

ИНСТАНТОННЫЕ ПУТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ О КОГЕРЕНТНОМ КВАНТОВОМ ТУННЕЛИРОВАНИИ В МАЛЫХ ЧАСТИЦАХ ФЕРРОМАГНЕТИКА

*Б. А. Иванов**

*Институт магнетизма Национальной академии наук Украины
03142, Киев, Украина*

Н. Е. Кулагин

*Научно-исследовательский институт физических проблем им. Ф. В. Лукина
124460, Зеленоград, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 19 мая 2004 г.

Показано, что задача об инстантонах в ферромагнетиках в модели большого спина сводится к точно интегрируемой динамической системе с конечным числом переменных. Для достаточно широкого класса моделей присутствует непрерывное бесконечное множество инстантонных путей, образующих однопараметрическое семейство, с существенно различной формой, но имеющих одинаковое значение евклидоваго действия. На основе развитого формализма построены точные инстантонные решения, описывающее макроскопическое квантовое туннелирование для малой ферромагнитной частицы с одноосной и двухосной квадратичной анизотропией при наличии магнитного поля, приложенного перпендикулярно легкой оси. Решение пригодно для любых соотношений между параметрами анизотропии, для любой величины магнитного поля и его направления в базисной плоскости. Исходя из полученного решения, описаны закономерности макроскопического квантового туннелирования в магнитных частицах типа высокоспиновых молекул. При этом получаются как режимы туннелирования с деструктивной интерференцией инстантонных траекторий и осциллирующей зависимостью вероятности перехода от величины поля, так и режимы, в которых все инстантоны имеют одинаковое чисто вещественное значение евклидоваго действия и деструктивная интерференция отсутствует.

PACS: 75.45.+j, 75.50.Xx, 03.65.Sq

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

В последнее десятилетие вопросы макроскопического квантового туннелирования в макроскопических (или, точнее, в мезоскопических) магнитных системах широко изучаются как экспериментально, так и теоретически, см. обзоры [1, 2]. В физике магнетизма к таким системам относятся малые магнитные частицы, магнитные кластеры, высокоспиновые молекулы. Особый интерес вызывает явление когерентного макроскопического квантового туннелирования между энергетически эквивалентными, но физически различными состояниями в системах

с дискретным вырождением основного состояния. Для таких систем типичный эффект когерентного квантового туннелирования заключается в смешивании двух эквивалентных классических состояний, которые соответствуют двум одинаковым минимумам энергии анизотропии, см. [1, 2], что приводит к туннельному расщеплению этих уровней, вырожденных в классическом случае. Интерес к этому явлению обусловлен двумя причинами. Во-первых, мезоскопические объекты, способные проявлять квантовомеханические свойства, интересны как потенциальные элементы квантовых компьютеров, см. [3, 4]. Во-вторых, в этих задачах возникают тонкие и красивые эффекты интерференции инстантонных траекторий. Для ферромагнитных частиц эти эффекты приводят к подавлению туннелирования при по-

*E-mail: bivanov@i.com.ua

лучелом полном спине системы в отсутствие магнитного поля [5, 6], а также к осцилляционным зависимостям туннельного расщепления уровней от внешних параметров, прежде всего, от магнитного поля. Туннелирование в случае $H \neq 0$ теоретически было изучено (с использованием инстантонного метода) Гаргом, который обнаружил интересный интерференционный эффект: осцилляции расщепления с изменением магнитного поля, приложенного вдоль оси трудного намагничивания [7]. Экспериментально эффекты когерентного макроскопического квантового туннелирования можно наблюдать по резонансному поглощению электромагнитных волн на туннельно расщепленных уровнях. Возможность управления туннельными эффектами («включения» или «выключения» туннелирования) является важным моментом для применения магнитных элементов квантовых компьютеров [3, 4].

Первоначальные работы по теории квантового туннелирования [8–10] были выполнены для малых частиц ферромагнетика, фактически в предположении, что все спины в частице параллельны друг другу (модель большого спина). Для этих систем были предсказаны эффекты деструктивной интерференции инстантонных траекторий и интерференционное подавление туннелирования [5, 6]. Затем в продолжении длительного времени считалось, что для экспериментального наблюдения туннелирования более удобны антиферромагнетики, в которых вероятность туннелирования выше, а ограничения на температуру менее жесткие, чем в ферромагнетиках [11–14]. Эффекты когерентного квантового туннелирования впервые наблюдались резонансными методами именно для антиферромагнитных частиц ферритина биологического происхождения [15].

В последние несколько лет интерес к туннелированию в ферромагнетиках, и в связи с этим к модели большого спина, снова вырос в связи с экспериментальным изучением эффектов туннелирования в ориентированных монокристаллах высокоспиновых молекул, см. обзор Вернсдорфера [16]. По существу, синтез и исследование высокоспиновых молекул открыли новый период в исследовании макроскопических квантовых эффектов. Основным преимуществом этих объектов, среди которых есть как ферромагнетики (собственно, высокоспиновые молекулы или молекулярные магниты), так и антиферромагнетики (спиновые кольца), является наличие хорошо определенной магнитной структуры [17]. Суммарный магнитный момент высокоспиновых молекул достигает значения 26 магнетонов Бора [18]. Состояния наиболее изученных высокоспиновых молекул,

кратко обозначаемых как Fe_8 и Mn_{12} , хорошо описываются в предположении, что все спины, входящие в молекулу, связаны сильным обменным взаимодействием и образуют суммарный спин молекулы $S = 10$. Известны также и высокоспиновые молекулы с полуцелым спином, к ним относятся комплексы Mn_4 со спином $9/2$ [19]. Для таких систем наблюдались эффекты туннелирования как между возбужденными уровнями, для которых расщепление больше [20, 21], так и в основном состоянии [22–26]. Система таких молекул реально представляет собой ансамбль тождественных частиц (в отличие, например, от частиц ферритина, в которых разброс числа магнитных ионов в частице может достигать 20–30, т. е. около процента от общего числа ионов, равно примерно 3500). Кроме того, возможно создание качественных монокристаллов высокоспиновых молекул с точной ориентацией их осей анизотропии. Это позволило реально ставить вопрос о наблюдении предсказанных Гаргом [7] осцилляций туннельного расщепления при изменении внешнего магнитного поля, приложенного вдоль трудной оси магнитной частицы. Такие осцилляции наблюдались для Fe_8 Вернсдорфером и Сессоли [24] и для Mn_{12} Вернсдорфером с соавторами [25], наблюдения проводились и в системах с полуцелым спином [26]. Измерения времени релаксации при низких температурах продемонстрировали периодическую зависимость этой величины от магнитного поля при ориентации поля вдоль трудной оси таких высокоспиновых молекул.

Наблюдение этих красивых эффектов привело к новым теоретическим исследованиям проблемы туннелирования для ансамблей ориентированных частиц ферромагнетиков [27, 28]. Состояния высокоспиновых молекул хорошо описываются в предположении, что все спины, входящие в молекулу, связаны сильным обменным взаимодействием и образуют суммарный спин молекулы S . Таким образом, мы приходим к модели большого спина S при наличии одноионной магнитной анизотропии, находящегося под действием магнитного поля \mathbf{H} . Во всех известных нам работах, посвященных этой проблеме, динамика высокоспиновых молекул описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(K_1 S_x^2 + K_2 S_y^2) + g\mu_B \mathbf{H} \cdot \mathbf{S} + \tilde{K} [S_{(+)}^4 + S_{(-)}^4]. \quad (1)$$

Здесь K_1 и K_2 — константы ромбической анизотропии, слагаемое с \tilde{K} отвечает тетрагональной анизотропии, присутствующей в случае Mn_{12} , S_x , S_y —

компоненты оператора спина, $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$, g — гиромагнитное отношение, μ_B — модуль магнетона Бора. Константы K_1 , K_2 и \tilde{K} положительны, т. е. ось z является легкой осью для спина. Величина \tilde{K} мала, $\tilde{K} \ll K_1, K_2$, ее учет важен только для недеформированной молекулы Mn_{12} , для которой естественная ромбическая анизотропия отсутствует. Для молекулы Fe_8 , а также и для деформированных комплексов Mn_{12} основной вклад в анизотропию связан с двумя первыми слагаемыми в (1), т. е. с ромбической анизотропией. В дальнейшем мы будем обсуждать только случай $\tilde{K} = 0$.

Для анализа туннелирования между различными классическими вырожденными основными состояниями системы $\mathbf{m}^{(+)}$ и $\mathbf{m}^{(-)}$ и нахождения величины туннельного расщепления энергии этих состояний проще всего воспользоваться инстантонным формализмом, см., например, [29, 30]. Для классической намагниченности \mathbf{m} нужно перейти в классических уравнениях Ландау–Лифшица к мнимому времени по формуле $t = i\tau$ и найти инстантонные решения этих уравнений $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\tau)$, такие что при $\tau \rightarrow \pm\infty$ намагниченность стремится к двум разным основным состояниям, $\mathbf{m}(\tau) \rightarrow \mathbf{m}^{(\pm)}$. Этот подход может быть введен более аккуратно на основе формализма спиновых когерентных состояний [30]. В рамках указанного подхода динамической переменной является вектор намагниченности постоянной длины \mathbf{m} . С учетом того, что намагниченность антипараллельна спину, запишем $\mathbf{m} = -\mathbf{S}/S$. Вектор \mathbf{m} удобно параметризовать угловыми переменными θ и φ , $m_x + im_y = \sin\theta \exp(i\varphi)$, $m_z = \cos\theta$. Инстантоны отвечают экстремуму евклидова действия $A_E[\mathbf{m}]$ и представляют собой решения уравнений Эйлера–Лагранжа для евклидовой версии лагранжиана ферромагнетика. Вклад в расщепление дают только эквивалентные траектории, обладающие минимальным значением вещественной части евклидова действия $A_E[\mathbf{m}]$. Этот вклад пропорционален туннельной экспоненте $\exp\{-\text{Re } A_E[\mathbf{m}]/\hbar\}$. Евклидово действие можно записать через вектор намагниченности \mathbf{m} в следующем виде:

$$A_E[\mathbf{m}] = \int d\tau \left[-i\hbar S \frac{\mathbf{n}[\mathbf{m} \times d\mathbf{m}/d\tau]}{1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}} + W(\mathbf{m}) \right], \quad (2)$$

где $W(\mathbf{m})$ — энергия ферромагнетика, включающая энергию магнитной анизотропии и зеемановскую энергию спина во внешнем магнитном поле. Первое слагаемое в случае вещественного времени определяет динамику намагниченности, его вариация дает известные уравнения Ландау–Лифшица. Динамическая часть лагранжиана (2) содержит син-

