристаллизации пучков с образованием ионных «шуб».

Покажем теперь, что «шубы» действительно образуются. Для этого в случае (25) оценим вероятность посадки электронного кольца в связанное состояние на ионе. Энергия ионов в системе покоя электронного облака по порядку величины равна  $T_{||}$ , поэтому их можно считать неподвижными. Согласно (28), в типичном столкновении с ионом с прицельным параметром, примерно равным  $r_H$ , электронное кольцо взаимодействует с ним приблизительно по закону

$$U(z) \approx - \left( \frac{Z_0 e^2}{r_H} \right) \theta(r_H - |z|). \quad (67)$$

При входе в область  $|z| < r_H$  кольцо ускоряется и поэтому испускает тормозные плазмоны. Возникающая сила трения  $\mathbf{F}$  тормозит кольцо, которое, теряя свою полную энергию, оказывается в связанном состоянии. По оценкам, это наиболее эффективный механизм посадки. Кольцо рассматриваем как точечный заряд  $q = -e$ , движущийся по траектории  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_C(t)$ . Согласно [12–14],

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \left( -\frac{4\pi i \mathbf{k}}{k^2} \right) \times \\ &\times \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_C(t) - i\omega t) \rho(\mathbf{k}, \omega) \left( \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) - 1} \right), \quad (68) \\ \rho(\mathbf{k}, \omega) &= q (\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_C(t))_\omega, \\ (f(t))_\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \exp(-i\omega t). \end{aligned}$$

Как пояснялось в конце разд. 2, в случае (25) в формуле (8) можно пренебречь слагаемыми с  $s \neq 0$  и считать, что  $k_{\perp} r_H \ll 1$ . Для оценок достаточно рассмотреть предел холодной плазмы  $T_{||} \rightarrow 0$  (к которому лучше перейти после проведения в (8) интегрирования по частям по  $dv_{||}$ ):

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \approx 1 - \frac{\omega^2(\mathbf{k})}{\omega^2}, \quad (69)$$

где  $\omega(\mathbf{k}) = \omega_p |k_z|/k$  — закон дисперсии плазмонов в замагниченном электронном облаке.

Для продольного импульса, теряемого кольцом при испускании плазмонов, из (68) получаем выражение

$$\begin{aligned} \Delta p &= \int_{-\infty}^{\infty} dt F(t) = -(2\pi)^{-2} \omega_p^2 \times \\ &\times \int d^3 k d\omega |\rho(\mathbf{k}, \omega)|^2 k_z^3 k^{-4} \text{sign} \omega \delta(\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k})). \quad (70) \end{aligned}$$

Согласно (67),

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = -e \int_{-\tau}^{\tau} dt \exp(i(\omega - k_z V)t) \approx -2e\tau, \quad (71)$$

где  $V \approx \Delta_{||}$  — продольная скорость кольца в зоне взаимодействия с ионом (см. (67)),  $\tau = r_H/V$ . В выражении (70) учтено, что вследствие (25)

$$|(\omega - k_z V)t| \approx \frac{\omega_p r_H}{\Delta_{||}} \approx \frac{r_H}{R_{||}} \ll 1. \quad (72)$$

Из соотношений (70), (71) получаем оценку

$$\begin{aligned} \Delta p &= -\pi^{-2} e^2 \tau^2 \omega_p \int d^2 k_{\perp} \int_0^{\infty} dk_z k_z^2 k^{-3} \approx \\ &\approx -e^2 \tau^2 \omega_p r_H^{-2} \sim -e^2 \omega_p V^{-2} \approx -e^2 \omega_p \Delta_{||}^{-2}. \quad (73) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что расходимость при больших  $k$  связана с заменой кольца точечной частицей: в реальной же случае  $k < k_{max} \approx 1/r_H$ . Кроме того, из-за малости  $R_T$  наиболее вероятен процесс ступенчатой рекомбинации, когда сначала кольцо падает в состояние с  $\varepsilon \approx T_{||}$ , в котором

$$l_{||} \approx l_{\perp} \approx r_H, \quad (74)$$

а уже затем с вероятностями порядка 1/2 оно либо покидает ион, либо релаксирует в сильносвязанное состояние с

$$l_{||} \approx R_T, \quad \varepsilon \approx T_{||} \ln(r_H/R_T).$$

Оценки показывают, что из-за малости  $R_T/r_H$  за время пребывания иона в кулере релаксация не успевает завершиться, поэтому в случае (25) при  $T_{||} < T_C$  размеры электронного облака, окружающего ион, определяются оценкой (74), а не величинами, приведенными в таблице. Из соотношений (73) и (6) имеем

$$|\Delta p|/p \approx (\xi_{||})^{-3/2} \sim 1,$$

откуда следует, что вероятность захвата кольца ионом в столкновении с прицельным параметром порядка  $r_H$

$$W_C \sim 1. \quad (75)$$

Ион захватывает одно кольцо из цилиндрической области длиной, приблизительно равной

$$\frac{1}{nr_H^2} \approx 0.01-0.1 \text{ см.} \quad (76)$$

Малость этой длины количественно подтверждает описанный ранее на качественном уровне процесс образования электронной «шубы» иона.