гулярность при $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = -1$. Происхождение этой сингулярности и возможные способы ее устранения становятся понятными при переходе к переменной $\mathbf{M} = M\mathbf{m}$, не связанной условием $M^2 = \text{const}$. В терминах \mathbf{M} выражение для лагранжиана можно записать в виде

$$L = -i\mathbf{A}\partial\mathbf{M}/\partial\tau + W(\mathbf{m}), \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = \hbar S[\mathbf{n} \times \mathbf{M}]/M[M + \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}],$$

где вектор \mathbf{A} имеет особенность на линии $(\mathbf{n}, \mathbf{M}) = -M$. Формально динамическая часть лагранжиана (1), представленная через \mathbf{M} , $\partial\mathbf{M}/\partial t$, совпадает с лагранжианом заряженной частицы с координатой \mathbf{M} в магнитном поле с вектор-потенциалом \mathbf{A} . Нетрудно показать, что вектор $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A} = \hbar S\mathbf{M}/M^3$ не содержит сингулярностей при $M \neq 0$. Таким образом, выражение (2) для \mathbf{A} описывает вектор-потенциал магнитного монополя, расположенного в начале координат. Вектор-потенциал \mathbf{A} для монополя непременно имеет сингулярность на линии (струне Дирака), выходящей из точки положения монополя и уходящей на бесконечность [30]. Допустимые преобразования (2) или (3) сводятся к калибровочным преобразованиям, в частности, к изменению ориентации струны Дирака. Сингулярности лагранжиана тесно связаны с появлением так называемой фазы Берри, см. [5, 6, 30], т. е. с полной производной по времени в лагранжиане (2) или (3), которая не проявляется в уравнениях движения, но ответственна за интерференцию инстантонных траекторий. Нетривиальный вклад фазы Берри в вероятность туннелирования определяется интегралом по замкнутому контуру $\oint \mathbf{A} d\mathbf{M}$ и может быть преобразован к двумерному интегралу от $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A}$ по поверхности, ограниченной этим контуром, в силу чего результат не должен зависеть от калибровки [5, 6, 30].

Обычно лагранжиан ферромагнетика записывают в угловых переменных. При выборе $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_z$ евклидово действие приобретает хорошо известный вид

$$A_E(\theta, \varphi) = \int d\tau [-i\hbar S(1 - \cos\theta) d\varphi/d\tau + W(\theta, \varphi)].$$

Динамическая часть лагранжиана в этой форме также содержит сингулярности, обусловленные недифференцируемостью азимутального угла φ в точках $\theta = 0, \pi$. Мы будем, однако, пользоваться более общим выражением (2), так как вычисление евклидова действия зачастую может быть значительно упрощено подходящим выбором направления струны Дирака, см. разд. 4.

Часто отмечают формальное сходство между инстантонами и солитонами типа доменных стенок. Иногда это сходство является достаточно глубоким, в частности, анализ решений для инстантонов и доменных стенок в лоренц-инвариантных моделях полностью аналогичен. Мы покажем, однако, что для ферромагнетика анализ инстантонов и доменных стенок имеет принципиальные различия. В отличие от задачи о движущейся доменной стенке, которая является интегрируемой лишь в немногих избранных случаях, построение инстантонного решения в ферромагнетике сводится к точно интегрируемой динамической задаче.

Евклидова версия уравнений динамики намагниченности имеет очевидный интеграл движения $W(\theta, \varphi) = \text{const}$, и в рамках инстантонного формализма значение этой постоянной должно быть выбрано так, чтобы для состояний равновесия $\theta = \theta^{(\pm)}$, $\varphi = \varphi^{(\pm)}$, между которыми рассматривается туннелирование, $W(\theta^{(\pm)}, \varphi^{(\pm)}) = 0$. Следовательно, в инстантонном решении $W(\theta, \varphi) = 0$, в силу чего для ферромагнетика величина $A_E[\theta, \varphi]$ определяется только первым слагаемым в лагранжиане (2) или (3), т. е. его динамической частью. Отсюда, в частности, следует, что инстантонное решение не может быть вещественным, так как для реализации квазиклассической динамики евклидово действие должно иметь немалую вещественную часть A_E (2).

2. МОДЕЛЬ ЧИСТО ОДНООСНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА И НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Начнем анализ со случая чисто одноосного магнетика, положив в формуле (1)

$$K_1 = K_2 = K.$$

В этом случае уравнения для угловых переменных записываются в виде

$$\begin{aligned} \sin \theta d\varphi/d\tau &= \omega_0 \cos \theta (\sin \theta - h \cos \varphi), \\ d(\cos \theta)/d\tau &= +h \sin \theta \sin \varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

где $h = H/H_a = g\mu_B H/KS$ — характерное безразмерное поле, $H_a = KS/g\mu_B$ имеет смысл поля анизотропии, $\hbar\omega_0 = KS$. Система уравнений (4) с учетом возможности комплексных значений для $\cos \theta$ и φ является динамической системой с двумя степенями свободы. Удобно ввести безразмерное мнимое время, сделав замену $\tau \rightarrow \tau\omega_0$. Далее, вместо первого уравнения можно использовать первый интеграл этой системы $W(\theta, \varphi) = \text{const}$. Соотношение

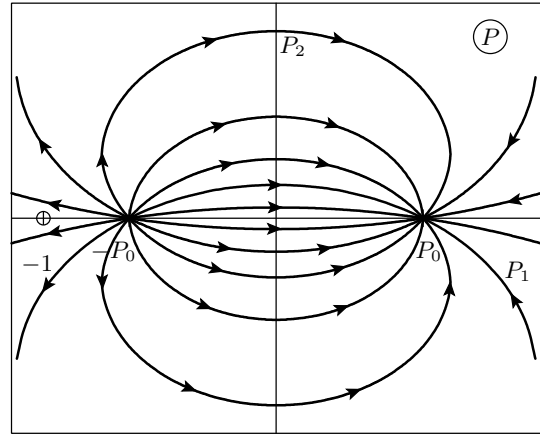


Рис. 1. Фазовые траектории системы уравнений (6) при $\sigma = +1$ на плоскости комплексной переменной $P = P_1 + iP_2$. Кругом обозначен полюс в точке $P = -1$ подынтегральной функции в интеграле (8), который определяет значение евклидова действия

$W(\theta, \varphi) = 0$ дает $\sin \theta = h \exp(i\sigma\varphi)$, где $\sigma = \pm 1$. С помощью этой формулы можно исключить φ из уравнения для $d(\cos \theta)/d\tau$ и получить уравнение первого порядка только для величины $P = \cos \theta$ в следующем виде:

$$2\dot{P} = \sigma(1 - h^2 - P^2). \quad (5)$$

Здесь и далее точкой обозначена производная по безразмерному τ . Легко видеть, что наличие дискретного параметра $\sigma = \pm 1$ в этой задаче отвечает обратимости исходных уравнений по мнимому времени τ . Очевидно, что замена σ на $-\sigma$ соответствует просто замене τ на $-\tau$, т. е. инстантона на антиинстантон, и в дальнейшем мы можем положить $\sigma = 1$.

Учитывая, что величина P в инстантоне может быть комплексной, запишем $P = P_1 + iP_2$. Разделив вещественную и мнимую части, приходим к системе двух вещественных уравнений

$$2\dot{P}_1 = 1 - h^2 - P_1^2 + P_2^2, \quad \dot{P}_2 = -P_1 P_2. \quad (6)$$

На фазовой плоскости (P_1, P_2) эти уравнения имеют две особые точки, $P_1 = \pm\sqrt{1-h^2}$, $P_2 = 0$. Простой анализ показывает, что обе эти точки являются вырожденными узлами. При выборе $\sigma = +1$ (см. выше) реализуется неустойчивый узел при $P_1 = -\sqrt{1-h^2}$ и устойчивый узел при $P_1 = \sqrt{1-h^2}$, см. рис. 1. Следовательно, все фазовые траектории, выходящие из точки $P_1 = -\sqrt{1-h^2}$, $P_2 = 0$, достигают точки $P_1 = \sqrt{1-h^2}$, $P_2 = 0$, и уравнения (5) или (6) описывают непрерывное однопараметрическое семейство инстантонов, в кото-

рых $\mathbf{m} \rightarrow h\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z\sqrt{1-h^2}$ при $\tau \rightarrow -\infty$ и $\mathbf{m} \rightarrow h\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z\sqrt{1-h^2}$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Аналогично при $\sigma < 0$ получается такое же семейство антиинстантонов. Общее инстантонное решение уравнений (6) можно записать в явном виде,

$$\begin{aligned} P_1 &= \sqrt{1-h^2} \frac{\text{sh}\omega\tau}{\text{ch}\omega\tau + \cos\psi}, \\ P_2 &= \sqrt{1-h^2} \frac{\sin\psi}{\text{ch}\omega\tau + \cos\psi}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\omega = \sqrt{1-h^2}\omega_0$, произвольный вещественный параметр ψ принимает значения $0 \leq \psi < 2\pi$.

Наличие непрерывного семейства сепаратрисных траекторий является обычным свойством интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [31]. Следует ожидать, что и в данном случае реализуется эта ситуация, т. е. система (4) с двумя степенями свободы является интегрируемой. Ниже мы покажем, что свойство точной интегрируемости имеет место для всех инстантонных задач в ферромагнетиках, а сейчас обсудим свойства семейства решений (7).

Для частного случая $\psi = 0$ величина $P_2 = 0$, т. е. $\cos\theta$ есть вещественная величина, при этом φ чисто мнимое. Такие решения обсуждались в работе [7], но только как разрывные, т. е. имеющие скачки около положений равновесия. Среди класса решений (7) есть и разрывное решение, ему соответствует значение $\psi = \pi$.

На первый взгляд инстантоны типа (7) с различными значениями ψ существенно неэквивалентны. Например, при $\psi = \pi$ решение имеет сингулярность. Однако оказывается, что для всех таких решений значения евклидова действия совпадают. В этом легко убедиться, используя выражение (2) и выразив $\dot{\varphi}$ через θ с помощью полученной выше формулы $h \exp(i\varphi) = \sin\theta$. Из нее следует, что $i \sin\theta d\varphi = \cos\theta d\theta$, и евклидово действие записывается в виде контурного интеграла

$$A_E = \int_{-\sqrt{1-h^2}}^{\sqrt{1-h^2}} \frac{P dP}{1+P} \quad (8)$$

в комплексной плоскости P , т. е. на плоскости (P_1, P_2) , изображенной выше на рис. 1. Поскольку все контуры, определяющие путь интегрирования при различных $\psi \neq \pi$, не пересекают вещественную ось и единственный полюс в точке $P = -1$ не попадает внутрь области, ограниченной траекторией

с $\psi = 0$ и траекторией с некоторым $\psi \neq 0, \pi$, для всех них значение A_E одинаково,

$$\frac{A_E}{\hbar S} = -2\sqrt{1-h^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{1-h^2}}{1 - \sqrt{1-h^2}}.$$

Исследуя несобственный интеграл, легко убедиться, что и особый случай $\psi = \pi$ приводит к тому же выражению для A_E . Следовательно, в данной задаче существует бесконечное множество инстантонных путей, обладающих разной структурой, но имеющих одно и то же значение евклидова действия.

Этот, на первый взгляд, странный результат можно объяснить, заметив, что все решения (7) фактически могут быть записаны в виде комплексного сдвига аргумента одного вещественного решения. Действительно, взяв вещественное решение $P = \sqrt{1-h^2}$ и записывая $P = \sqrt{1-h^2} \text{th}(\omega\tau/2 + i\psi)$, мы приходим к выражению (7). Возникает вопрос, является ли возможность такого «размножения» инстантонных решений частным свойством модели (5) или непрерывные семейства инстантонов, характерные для интегрируемых динамических систем, присутствуют также для других моделей ферромагнетиков.

Для ответа на этот вопрос запишем уравнение движения для $P = \cos\theta$ и $Q = \varphi$, не конкретизируя вида энергии ферромагнетика $W(\theta, \varphi)$, в виде «комплексных» уравнений Гамильтона,

$$i\dot{P} = -\frac{\partial W}{\partial Q}, \quad i\dot{Q} = \frac{\partial W}{\partial P}. \quad (9)$$

Представим $W = H_1 + iH_2$, где H_1 и H_2 — вещественнозначные функции, и полагая P и Q комплексными, $P = P' + iP''$, $Q = Q' + iQ''$, разделим вещественную и мнимую части уравнений (9). В результате получается система четырех вещественных уравнений, в правые части которых будут входить производные H_1 и H_2 по переменным P' , P'' , Q' , Q'' . Но если потребовать, чтобы функция W была аналитической функцией комплексных переменных P и Q , т. е. чтобы функция W удовлетворяла условиям Коши–Римана по этим переменным независимо, то правые части можно переписать или через производные только от H_1 , или только от H_2 . В результате эта система уравнений становится гамильтоновой. В частности, выбрав пары канонических переменных следующим образом:

$$p_1 = P', \quad q_1 = Q'', \quad p_2 = P'', \quad q_2 = Q', \quad (10)$$

ее можно записать как $\dot{p}_i = -\partial H_1/\partial q_i$, $\dot{q}_i = \partial H_1/\partial p_i$, т. е. в виде гамильтоновой системы с двумя

степенями свободы, с функцией Гамильтона $H_1 = H_1(p_1, q_1, p_2, q_2)$ и дополнительным интегралом движения H_2 . Опять, используя только условие Коши – Римана для W , можно показать, что скобка Пуассона H_1 и H_2 , рассчитанная через канонические переменные p_i, q_i , равна нулю. Итак, мы приходим к выводу, что любая модель ферромагнетика с энергией W , аналитической относительно $\cos \theta$ и φ в указанном выше смысле, сводится к точно интегрируемой динамической системе и в принципе допускает построение бесконечной системы инстантонных траекторий.

Конкретное решение этой проблемы может существенно облегчить при учете того обстоятельства, что канонические пары переменных (10) содержат одну вещественную и одну мнимую части комплексных переменных P и Q . Поэтому можно искать такое частное решение, в котором изменяется только одна пара переменных $p_1 = p_1^{(0)}(\tau), q_1 = q_1^{(0)}(\tau)$, а другая тождественно равна нулю, $p_2 = 0, q_2 = 0$. Как мы видели, этому условию соответствует решение вида (7) с $\psi = 0$, при этом значения переменной φ — чисто мнимые (или φ равно нулю). Далее, используя комплексный сдвиг аргумента,

$$P(\tau) = p_1^{(0)}(\tau + i\psi), \quad Q(\tau) = q_1^{(0)}(\tau + i\psi),$$

можно получить общее решение с $p_{1,2}, q_{1,2} \neq 0$. Наличие частных решений, в которых некоторые из переменных вещественны, а другие чисто мнимые или равны нулю, известно для многих моделей магнетиков, см., например, [32]. Ниже мы продемонстрируем эффективность этого приема для ряда физически интересных моделей ферромагнетика.

Может создаться впечатление, что условие аналитичности энергии W по обеим комплексным переменным $P = \cos \theta$ и $Q = \varphi$ является достаточно жестким. В частности, энергия вида (5) не удовлетворяет этому требованию, так как содержит $\sin \theta = \sqrt{1 - P^2}$ и точки ветвления по переменной P . Однако эту проблему можно разрешить соответствующим выбором полярной оси системы координат. Действительно, энергия ферромагнетика включает энергию магнитной анизотропии W_a и зеemannовскую энергию во внешнем магнитном поле \mathbf{H} , $W_H = g\mu_B \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}$. Выбирая полярную ось вдоль \mathbf{H} , получаем $W_H = -g\mu_B H S \cos \theta = g|\mu_B| H S P$. Энергия анизотропии представляет собой полином по четным степеням компонент спина, и для магнетиков с симметрией не ниже ромбической содержит только квадраты компонент спина (исключение — ромбоэдрические магнетики, энергия которых содержит инвариант вида $\sin^3 \theta \cos \theta \cos 3\varphi$). Таким образом,

для всех магнетиков с симметрией не ниже ромбической, за исключением ромбоэдрических, условие аналитичности энергии W выполняется для ориентации магнитного поля вдоль симметричных направлений. Нам представляется, что это ограничение в выборе модели не является очень жестким. Кроме того, по-видимому, наличие конечного числа особых точек типа точек ветвления не препятствует проявлению свойств интегрируемости, в частности, наличию вырожденных семейств инстантонов и возможности их построения. Мы убедимся в этом на конкретном примере ниже в разд. 4, в котором будут построены такие семейства инстантонов для случая магнитного поля, не совпадающего с осью симметрии кристалла. Однако, поскольку анализ этого случая достаточно громоздкий, уместно начать с более простого случая ромбического ферромагнетика в магнитном поле, параллельном одной из осей симметрии, что и будет сделано в следующем разд. 3.

3. АНАЛИЗ МОДЕЛИ ФЕРРОМАГНЕТИКА С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ, НАПРАВЛЕННЫМ ВДОЛЬ ОСЕЙ РОМБИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ

Рассмотрим инстантонные решения для магнетика с ромбической анизотропией, считая, что в энергии (1) константа $\tilde{K} = 0$. Начнем с более простого случая, когда поле направлено вдоль одной из осей симметрии и $W(\cos \theta, \varphi)$ является аналитической функцией своих аргументов во всей области их изменения. В дальнейшем удобно считать, что магнитное поле всегда направлено вдоль какой-то одной оси, например, оси y . Введем безразмерный параметр $\lambda = K_1/K_2$, случай $\lambda < 1$ соответствует тому, что ось y является трудной осью ферромагнетика, а ось x — промежуточной осью, при $\lambda > 1$ классификация осей обратная. Таким образом, меняя значение параметра λ , мы получаем все интересные случаи, для $\lambda < 1$ магнитное поле направлено вдоль трудной оси анизотропии, а при $\lambda > 1$ поле параллельно промежуточной оси. Поскольку при построении инстантонов и вычислении евклидова действия достаточно рассматривать только такие значения намагниченности, при которых $W = 0$, мы будем опускать множитель $K_2/2$ в энергии, а также параметр $\omega_0 = K_2 S/\hbar$ в решении. Выберем начало отсчета энергии так, чтобы в основном состоянии $W = 0$. С учетом этого будем исходить из энергии ферромагнетика, записанной в безразмерном виде:

$$W(\mathbf{m}) = \frac{\lambda}{2} m_x^2 + \frac{1}{2} (m_y - h)^2, \quad (11)$$

где $h = g\mu_B H / K_2 S$.

Система уравнений для инстантонов в этой модели ферромагнетика имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dm_x}{d\tau} &= i(m_y - h)m_z, & \frac{dm_y}{d\tau} &= -i\lambda m_x m_z, \\ \frac{dm_z}{d\tau} &= i[(\lambda - 1)m_y + h]m_x, \end{aligned} \quad (12)$$

инстантонные решения расположены на поверхностях уровня интегралов

$$\lambda m_x^2 + (m_y - h)^2 = 0 \quad \text{и} \quad m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1.$$

Отсюда $m_y - h = i\sigma\sqrt{\lambda}m_x$, $\sigma = \pm 1$, т. е. связь между m_x и m_y на инстантонном решении линейная. Система уравнений (12) имеет точный класс решений

$$m_x = ix, \quad m_y = y, \quad m_z = z, \quad (13)$$

где x, y, z — действительные переменные. Тогда для переменных x, y, z получается вещественная система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= (y - h)z, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \lambda xz, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -[(\lambda - 1)y + h]x. \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что можно не ограничиваться вещественными решениями (14) и рассматривать подстановку (13) просто как замену переменных, допуская, что величины x, y, z являются комплексными переменными. В принципе так надо поступать для построения общего инстантонного решения, принадлежащего к однопараметрическому семейству. Однако, как отмечалось в предыдущем разделе, для простейшего случая одноосного ферромагнетика гораздо удобнее построить сначала некое более простое симметричное решение с вещественными x, y, z , а затем продолжить его за счет мнимого сдвига по независимой переменной τ . Такой же оказывается специфика сдвига по τ и в случае ромбического ферромагнетика.