Необходимое для кристаллизации пучков увеличение  $\lambda_C$  требует возрастания силы трения в результате образования «шуб», поэтому оценим силу трения  $F$ , действующую на ион. Для этого применим простой метод, суть которого продемонстрируем на примере оценки  $F$  для равновесной плазмы с температурой  $T$  и  $H = 0$  (строгий расчет  $F$  для этого случая имеется, например, в [12]). Для оценки достаточно [2, 3] рассмотреть только коллективное слагаемое в  $F$  (68) и пренебречь вкладом от парных столкновений [30]. При  $V = 0$  дебаевское облако сферически-симметрично, поэтому средняя сила, действующая на ион, равна нулю. При

$$V < \Delta = \sqrt{T/m}$$

дебаевское облако отстает от иона на расстояние  $x \approx r_D V/\Delta$ , поэтому в точке нахождения иона дебаевское облако создает отличное от нуля электрическое поле  $E_D$ , вследствие чего возникает тормозящая ион сила

$$F = qE_D \approx \frac{x}{r_D} \frac{q^2}{r_D^2} \approx \frac{Z_0^2 e^2 V}{r_D^2 \Delta} \approx \frac{nZ_0^2 e^4 V}{m\Delta^3}. \quad (77)$$

При  $V > \Delta$  заряд находится на краю облака, размер которого составляет

$$L \approx V\tau_p \approx \frac{V}{\omega_p}, \quad (78)$$

поскольку электроны реагируют на поле иона через время  $\tau_p \approx 1/\omega_p$ , в течение которого заряд проходит путь  $L$ . Следовательно,

$$F \approx \frac{q^2 e^2}{L^2} \approx \frac{nZ_0^2 e^4}{mV^2}.$$

В нашем случае при условиях (21), (23) и  $T_{\parallel} > T_C$  вследствие (57) плотность электронов в дебаевском облаке мало отличается от  $n$ , поэтому перестройка зарядов-колец, движущихся вдоль оси  $z$  со скоростями порядка  $\Delta_{\parallel}$ , происходит за время  $\tau_p \approx r_D/\Delta_{\parallel}$ . Следовательно, облако отстает от заряда на расстояние  $x \approx V\tau_p \approx r_D V/\omega_p$  (для простоты здесь и далее считаем, что ион движется вдоль  $\mathbf{H}$ ), поэтому, аналогично (77), при  $V < \Delta_{\parallel}$  имеем

$$F \approx \frac{q^2}{r_D^2} \frac{V}{\Delta_{\parallel}} \approx Z_0^2 e^2 (r_H R_{\parallel}^2)^{-2/3} \frac{V}{\Delta_{\parallel}}. \quad (79)$$

При  $V \sim \Delta_{\parallel}$  ион находится на краю приблизительно шарообразного дебаевского облака. Сила трения при этом максимальна:

$$F \approx \frac{q^2}{r_D^2} \approx Z_0^2 e^2 (r_H R_{\parallel}^2)^{-2/3}. \quad (80)$$

При

$$\Delta_{\parallel} < V < V_0,$$

где

$$V_0 = \Delta_{\parallel} r_H / R_{\parallel},$$

заряд движется быстрее колец, перестройка положений которых происходит за время порядка  $1/\omega_p$ , поэтому аналогично (78), в (80) величину  $R_{\parallel} = \Delta_{\parallel}/\omega_p$  следует теперь заменить на  $L = V/\omega_p$ , что дает следующий результат (разумеется, он следует из строгих уравнений (68), (8)):

$$F \approx Z_0^2 e^2 (r_H R_{\parallel}^2)^{-2/3} \left( \frac{\Delta_{\parallel}}{V} \right)^{4/3}. \quad (81)$$

Дебаевское облако при этом приблизительно шарообразно и имеет радиус

$$r'_D \approx (r_H L^2)^{1/3},$$

а ион находится на его краю. При

$$V \approx V_0, \quad r'_D \approx r_H, \quad F \approx \frac{Z_0^2 e^2}{r'^2_D} \approx \frac{nz_0^2 e^4}{mV_0^2}.$$