Интересующие нас инстантонные решения расположены на поверхностях уровня первых интегралов

$$\lambda x^2 - (y - h)^2 = 0 \quad \text{и} \quad -x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (15)$$

в силу чего получается линейная связь переменных x и y , $y - h = \sigma\sqrt{\lambda}x$, $\sigma = \pm 1$, и простая связь переменных x и z :

$$(\lambda - 1) \left(x + \frac{\sigma h \sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} \right)^2 + z^2 = 1 + \frac{h^2}{\lambda - 1}. \quad (16)$$

Здесь на примере анализа действительного класса решений хорошо видно, что при изменении параметров задачи в ней возникают бифуркации. Уравнение (16) описывает различные кривые второго порядка на плоскости (x, y) : при $\lambda > 1$ получается эллипс, а при $\lambda < 1$ — системы гипербол, которые при малых и больших полях, $h^2 < 1 - \lambda = h_c^2$ и $1 - \lambda < h^2 < 1$, находятся в различных секторах плоскости (x, y) . В предельных случаях $\lambda = 1$ (одноосный ферромагнетик) или $h^2 = h_c^2$ уравнение (16) описывает соответственно параболу или две пересекающиеся прямые. Естественно, все эти кривые проходят через точки, отвечающие положениям равновесия, $z = \pm\sqrt{1 - h^2}$, $x = 0$, однако поведение их существенно различное, см. ниже. С учетом того факта, что при $h^2 > 1$ отсутствует вырождение основного состояния и туннелирование невозможно, мы получаем три различные области для инстантонов. Как мы убедимся в дальнейшем, для всех этих трех областей возникают существенно различные свойства инстантонных решений. В частности, значение h_c совпадает с введенным ранее в работе [7] и затем авторами работ [27, 28] критическим значением поля, выше которого исчезают эффекты деструктивной интерференции. Однако авторы этих работ получали значение h_c из других соображений, утверждая, что при $h > h_c$ непрерывные инстантонные решения отсутствуют и надо вводить или разрывные инстантоны [27], или инстантоны, которые частично проходят в обычном вещественном времени [28]. Вполне вероятно, что такие экзотические инстантонные пути могут быть полезными для каких-либо иных туннельных проблем. Однако мы увидим, что для ферромагнетиков в рамках модели (1) с учетом наличия бесконечного семейства инстантонов, получаемых с помощью комплексного сдвига описанного выше типа, для всех указанных выше областей существуют стандартные инстантонные решения с чисто вещественным τ и без разрывов. По существу, разрывными являются только решения с избранными значениями параметра комплексного сдвига ψ . Это лучше всего продемонстрировать на примере случая $1 - h^2 < \lambda < 1$, когда магнитное поле мало, $h^2 < h_c^2 = 1 - \lambda$, и величина $\lambda < 1$, т. е. магнитное поле приложено вдоль трудной оси магнетика.

Слабое поле, параллельное трудной оси

Как раз этот случай был детально исследован Гаргом [7], для него предсказаны и экспериментально наблюдались осцилляции вероятности перехода с изменением поля [16–26]. Используемые в [7] инстантонные пути не отвечали предположению, что

m_y и m_z являются вещественными, а m_x — чисто мнимое. Однако начнем с поиска именно таких решений, с тем чтобы получить общие решения комплексным сдвигом аргумента. В частности, при этом будут получены и инстантоны такого вида, как в работе [7]. Запишем (16) в каноническом виде:

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \tag{17}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\sigma h \sqrt{\lambda}}{1-\lambda}, & a^2 &= \frac{1}{1-\lambda} \left(1 - \frac{h^2}{1-\lambda}\right), \\ b^2 &= \frac{1-\lambda-h^2}{1-\lambda}. \end{aligned} \tag{18}$$

Ветви гиперболы, описываемые этим уравнением, суть интегральные кривые системы уравнений (14). Для вещественных x, y, z они вообще не соединяют точки, отвечающие различным положениям равновесия, т.е. точки $x=0, z=\sqrt{1-h^2}$ и $x=0, z=-\sqrt{1-h^2}$, в конечной области плоскости (x, z) . Однако инстантонное решение, которое соединяет эти точки, существует. Чтобы его построить, введем параметризацию, $x = x_0 + a \operatorname{sh} \phi, z = b \operatorname{ch} \phi$, и, используя первое уравнение системы (14), получим уравнение для ϕ

$$a \frac{d\phi}{d\tau} = \sigma \sqrt{\lambda} (x_0 + a \operatorname{sh} \phi) b,$$

решение которого легко записывается в явном виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{th} \frac{\phi}{2} &= \operatorname{sh} \gamma + \operatorname{ch} \gamma \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} (\xi + i\psi) \right], \\ \xi &= \sigma \lambda^{1/2} (1-h^2)^{1/2} (\tau - \tau_0), \\ \operatorname{sh} \gamma &= \frac{\sigma (1-\lambda)^{1/2} (1-h^2)^{1/2}}{h \lambda^{1/2}}. \end{aligned} \tag{19}$$

В этой формуле ψ — произвольное комплексное число, т.е. явно отмечена возможность как комплексного, так и вещественного сдвига аргумента. Явные выражения для компонент спина в инстантоне при этом описываются достаточно длинными формулами, но после тривиальных вычислений их можно упростить, сдвинув аргумент на введенную выше вещественную величину γ , здесь и далее мы используем обозначение $\bar{\xi} = \omega \tau + \gamma + i\psi$ с характерной частотой $\omega = \omega_0 \lambda^{1/2} (1-h^2)^{1/2} = (S/\hbar) \sqrt{K_1 K_2 (1-h^2)}$; в результате получается

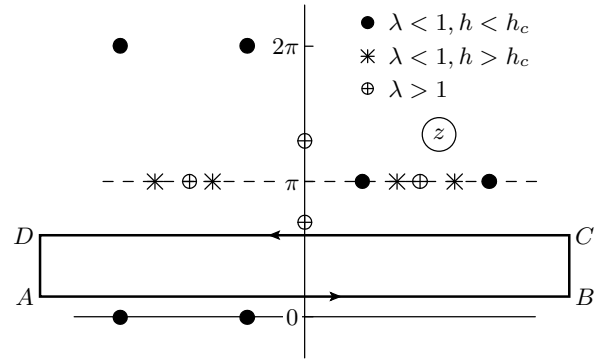


Рис. 2. Комплексная плоскость z , контур интегрирования $ABCD$ и расположение полюсов функции $F(z)$. Сплошные кружки — рассматриваемый сейчас случай малого поля, другие символы отвечают рассмотренным ниже другим областям значений параметров задачи λ и h

$$\begin{aligned} m_z &= \sigma \sqrt{1-h^2} \frac{\operatorname{ch} \xi}{1/\operatorname{sh} \gamma - \operatorname{sh} \xi}, \\ m_x &= i \frac{1-h^2}{(1-\lambda-h^2)^{1/2}} \frac{1}{1/\operatorname{sh} \gamma - \operatorname{sh} \xi}, \\ m_y &= \left[\frac{\sigma \lambda^{1/2}}{(1-\lambda-h^2)^{1/2}} - h \operatorname{sh} \xi \right] \frac{1}{1/\operatorname{sh} \gamma - \operatorname{sh} \xi}. \end{aligned} \tag{20}$$

(В этой формуле и ниже мы не пишем черту над ξ , допуская произвольные сдвиги аргумента, как вещественные, так и комплексные.) Тогда, в частности, сразу получается, что отмеченная выше сингулярность присутствует в решении только при избранных значениях ψ , а именно, при $\psi = 0, \pi$. При всех остальных значениях ψ сингулярность отсутствует, точнее, она смещается в комплексную плоскость и не проявляется при вещественных значениях мнимого времени τ . Интересно отметить, что при выборе полярной оси вдоль магнитного поля (оси y) азимутальный угол намагниченности φ , который является чисто мнимым на решениях вида (13),

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_x}{m_z} = i \sigma \frac{(1-h^2)^{1/2}}{(1-\lambda-h^2)^{1/2}} \frac{1}{\operatorname{ch} \xi},$$

становится вещественным при $\psi = \pi/2$, когда $\operatorname{ch}(\xi + i\pi/2) \rightarrow i \operatorname{sh} \xi$. В случае $\psi = \pi/2$ угол φ проходит от нуля до π через $\pi/2$ при изменении τ от ∞ до $-\infty$, при этом угол θ , а также все компоненты намагниченности являются комплексными. Структура решения при $\psi = \pi/2$ напоминает структуру инстантонного пути, использованного Гаргом в работе [7]. При всех остальных ψ как угол θ , так и угол φ комплексны, причем вещественная часть угла φ не доходит до $\pi/2$.

Итак, мы пришли к весьма сложной структуре инстантонных путей, с комплексными значениями всех компонент спина или угловых переменных для намагниченности θ и φ . Среди найденных решений есть и сингулярные. Однако ситуация для физически интересной величины, евклидова действия A_E , оказывается, как и в предыдущем разделе, весьма простой и прозрачной. Расчет евклидова действия в данном случае также удобно провести через контурные интегралы. Однако в этом случае удобнее

использовать комплексную переменную ξ и выбрать направление сингулярного луча (струны Дирака) вдоль отрицательного направления оси m_y . Дело в том, что использование интегрирования по комплексной переменной P для ромбического ферромагнетика не имеет той простоты и наглядности, какая имела место в рассмотренном выше чисто одноосном случае, так как при $\lambda \neq 1$ на плоскости P возникают точки ветвления. В результате евклидово действие записывается в виде интеграла

$$A_E = \sigma \hbar S \frac{(1 - h^2)^{3/2}}{(1 + h)(1 - \lambda - h^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\text{sh}(\xi + i\psi)}{[\text{sh}(\xi + i\psi) - (\sigma/h) \text{sh} \gamma] [\text{sh}(\xi + i\psi) - \sigma / \text{sh} \gamma]}, \quad (21)$$

где мы восстановили комплексный сдвиг по переменной ξ . Этот интеграл можно рассматривать как интеграл по некоторому контуру L в комплексной плоскости $z = \xi$,

$$A_E = \hbar S \int_L dz F(z),$$

$$F(z) = \sigma \frac{(1 - h^2)^{3/2}}{(1 + h)(1 - \lambda - h^2)^{1/2}} \times \frac{\text{sh} z}{[\text{sh} z - (\sigma/h) \text{sh} \gamma] [\text{sh} z - \sigma / \text{sh} \gamma]}, \quad (22)$$

где контур L — это прямая на комплексной плоскости, параллельная действительной оси ($\text{Im} z = \psi$) и проходящая от нее на расстоянии ψ . Далее понятно, что можно легко найти разность значений евклидова действия A_E для различных значений ψ через простой интеграл по замкнутому контуру, см. рис. 2.

Зафиксируем два значения ψ_1 и ψ_2 , $\psi_1 < \psi_2$. Рассмотрим контур (прямоугольник) $ABCD$, где $A = -R + i\psi_1$, $B = R + i\psi_1$, $C = R + i\psi_2$, $D = -R + i\psi_2$, R — действительное число. Очевидно, при $R \rightarrow \infty$

$$\int_{BC} F(z) dz \rightarrow 0, \quad \int_{DA} F(z) dz \rightarrow 0,$$

так что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{AB} F(z) dz - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{DC} F(z) dz = \oint_{ABCD} F(z) dz$$

и определяется интегралом по замкнутому контуру, охватывающему прямоугольник $ABCD$. Следовательно, разность значений евклидова действия для разных ψ ,

$$A_E(\psi_1) - A_E(\psi_2) = \hbar S \oint_{ABCD} F(z) dz,$$

выражается через сумму вычетов функции $F(z)$, попадающих в этот прямоугольник (полосу $\psi_1 < \psi_2$). Таким образом, евклидово действие не зависит от ψ в некоторых интервалах изменения ψ , и функция $A_E(\psi)$ меняется скачком, когда при изменении ψ контур $ABCD$ пересекает полюс. Поскольку функция $F(z)$ является периодической по ψ с периодом 2π , функция $A_E(\psi)$ также периодическая, и достаточно рассмотреть изменение $A_E(\psi)$ в полосе шириной 2π . Легко видеть, что в этой полосе находятся четыре полюса функции $F(z)$ и сумма всех этих четырех вычетов равна нулю. Отметим также, что при замене $\psi \rightarrow \psi + \pi$ и $\sigma \rightarrow -\sigma$ интеграл (22) не меняется, так что можно ограничиться анализом какого-то одного знака σ , например, $\sigma = 1$. Это будет справедливо и для других соотношений между значениями параметров задачи h и λ , см. ниже, но свойства вычетов будут другими, что приведет к изменению зависимости A_E от ψ .

Для рассматриваемого случая слабого поля, приложенного вдоль трудной оси, $h^2 < h_c^2 = 1 - \lambda$, $\lambda < 1$, два полюса функции $F(z)$, z_1 и z_2 , расположены на вещественной оси в точках $z_1 = \zeta_1$ и $z_2 = \zeta_2$, где ζ_1 и ζ_2 — вещественные решения уравнений $\text{sh} \zeta_1 = 1 / \text{sh} \gamma$ и $\text{sh} \zeta_2 = 1 / (h \text{sh} \gamma)$, а два других полюса — в точках $z_3 = -\zeta_1 + i\pi$ и $z_4 = -\zeta_2 + i\pi$. Суммы вычетов в парах точек z_1 и z_3 , z_2 и z_4 равны нулю, тогда как суммы вычетов в парах точек с различными значениями ζ , z_1 и z_2 , z_3 и z_4 вещественны, например, $\text{Re}z[F(z_1)] + \text{Re}z[F(z_2)] = 1 - h / \sqrt{1 - \lambda}$.

Следовательно, при переходе параметра ψ через значения $0, \pi, 2\pi$ и так далее величина $A_E(\psi)$ приобретает чисто мнимую добавку $\pm 2\pi i\hbar S[1 - h/\sqrt{1 - \lambda}]$. Величину A_E при некотором конкретном значении ψ можно легко сосчитать (удобно выбрать $\psi = \pi/2$), и с учетом описанных выше свойств A_E мы приходим к выражению

$$A_E = \hbar S \left[\ln \frac{\sqrt{1 - h^2} + \lambda}{\sqrt{1 - h^2} - \lambda} - \frac{h}{\sqrt{1 - \lambda}} \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{\sqrt{(1 - h^2)(1 - \lambda)} + h\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(1 - h^2)(1 - \lambda)} - h\sqrt{\lambda}} \right] + \\ + \frac{i\pi\hbar S}{\sqrt{1 - \lambda}} \frac{\sin \psi}{|\sin \psi|} (\sqrt{1 - \lambda} - h), \\ h^2 < h_c^2 = 1 - \lambda. \quad (23)$$

Таким образом, мы получили, что для случая слабого поля, направленного вдоль трудной оси, вещественная часть евклидова действия вообще не зависит от ψ , и все инстантонные траектории, регулярные и сингулярные, вещественные и комплексные, вносят одинаковый вклад в туннельную экспоненту $\exp(-\text{Re}[A_E]/\hbar)$. При этом мнимая часть A_E зависит только от $\sin \psi/|\sin \psi|$. Это означает, что все траектории, для которых параметр ψ лежит в различных полосах одинаковой ширины π , ведут себя одинаково и что возникает интерференция инстантонных траекторий со значениями ψ , лежащими в этих соседних полосах.

Ниже мы проведем анализ инстантонных решений в двух остальных случаях, которые возникают при ориентации внешнего магнитного поля вдоль симметричных направлений. Для случая сильного поля, $1 - \lambda < h^2 < 1$, вдоль трудной оси при $\lambda < 1$, а также в случае, когда поле направлено вдоль промежуточной оси, т. е. $\lambda > 1$, интегральные кривые системы уравнений (14) соединяют точки, отвечающие различным, но эквивалентным положениям равновесия для вещественных x, y, z . Это означает, что в этих двух случаях существуют несингулярные инстантоны с вещественными x, y, z . Однако с учетом комплексной природы инстантонов никаких принципиальных различий в структуре общих инстантонных решений здесь не появляется.

Инстантоны для случая сильного поля вдоль трудной оси

Инстантонные решения для сильного поля $h^2 > 1 - \lambda > 0$ анализируются практически так же, как в предыдущем подразделе. Как и для слабого поля, интегральные кривые системы (14) суть кривые второго порядка с параметрами, определяемыми формулами типа (18). При $1 - \lambda < h^2 < 1$ возникает гипербола вида $(x - x_0)^2/a^2 - z^2/b^2 = 1$, где выражение для x_0 такое же, как для слабого поля, см. (18), а выражения для величин a^2 и b^2 отличаются знаком от тех, что приведены в (18). Для построения инстантонного решения, которое соединяет точки равновесия, введем параметризацию $x = x_0 + a \text{ch } \phi, z = b \text{sh } \phi$. Далее, используя первое уравнение системы (14), получим уравнение для ϕ в виде

$$a \frac{d\phi}{d\tau} = \sigma \sqrt{\lambda} (x_0 + a \text{ch } \phi) b.$$

Решение этого уравнения удобно записать в виде

$$\text{th } \frac{\phi}{2} = \frac{h\sqrt{\lambda} + \sigma(h^2 + \lambda - 1)^{1/2}}{((1 - h^2)(1 - \lambda))^{1/2}} \text{th} \left[\frac{1}{2}(\xi + i\psi) \right],$$

где переменная ξ такая же, как для слабого поля, см. (19). Далее можно записать явные выражения для компонент спина в инстантоне

$$m_z = \sigma(1 - h^2)^{1/2} \frac{(h^2 + \lambda - 1)^{1/2} \text{sh } z}{\sigma h \lambda^{1/2} - (h^2 + \lambda - 1)^{1/2} \text{ch } z}, \\ m_x = \frac{i\sigma(1 - h^2)}{h\lambda^{1/2} - \sigma(h^2 + \lambda - 1)^{1/2} \text{ch } z}, \quad (24) \\ m_y = \frac{\lambda^{1/2} - h\sigma(h^2 + \lambda - 1)^{1/2} \text{ch } z}{h\lambda^{1/2} - \sigma(h^2 + \lambda - 1)^{1/2} \text{ch } z},$$

где $z = \xi + i\psi$. Евклидово действие легко представить в виде интеграла такого же типа, что и (21) или (22),

$$A_E = \hbar S \int_L dz F(z),$$

с той разницей, что функция $F(z)$ теперь определяется выражением

$$F(z) = \frac{(1 - h)(1 - h^2)^{1/2}(\lambda + h^2 - 1)^{1/2} \text{ch } z}{[(\lambda + h^2 - 1)^{1/2} \text{ch } z - \sigma\lambda^{1/2}h][(\lambda + h^2 - 1)^{1/2} \text{ch } z - \sigma\lambda^{1/2}]}. \quad (25)$$

Инстантоны для поля вдоль промежуточной оси

Рассмотрим теперь последний случай, когда поле ориентировано вдоль промежуточной оси, т.е. $\lambda > 0$. В таком случае интегральная кривая есть эллипс $(x - x_0)^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$, с тем же x_0 и значениями $a^2 = (\lambda + h^2 - 1)/(\lambda - 1)^2$, $b^2 = (\lambda + h^2 - 1)/(\lambda - 1)$. Параметризацию решения выбираем в виде $x = x_0 + a \cos \phi$, $z = b \sin \phi$, где ϕ описывается уравнением

$$a \frac{d\phi}{d\tau} = -\sigma \sqrt{\lambda} (x_0 + a \cos \phi) b.$$

Решение этого уравнения, так же как и формулы для компонент спина, легко записываются в явном виде. Мы не будем, однако, выписывать эти громоздкие выражения, так как их можно получить из формул (24). Для этого достаточно отметить, что в формулы для компонент спина (24), так же как и в представление евклидова действия через интеграл (25), константа ромбической анизотропии λ вошла только в виде $\sqrt{h^2 - 1 + \lambda}$ и $\sqrt{\lambda}$, а комбинация $(1 - \lambda)$, знак которой различает эти два случая, не появляется под квадратным корнем. В этой ситуации следует ожидать, что соответствующие формулы для двух областей значений параметров будут эквивалентными. Так и получается, выражения для компонент спина и для функции $F(z)$ в случае $\lambda > 1$ совпадают соответственно с (24) и (25), если в последних сделать замену $\sigma \rightarrow -\sigma$. Поскольку такая замена эквивалентна комплексному сдвигу аргумента на величину $i\pi$, т.е. замене $\psi \rightarrow \psi + \pi$, оба случая можно рассматривать на основе одного и того же выражения для функции $F(z)$, которое выберем в виде

$$F(z) = \frac{(1 - h^2)^{3/2}}{(1 + h)(1 - \lambda - h^2)^{1/2}} \times \frac{\operatorname{ch} z}{[\operatorname{ch} z + \operatorname{ch} \beta][\operatorname{ch} z + h \operatorname{ch} \beta]}, \quad (26)$$

где

$$\operatorname{ch} \beta = \frac{\lambda^{1/2}}{(h^2 + \lambda - 1)^{1/2}}.$$

Выражение (26) справедливо как для случая сильного поля вдоль трудной оси, так и при произвольной величине магнитного поля при его ориентации вдоль промежуточной оси. Мы увидим, однако, что поведение евклидова действия как функции ψ будет в этих двух случаях существенно различным, и оно также будет отличаться от рассмотренного в начале настоящего раздела случая слабого поля, лежащего вдоль трудной оси.