Наконец, при  $V > V_0$  ларморовские кружки можно считать точечными зарядами, движущимися вдоль  $H$ . Основной вклад в силу трения дает при этом полюс в (68), т. е. частоты  $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}$ , при которых  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ , что соответствует трению, возникающему вследствие испускания ионом черенковских плазмонов [31]:

$$F \approx \frac{2\pi n Z_0^2 e^4}{mV^2}.$$

Из всех перечисленных интервалов скоростей ионов наибольший практический интерес представляет  $V \ll \Delta_{\parallel}$ . При  $T_{\parallel} < T_C$ , согласно таблице, шарообразное дебаевское облако с радиусом порядка  $r_D$  превращается в тонкий диск того же поперечного радиуса. Электрическое поле на краю диска приблизительно в 2–3 раза больше, чем на краю шара, при продольном сплющивании которого получается этот диск. Из-за притяжения иона электронные кольца движутся внутри диска с хаотической скоростью  $\Delta$ , превышающей  $\Delta_{\parallel}$ :

$$\Delta \approx (2-3)\Delta_{\parallel}.$$

При оценке силы трения эту скорость следует подставить в (79) вместо  $\Delta_{\parallel}$ . Из этих соображений видно, что при фазовом переходе в случае (21), (23) сила трения существенно не меняется.

Теперь рассмотрим случай (25), к которому относятся рассматриваемые эксперименты по кристаллизации пучков. Согласно соотношению (75), в случае  $T_{\parallel} < T_C$  при полностью сформированной «шубе» сила трения

$$F \approx m\Delta_{\parallel} n r_H^2 \Delta_{\parallel} \left( \frac{V}{\Delta_{\parallel}} \right) = m n r_H^2 \Delta_{\parallel} V. \quad (82)$$

Смысл формулы (82) состоит в том, что каждое захваченное ионом электронное кольцо передает ему импульс порядка  $m\Delta_{\parallel}$  и, кроме того, устанавливается динамическое равновесие: число захватываемых ионом в единицу времени колец равно числу теряемых в столкновениях с электронами. При  $T_{\parallel} > T_C$ , согласно (25), (26), имеем следующую оценку для силы трения:

$$F \approx Z_0^2 e^2 R_{\parallel}^{-2} (V/\Delta_{\parallel}),$$

которая с учетом соотношения (55) совпадает с выражением (82).

Следовательно, как в случае (21), (23), так и в случае (25) при фазовом переходе сила трения существенно не меняется, поэтому объяснение эффекта кристаллизации пучков ионов в рамках бифуркационной модели [27] на настоящее время остается единственным.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Указанный в данной работе фазовый переход по нашему мнению объясняет наблюдавшееся в экспериментах [5, 19–21] превышение значений сечений радиационной электрон-ионной рекомбинации над расчетными значениями. Согласно приведенным оценкам, он не имеет отношения к эффекту кристаллизации пучков ионов [22–26]. Причина в том, что образование вокруг иона электронного облака малых размеров не может привести к резкому возрастанию силы торможения, действующей на ион.

Ключевую роль для существования рассмотренного фазового перехода играет имеющаяся в кулерах резкая анизотропия распределения электронов (5), которая в присутствии достаточно сильного магнитного поля  $H$  приводит к изменению характера взаимодействия иона с электронами. Если при  $H = 0$  электрон взаимодействует как точечная частица, то при условии (21) его можно счи-

тать кольцом радиуса  $r_H$  с равномерно распределенным зарядом. Все это при уменьшении  $T_{\parallel}$  приводит к фазовому переходу, который в математическом (но не в физическом) отношении напоминает переход БКТ [16, 17]. При  $T_{\parallel} \approx T_C$  происходит сжатие дебаевского облака, окружающего ион до размеров, порядка указанных в таблице. Впрочем, при реальном времени нахождения ионов в кулере продольный размер облака не успевает срелаксировать к величине  $R_T$  и поэтому существенно превышает ее. Об этом же свидетельствует логарифмическая зависимость от  $z_1$  в формулах (49), (50) при подстановке в них значения  $\gamma = 2$ , как объяснялось в конце разд. 4. Строгий расчет продольного размера может быть установлен из решения цепочки уравнений ББКГИ [34, 35]. В этих же расчетах может быть определен и тип фазового перехода. Так, согласно аргументам, приведенным в конце разд. 4, его, скорее, следует отнести к фазовому переходу второго рода. Однако это требует отдельного рассмотрения.