Вычисление евклидова действия при $h^2 > 1 - \lambda$

Неравенство $h^2 > 1 - \lambda$ включает оба случая, обсужденных выше: сильное поле вдоль трудной оси и поле вдоль промежуточной оси. Для вычисления евклидова действия воспользуемся тем же методом, что и выше для слабого поля. Для функции вида (26) на вещественной оси при $\psi = 0$ особенностей нет и значение интеграла вещественно, оно легко может быть вычислено в явном виде, см. ниже формулу (27). Далее, значения $A_E(\psi)$ при $\psi \neq 0$ выражаются через величину контурного интеграла по прямоугольнику $ABCD$, и разность значений $A_E(\psi)$ и $A_E(0)$ определяется суммой вычетов полюсов, попадающих в соответствующую полосу.

Отметим, что в обоих интересующих нас сейчас случаях $h^2 > 1 - \lambda$, и $\operatorname{ch} \beta > 1$, т.е. величина β вещественна. Поэтому два полюса из четырех, имеющих в полосе $0 \leq \psi < 2\pi$, расположены в точках $z_{1,2} = i\pi \pm \beta$. Сумма вычетов в этих точках равна нулю, и при пересечении контуром линии $z = i\pi$ значение $A_E(\psi)$ не изменяется. Далее, для сильного поля, приложенного вдоль трудной оси, $h_c^2 < h^2 < 1$ при $\lambda < 1$, величина $h \operatorname{ch} \beta > 1$ и вторая пара полюсов также расположена на той же линии, $z_{3,4} = i\pi \pm \beta'$, величина β' вещественная. Эта пара полюсов также имеет нулевую сумму вычетов. Следовательно, для рассматриваемого случая сильного поля, приложенного вдоль трудной оси, A_E вообще не зависит от ψ , $A_E(\psi) = A_E(0)$. Поскольку значение $A_E(0)$ вещественно, мнимая часть евклидова действия равна нулю и интерференция отсутствует. Исчезновение интерференции при увеличении поля соответствует эксперименту [24, 25] (см. также обзор [16]), а также расчетам с использованием разрывных инстантонных решений или пробных функций [27, 28]. Отметим, что в нашем расчете в случае сильного поля решение с разрывами при вещественном τ имеется только при $\psi = \pi$, но они ничем не выделены среди остальных траекторий бесконечного однопараметрического семейства. Итак, в случае сильного магнитного поля, приложенного вдоль трудной оси, вещественная часть A_E вообще не зависит от ψ ,

$$A_E = \hbar S \left[\ln \frac{\lambda + \sqrt{1 - h^2}}{\lambda - \sqrt{1 - h^2}} - \frac{h}{\sqrt{1 - \lambda}} \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{h\sqrt{\lambda} + \sqrt{(1 - h^2)(1 - \lambda)}}{h\sqrt{\lambda} - \sqrt{(1 - h^2)(1 - \lambda)}} \right], \quad (27)$$

$$0 < 1 - \lambda = h_c^2 < h^2,$$

и все инстантонные траектории с параметром ψ в полосе $0 \leq \psi < 2\pi$ вносят одинаковый вклад в A_E .

Для случая поля, параллельного промежуточной оси, два полюса функции $F(z)$, z_1 и z_2 , по-прежнему расположены на оси $\text{Im}(z) = \pi$ в точках $z_{1,2} = i\pi \pm \beta$. Однако в случае $\lambda > 1$ величина $h \text{ch } \beta < 1$, и два других полюса смещаются с линии $\text{Im}(z) = \pi$, они расположены в точках $z_3 = i(\pi - b)$, $z_4 = i(\pi + b)$, где b — вещественные решения уравнения $\cos b = h \text{ch } \beta < 1$. Значения вычетов в этих точках чисто мнимые, они равны по модулю и имеют противоположный знак, $\text{Rez}[F(z_3)] = -ih/\sqrt{\lambda - 1}$, $\text{Rez}[F(z_4)] = +ih/\sqrt{\lambda - 1}$. Таким образом, евклидово действие, как и для случая слабого поля, зависит от ψ . Евклидово действие $A_E(\psi)$ меняется скачком, когда при изменении ψ контур $ABCD$ пересекает полюс. Однако в случае $\lambda > 1$ скачок функции $\Delta A_E(\psi)$ вещественный, и он происходит при $\psi = \pi - b$ и $\psi = \pi + b$, т. е. при значениях ψ , зависящих от параметров задачи. Итак, в полосе $0 \leq \psi \leq \pi - b$ евклидово действие не зависит от ψ и имеет наименьшее значение $A_E^{(min)}$:

$$A_E^{(min)} = \hbar S \left[\ln \frac{\lambda + \sqrt{1 - h^2}}{\lambda - \sqrt{1 - h^2}} - \frac{4h}{\sqrt{\lambda - 1}} \times \right. \\ \left. \times \arctg \frac{\sqrt{(1 - h^2)(1 - \lambda)}}{h\sqrt{\lambda} + \sqrt{h^2 + \lambda - 1}} \right], \quad (28)$$

при $\psi = \pi - b$ оно скачком увеличивается до значения

$$A_E^{(max)} = A_E^{(min)} + 2\pi\hbar S h / \sqrt{1 - \lambda},$$

сохраняет это значение во всей полосе $\pi - b \leq \psi \leq \pi + b$, при $\psi = \pi + b$ скачком возвращается к значению $A_E^{(min)}$ и сохраняет это значение при дальнейшем росте ψ до 2π , т. е. в полосе $\pi + \beta \leq \psi \leq 2\pi$. По духу инстантонного подхода надо учитывать только пути с наименьшим значением евклидова действия. Значит, при таком поведении $A_E(\psi)$ при изменении поля непрерывно меняется относительный вес тех инстантонных путей, которые обеспечивают наименьшее значение экспоненциального множителя $\exp(-\text{Re}[A_E]/\hbar)$ и вносят вклад в туннелирование. Относительная ширина этого интервала $(\pi - \beta)/\pi$ стремится к $1/2$ при $h \rightarrow 0$ и растет до максимального значения, равного единице, при

$h \rightarrow 1$. Появление связанного с этим фактором дополнительного множителя в выражении для вероятности туннельного перехода является исключительным следствием впервые указанной нами структуры инстантонных путей, а именно, наличия однопараметрических семейств инстантонных траекторий вместо конечного числа инстантонов в стандартной теории. Мы обсудим этот вопрос подробнее в заключительном разделе работы.

4. ИНСТАНТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ПОЛЯ В БАЗИСНОЙ ПЛОСКОСТИ

В работах [24, 25] туннельное расщепление уровней измерялось как при изменении внешнего магнитного поля по величине, так и при вращении поля в базисной плоскости магнетика. Поэтому для интерпретации экспериментальных данных важен анализ случая произвольной ориентации поля в плоскости (x, y) , перпендикулярной легкой оси магнетика. Однако этот случай практически не исследован теоретиками. Нам известна только работа [33], в которой анализ инстантонов производился на основе приближенного сведения лагранжиана к задаче о динамике частицы с некоторой эффективной массой, что заведомо неприменимо в наиболее интересном случае $\lambda \sim 1$. Как мы покажем, развитый нами подход и в этом сложном случае также дает возможность построения точных инстантонных решений.

В случае произвольной ориентации поля условие, что энергия равна своему минимальному значению, дает соотношение $\lambda(m_x - h_x/\lambda)^2 + (m_y - h_y)^2 = 0$. Поэтому на инстантонном решении тоже имеет место линейная связь m_x, m_y , или, в комплексных обозначениях (13),

$$y = \sigma x \sqrt{\lambda} + h_y - i h_x \sigma / \sqrt{\lambda},$$

но уже теперь все компоненты намагниченности являются комплексными. Но это не мешает выбрать параметризацию через переменную ϕ того же типа, что и ранее, записать уравнения для ϕ и решить их. В результате получаются весьма громоздкие формулы для функции $\phi = \phi(\tau)$ в решении и несколько менее громоздкие для компонент намагниченности,

$$\begin{aligned}
 m_x &= \frac{h_x(H_1^2 + \lambda - 1)^{1/2} \operatorname{ch} z - i\sigma(1 - h_y H_1)}{\sigma H_2 \lambda^{1/2} + (H_1^2 + \lambda - 1)^{1/2} \operatorname{ch} z}, \\
 m_y &= \frac{h_y(H_1^2 + \lambda - 1)^{1/2} \operatorname{ch} z + \sigma \lambda^{1/2}(1 - i\sigma h_x H_1/\lambda^{3/2})}{\sigma H_2 \lambda^{1/2} + (H_1^2 + \lambda - 1)^{1/2} \operatorname{ch} z}, \\
 m_z &= \sigma(1 - H_0^2)^{1/2} \frac{(H_1^2 + \lambda - 1)^{1/2} \operatorname{sh} z}{\sigma H_2 \lambda^{1/2} + (H_1^2 + \lambda - 1)^{1/2} \operatorname{ch} z}.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Здесь по-прежнему $z = \xi + i\psi$, что позволяет учесть комплексный сдвиг переменной τ в решении, и введены обозначения

$$\begin{aligned}
 H_1 &= h_y - ih_x \sigma / \lambda^{1/2}, \quad H_2 = h_y - ih_x \sigma / \lambda^{3/2}, \\
 H_0 &= (h_y^2 + h_x^2 / \lambda^2)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Значение $H_0 = 1$ отвечает главной бифуркации задачи, вырождение классического основного состояния, эффекты туннелирования и инстантоны присутствуют только при $H_0 < 1$. Симметрия этого решения ниже, чем в рассмотренном выше случае симметричной ориентации поля, и выражение для евклидова действия с использованием стандартного выбора струны Дирака \mathbf{n} вдоль трудной оси получается весьма громоздким. Однако, выбирая \mathbf{n} антипараллельно направлению магнитного поля, нормированного на локальное значение поля анизотропии, т.е. в виде $\mathbf{n} = (\mathbf{e}_x h_x / \lambda + \mathbf{e}_y h_y) / H_0$, это выражение удастся существенно упростить и представить евклидово действие в виде интеграла

$$\begin{aligned}
 A_E &= \hbar S \int_L dz F(z), \\
 F(z) &= \frac{H_1(1 - H_0^2)^{3/2}}{H_0(1 + H_0)(\lambda - 1 + H_1^2)^{1/2}} \times \\
 &\times \frac{\operatorname{ch} z}{[\operatorname{ch} z + R][\operatorname{ch} z + H_0 R]},
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

где обозначено

$$R = \frac{\sigma \lambda^{1/2}}{H_0(\lambda - 1 + H_1^2)^{1/2}} H_2.$$

Как и ранее, этот интеграл берется по контуру L , т.е. по прямой на комплексной плоскости, z , параллельной действительной оси. Это позволяет учесть комплексный сдвиг по переменной ξ в инстантонном решении. Далее можно вычислить A_E для какого-то значения ψ (удобно взять $\psi = 0$) и найти разности значений евклидова действия A_E для различных значений ψ . Зависимость $A_E = A_E(\psi)$ определяется положением полюсов подынтегральной функции (30), которые расположены в точках

$$z_1 = 2i\pi k + i\pi \pm \zeta_1, \quad z_2 = 2i\pi k + i\pi \pm \zeta_2,$$

где ζ_1, ζ_2 — соответственно корни уравнений $\operatorname{ch} \zeta_1 = R$ и $\operatorname{ch} \zeta_2 = H_0 R$, k — целые числа. Анализ сильно упрощается тем обстоятельством, что для нашего выбора струны Дирака значения вычетов функции $F(z)$ в соответствующих полюсах определяется простыми выражениями. Вычеты в точках типа z_1 не зависят от параметров задачи и равны ± 1 , а вычеты в точках типа z_2 равны $\mp H_1 / \sqrt{1 - \lambda}$. Здесь пары полюсов, отвечающие знакам \pm перед ζ_1 или ζ_2 , имеют противоположные знаки вычетов.

Для исследования влияния поворота поля в плоскости (x, y) представим его компоненты в виде

$$h_y = h \cos \chi, \quad h_x = h \sin \chi.$$

Примем для определенности, что $\lambda < 1$ и угол $\chi = 0$ соответствует ориентации поля вдоль трудной оси частицы. Поскольку величины $\zeta_{1,2}$ комплексные, найти положения полюсов аналитически не удастся, численные данные приведены на рис. 3. Как и следовало ожидать, характер поведения полюсов при повороте поля существенно различен при слабом ($h < h_c = \sqrt{1 - \lambda}$) и сильном ($h_c < h < 1$) полях.

Начнем с более интересного случая слабого поля, см. рис. 3а. В этом случае при $\chi = 0$ полюсы расположены на линиях $\operatorname{Im} z = \pi/2$ и $\operatorname{Im} z = 3\pi/2$ симметрично относительно точки $z = i\pi$. (Отметим, что здесь картина отличается от приведенной в предыдущем разделе на рис. 2 из-за иного выбора начала отсчета ψ .) При увеличении χ полюсы движутся навстречу друг другу, так что при $\chi \rightarrow \pi/2$ точки типа z_1 с вычетами $\operatorname{Re} z[F(z_1)] = \pm 1$ оказываются на оси $\operatorname{Im} z = \pi$, а точки типа z_2 с вычетами, равными $\pm H_1/h_c$, на мнимой оси $\operatorname{Re} z = 0$. Записывая положение полюсов в полосе $0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi$ в виде

$$z_1 = i\pi \pm [A_1(\chi) + iB_1(\chi)], \quad z_2 = i\pi \pm [A_2(\chi) + iB_2(\chi)],$$

где $A_{1,2}, B_{1,2}$ — вещественные положительные числа, легко убедиться, что при всех $0 \leq \chi < \pi/2$ величина $B_1(\chi) < B_2(\chi)$. В силу этого зависимость $A_E(\psi)$ и классификация вкладов путей с различными ψ оказывается следующей.

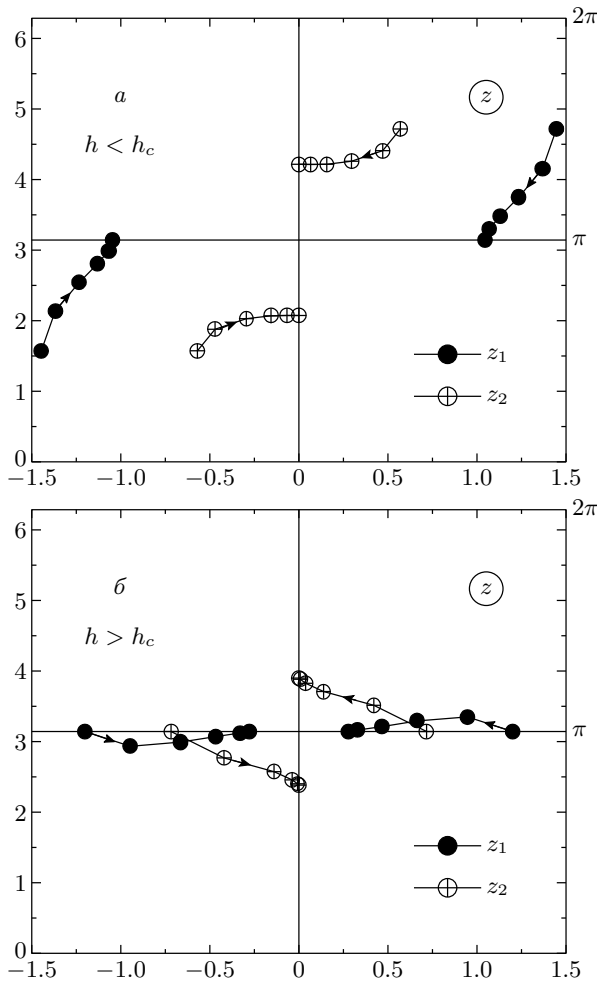


Рис. 3. Движение полюсов функции $F(z)$ при повороте магнитного поля в базисной плоскости при различной величине поля $|\mathbf{h}| = h$. Точки обозначают последовательные положения полюсов при увеличении угла χ между направлением поля и оси y от $\chi = 0$ до $\chi = \pi/2$, для наглядности приведены положения точек для значений χ , различающихся на $\pi/10$. Стрелки показывают направление движения при увеличении χ от значения $\chi = 0$. Для конкретных численных расчетов выбраны значения $\lambda = 0.73$, что приблизительно отвечает значению для Fe_8 , и значения поля $h/h_c = 0.6$ и $h/h_c = 1.35$ соответственно для рис. *a* и *б*

При таком выборе начала отсчета ψ , который сделан в этом разделе, минимальное значение вещественной части A_E , равное $A_E^{(min)}$, достигается при $\psi = 0, 2\pi$. Это же значение сохраняется и при всех ψ в двух полосках, $0 < \psi < \pi - B_2$ и $\pi + B_2 < \psi < 2\pi$. Границы этих полосок определяются тем, что путь интегрирования пересекает полюсы типа z_2 . По-

скольку вычет в точке z_2 равен $\pm H_1/(1 - \lambda)^{1/2}$, значение A_E при этих пересечениях скачком приобретает добавку, равную $2\pi i \hbar S H_1/(1 - \lambda)^{1/2}$. Отметим, что вещественная часть A_E при этом скачком увеличивается на величину $2\pi \hbar_x \hbar S/h_c$, и при немалых \hbar_x вкладом этой полосы следует пренебречь. Это значение A_E сохраняется в двух полосках, $\pi - B_2 < \psi < \pi - B_1$ и $\pi + B_1 < \psi < \pi + B_2$. При переходе траектории в центральную часть области $(0, 2\pi)$, т. е. в полосу $\pi - B_1 < \psi < \pi + B_1$, значение A_E снова меняется скачком, но уже на чисто мнимую величину $2\pi i \hbar S$.

Таким образом, картина вкладов инстантонных путей в амплитуду туннелирования определяется следующими закономерностями. Вклад путей с минимальным значением $\text{Re } A_E$ входит с относительным весом $1 - B_2/\pi$. Для вклада остальной части путей, относительный вес которых $B_2/\pi \leq 1/2$, появляется экспоненциально малый множитель $\exp(-\Delta A_E/\hbar)$, $\Delta A_E = 2\pi \hbar_x S \hbar/h_c$, а также различные фазовые множители. По духу инстантонного подхода следует учитывать только пути с минимальным значением A_E и исключением может являться только тот случай, когда $\Delta A_E/\hbar \leq 1$. В нашем случае это неравенство реализуется только при предельно малых углах отклонения поля от трудной оси, $\hbar_x \leq h_c/2\pi S$. Для значения $h \geq 0.5h_c$ это отвечает $\chi \leq 1/\pi S$, что для $S \approx 10$ соответствует нескольким градусам. При меньших значениях поля соответствующее критическое значение угла увеличивается. Это отвечает наблюдавшейся экспериментально картине туннелирования, в которой немонотонная зависимость туннельного расщепления видна только при малых χ , и при этом даже при малых, но ненулевых углах с ростом поля осцилляции сглаживаются.

В наиболее интересном случае малых $\hbar_x \ll \hbar_y$ может быть проведено достаточно полное аналитическое исследование задачи. В этом случае значения B_1 и B_2 близки к $\pi/2$,

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\pi}{2} - \hbar_x \frac{1 - \lambda}{\lambda \hbar_y (1 - \lambda - \hbar_y^2)} (1 - \hbar_y^2)^{1/2}, \\ B_2 &= \frac{\pi}{2} - \hbar_x \frac{(1 - \lambda)^{1/2}}{\lambda (1 - \lambda - \hbar_y^2)} (1 - \hbar_y^2)^{1/2}, \end{aligned} \tag{31}$$

разность $B_1 - B_2$ мала, и в первом приближении по \hbar_x можно пренебречь вкладом полосок типа $\pi \pm B_2 < \psi < \pi \pm B_1$, ширина которых пропорциональна \hbar_x , т. е. содержит дополнительную степень малого параметра. Тогда зависимость туннельного расщепления уровней Δ от угла χ (напомним, что

Δ пропорциональна сумме туннельных экспонент по всем путям),

$$\Delta \propto \left| \sum_{\psi} \exp \left(-\frac{A_E}{\hbar} \right) \right|,$$

описывается приближенным выражением

$$\left| \sum_{\psi} e^{-A_E/\hbar} \right| \approx \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{A_E^{(min)}}{\hbar} \right) \times \\ \times \left| 1 + \exp \left[-\frac{2\pi h_x S}{\sqrt{1-\lambda}} + 2\pi i S \left(1 - \frac{h_y}{\sqrt{1-\lambda}} \right) \right] \right|.$$

При $h_x = h \sin \chi = 0$ это выражение дает полученный ранее результат,

$$\Delta \approx \exp \left(-\frac{A_E^{(min)}}{\hbar} \right) \left| \cos \left[\pi S \left(1 - \frac{h_y}{\sqrt{1-\lambda}} \right) \right] \right|.$$

При малых, но ненулевых $h_x \neq 0$ возникает ситуация с неполной деструктивной интерференцией, когда туннельное расщепление пропорционально величине

$$\left| \sum_{\psi} e^{-A_E/\hbar} \right| \approx \exp \left(-\frac{A_E^{(min)}}{\hbar} \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{4} \left(1 - \exp \left(-\frac{2\pi h_x S}{h_c} \right) \right)^2 + \exp \left(-\frac{2\pi h_x S}{h_c} \right) \times \right. \\ \left. \times \cos^2 \left[\pi S \left(1 - \frac{h_y}{h_c} \right) \right] \right)^{1/2}, \quad (32)$$

которая при $h_x \neq 0$ не обращается в нуль ни при каких значениях h_y .