Фазовый переход никак не связан с неидеальностью исходной плазмы. Так, в случае плазмы, замагниченной по отношению к парным столкновениям,

$$\bar{r}_H \ll \bar{R}, \quad (83)$$

из условия фазового перехода (55) следует соотношение

$$T_{\parallel} \gg \frac{Z_0 e^2}{R} \geq \frac{e^2}{R}. \quad (84)$$

Таким образом, в случае (83) фазовый переход возможен только в идеальной по продольному движению плазме (84) (вследствие неравенства (5) она тем более идеальна по отношению к поперечному движению). Отметим также принципиальную разницу между фазовым переходом и нелинейным дебаевским экранированием, исследованным в работах [32, 33].

Автор выражает благодарности И. Н. Мешкову, И. Селезневу, А. О. Сидорину, А. В. Смирнову, Г. В. Трубникову, а также участникам семинара В. Д. Шафранова за полезные обсуждения и критические замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Будкер, Атомная энергия **22**, 346 (1967).
2. В. В. Пархомчук, А. Н. Скринский, УФН **170**, 473 (2000).

3. И. Н. Мешков, ЭЧАЯ **25**, 1487 (1994).
4. Г. И. Будкер, Ф. Ф. Булышев, Н. С. Диканский, в сб. *Труды 5-го Всесоюзн. совещ. по ускорителям заряженных частиц*, т. 1, Наука, Москва (1977); Препринт № 76–92 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск (1976).
5. W. Shi, S. Bohm, C. Bohme et al., Eur. Phys. J. D **15**, 145 (2001).
6. А. В. Гапонов, Изв. Вузов. Радиофизика **2**, 450 (1959).
7. В. Ю. Трахтенгерц, в сб. *Основы физики плазмы*, под ред. А. А. Галева, Р. Судана, Энергоатомиздат, Москва (1984), т. 2, с. 498.
8. S. Ichimaru and M. N. Rosenbluth, Phys. Fluids **13**, 2778 (1970).
9. D. Montgomery, G. Joyce, and L. Turner, Phys. Fluids **17**, 954, 2201 (1974).
10. A. W. Hyatt, C. F. Driscoll, and J. H. Malmberg, Phys. Rev. Lett. **59**, 2975 (1987).
11. B. R. Beck, J. Fajans, and J. H. Malmberg, Phys. Rev. Lett. **68**, 317 (1992).
12. В. Д. Шафранов, в сб. *Вопросы теории плазмы*. Вып. 3, Госатомиздат, Москва (1963).
13. В. В. Железняков, *Излучение в астрофизической плазме*, Янус-К, Москва (1997).
14. А. Ф. Александров, А. А. Рухадзе, *Лекции по электродинамике плазмоподобных сред*, Изд-во МГУ, Москва (1999).
15. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
16. В. Л. Березинский, ЖЭТФ **59**, 907 (1970); **61**, 1144 (1971).
17. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1976), §8.
19. A. Muller, Schennach, M. Wagner et al., Phys. Scripta **37**, 62 (1991).
20. H. Gao, D. R. DeWitt, R. Schuch et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 4381 (1995).
21. G. Gwinner, A. Hoffknecht, T. Bartsch et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 4822 (2000).
22. G. I. Budker, N. S. Dikansky, V. I. Kudelainen et al., in *Proc. 4th All-Union Conf. on Charged Particle Accelerators*, Nauka, Moscow (1975), Vol. 2, p. 309.
23. Е. Н. Дементьев, Н. С. Диканский, А. С. Медведко и др., Препринт ИЯФ № 70–79 СО АН СССР, Новосибирск (1979).
24. V. V. Parkhomchuk, in *Proc. of Workshop on Electron Cooling and Related Applications*, Kernforschungszentrum, Karlsruhe (1984).
25. V. V. Parkhomchuk and A. N. Skrinsky, Rep. Progr. Phys. **54**, 919 (1991).
26. M. Steck, K. Beckert, H. Eickhoff et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 3803 (1996).
27. I. Meshkov, A. Sidorin, A. Smirnov, E. Syresin, and T. Katayama, Preprint RIKEN-AF-AC-34, RIKEN, Tokyo (2002).
28. B. Hochadel, F. Albrecht, M. Grieser et al., in *Proc. of Workshop on Beam Cooling and Related Topics*, CERN, Geneva (1994), p. 198.
29. J. Wei, H. Okamoto, and A. Sessler, Phys. Rev. Lett. **80**, 2606 (1998).
30. Б. А. Трубников, *Теория плазмы*, Энергоатомиздат, Москва (1996).
31. A. S. Artamonov and Ya. Derbenev, Nucl. Instr. Meth. A **284**, 248 (1989).
32. I. Hofmann, in [28], p. 330.
33. A. Wolf, C. Ellert, M. Grieser et al., in [28], p. 416.
34. Н. Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*, Гостехиздат, Москва (1946).
35. Т. Хилл, *Статистическая механика*, Изд-во иностр. лит., Москва (1960).