В случае сильного поля, $h > h_c$, расположение полюсов иное, см. рис. 3б. При $\mathbf{h} \parallel \mathbf{e}_y$, т. е. $\chi = 0$ все полюсы находятся на линии $\text{Im } z = \pi$. В этом случае они не дают вклада в зависимость $A_E(\psi)$, см. предыдущий раздел. При отклонении поля от трудной оси полюсы смещаются с этой линии и возле линии $\text{Re } z = \pi$ формируются две полосы с различными значениями A_E . Опять при изменении ψ от значения $\psi = 0$ первым пересекается полюс типа z_2 и вещественная часть евклидова действия скачком увеличивается. Однако в случае $h > h_c$ есть существенное отличие от случая малого поля: при малых h_x , когда имеет смысл рассматривать вклад путей с большим значением $\text{Re } A_E$, ширина соответствующей полосы мала, пропорциональна h_x . Соответственно,

мал относительный вес траектории с другим значением фазового множителя, который мог бы давать интерференцию. При немалых h_x вклад таких путей подавляется экспоненциальным множителем $\exp(-\Delta A_E/\hbar)$. Поэтому при поле $h > h_c$ эффекты частичной интерференции отсутствуют при всех ориентациях поля, что отвечает эксперименту [16].

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В нашей работе рассмотрены две проблемы, одна общая и одна конкретная. Конкретно, мы получили полное описание квантового туннелирования между уровнями, отвечающими вырожденному в классическом случае основному состоянию высокоспиновой молекулы типа Fe_8 с ромбической анизотропией, находящейся во внешнем магнитном поле, произвольно ориентированном в плоскости, перпендикулярной легкой оси молекулы. Насколько нам известно, мы впервые построили точные инстантонные решения для этой модели при произвольных величине и ориентации поля. Как нам представляется, полученные результаты описывают все основные особенности наблюдавшегося экспериментально поведения туннельного расщепления Δ уровней как функции величины и ориентации поля. Из нашего анализа в случае магнитного поля, параллельного трудной оси, получается как предсказанная Гаргом [7] картина интерференции с немонотонным изменением расщепления уровней Δ и обращением Δ в нуль при некоторых значениях поля для слабых полей $H < H_c = S\sqrt{K_2(K_2 - K_1)}/g\mu_B$, так и отсутствие интерференции и монотонный рост $\Delta(H)$ во всей остальной допустимой области значений поля $H_c < H < KS/g\mu_B$. Результаты нашего расчета впервые, насколько нам известно, позволили описать на основе точных инстантонных решений частичную интерференцию, т. е. немонотонную зависимость $\Delta(H)$ без обращения Δ в нуль, при малом отклонении поля от трудной оси на угол $\chi < \chi_c \approx 1/\pi S$ и монотонную зависимость $\Delta(H)$ при всех остальных ориентациях поля.

Такое полное описание данной конкретной проблемы оказалось возможным благодаря анализу общей проблемы, касающейся структуры инстантонных путей в ферромагнетиках. Проблему поиска инстантонных путей для широкого класса моделей ферромагнетика удалось свести к решению точно интегрируемой задачи гамильтоновой динамики. Мы установили, что практически для всех имею-

щих физический смысл моделей ферромагнетиков инстантонные пути образуют систему непрерывных однопараметрических семейств. Внутри одного семейства все инстантоны имеют различную форму функций $\mathbf{m}(\tau)$, но одинаковое значение евклидова действия A_E . Мы установили, что все инстантонные пути характеризуются одним непрерывным вещественным параметром ψ , меняющимся в интервале $0 \leq \psi < 2\pi$, а евклидово действие является периодической с периодом 2π скачкообразной функцией ψ . Эта картина принципиально отличается от обычно принятой в литературе, с конечным числом инстантонных путей.

В различных случаях в нашей схеме могут получаться результаты, как в принципе сводимые к стандартной картине, с представлением некоторых семейств инстантонов с одинаковым A_E одним эквивалентным путем, так и несводимые к такой упрощенной схеме. Примерами «сводимой» задачи являются рассмотренная в разд. 2 модель чисто одноосного ферромагнетика, где все инстантонные пути с $0 \leq \psi < 2\pi$ имеют одинаковое значение A_E ; или более сложная модель с ромбической анизотропией и полем, точно параллельным трудной оси. В последнем случае двум семействам инстантонов с одинаковой вещественной частью A_E , но различными мнимыми частями A_E , отвечают две полосы с одинаковой шириной $\Delta\psi = \pi$. В этом случае возможно представление каждого семейства путей одним эквивалентным инстантоном. Однако полное описание экспериментальных результатов невозможно без использования «несводимых» проблем. Яркий пример последней появляется при анализе влияния отклонения поля от трудной оси. В этом случае как при $H < H_c$, так и при $H > H_c$ существуют инстантонные решения с мало различающимися значениями $\text{Re } A_E$, для которых $A_E^{(2)} - A_E^{(1)} = \Delta A_E \ll A_E^{(1,2)}$, и существенно различными мнимыми частями A_E . Если бы речь шла только о существовании двух различных инстантонов, было бы трудно объяснить различие поведения системы в этих двух случаях. Полученное нами значительное различие результатов для расщепления уровней при $H < H_c$ и $H > H_c$ связано именно с представлением о непрерывных семействах инстантонов, существующих в интервалах $\Delta\psi$. В конкретном случае при $H < H_c$ характерные интервалы $\Delta\psi_{1,2}$ для инстантонов с $A_E^{(1)}$ и $A_E^{(2)}$ одного порядка, что приводит к частичной интерференции типа (32), в то время как при $H > H_c$ ширина одного из интервалов мала и интерференция не возникает.

Здесь уместно заметить, что картина инстантон-

ных семейств, зависящих от непрерывного параметра, допускает реализацию более общих сценариев туннелирования, которые не проявились для рассмотренной нами простой модели (1) с $\tilde{K} = 0$, т. е. с энергией анизотропии, квадратичной по компонентам спина. Если в какой-либо модели ферромагнетика существуют два инстантонных семейства с различными значениями мнимой части A_E , реализующиеся в различных интервалах $\Delta\psi$, но обладающих одинаковой вещественной частью A_E , то может получиться иной вид частичной интерференции, без экспоненциального подавления. Другой интересный сценарий мог бы возникнуть в случае, когда при каком-то значении внешнего параметра ширина интервала для инстантонов, обладающих минимальным значением A_E , стремится к нулю. Тогда вблизи этого значения параметра туннелирование определялось бы путями с неминимальным A_E . Эти возможности, как и ряд других, нельзя исключить а priori. Однако анализ более сложных моделей ферромагнетика, даже модели (1) с $\tilde{K} \neq 0$, выходит за рамки этой работы. Тут нет принципиальной трудности, модель (1) с $\tilde{K} \neq 0$ имеет аналитическую функцию $W(\cos \theta, \varphi)$, но для ее анализа возникает необходимость решения сложных алгебраических уравнений, что может быть проделано только численно.

Как уже отмечалось, наличие инстантонных семейств обусловлено допустимостью комплексных значений намагниченности \mathbf{m} (или угловых переменных θ, φ) в инстантоне, и может быть описано комплексным сдвигом начала отсчета мнимого времени в инстантонном решении, $\mathbf{m}(\tau) \rightarrow \mathbf{m}(\tau + i\psi)$. Эти свойства тесно связаны с аналитичностью классической энергии ферромагнетика по переменным $\cos \theta$ и φ . Необходимость учета комплексных значений намагниченности отмечалась многими авторами. Особенно четко это свойство инстантонов было сформулировано в работах [34], посвященных анализу математической природы интегралов по инстантонным путям в ферромагнетиках. Однако в этих работах использовалась параметризация намагниченности через комплексную стереографическую проекцию, $w = (m_x + im_y)/(1 + m_z)$. При такой параметризации энергия ферромагнетика содержит неаналитические множители типа $|w|^2$, для которых условия Коши–Римана нарушаются не в отдельных особых точках, а на всей плоскости w . Поэтому интегрируемость проблемы в этих переменных, как и возможность использования комплексного сдвига аргумента для получения решений с тем же значением A_E , заранее не очевидна.

Работа посвящена светлой памяти В. М. Елеонского. Мы признательны Е. Г. Галкиной за помощь в работе. Мы благодарны В. Г. Барьяхтару, А. Б. Борисову, В. Е. Кирееву, В. В. Киселеву, А. С. Ковалеву, А. К. Колежуку, Л. М. Лерману и А. Ф. Попкову за полезные обсуждения работы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-01-00100).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Gunter and B. Barbara, eds., *Quantum Tunneling of Magnetization*, Vol. 301 of NATO ASI Series E, Kluwer, Dordrecht (1995).
2. E. M. Chudnovsky and J. Tejada, *Macroscopic Quantum Tunneling of the Magnetic Moment*, Cambridge University Press, (1998).
3. L. N. Leuenberger and D. Loss, *Nature* **410**, 789 (2001).
4. W. Wernsdorfer, N. Aliaga-Alcalde, D. N. Hendrickson, and G. Christou, *Nature* **416**, 406 (2002).
5. D. Loss, D. P. DiVincenzo, and G. Grinstein, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3232 (1992).
6. J. von Delft and C. L. Henley, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3236 (1992).
7. A. Garg, *Europhys. Lett.* **22**, 205 (1993).
8. M.ENZ and R. Schilling, *J. Phys. C* **19**, L711 (1986).
9. J. L. van Hemmen and A. Sütö, *Physica B* **141**, 37 (1986).
10. E. M. Chudnovsky and L. Gunther, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 661 (1988).
11. B. Barbara and E. M. Chudnovsky, *Phys. Lett. A* **145**, 205 (1990).
12. I. V. Krive and O. B. Zaslavskii, *J. Phys.: Cond. Matter* **2**, 9457 (1990).
13. V. Y. Golyshev and A. F. Popkov, *Europhys. Lett.* **29**, 327 (1995).
14. E. M. Chudnovsky, *J. Magn. Magn. Mater.* **140-144**, 1821 (1995).
15. D. D. Awschalom, J. F. Smyth, G. Grinstein, D. P. DiVincenzo, and D. Loss, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3092 (1992).
16. W. Wernsdorfer, *Adv. Chem. Phys.* **118**, 99 (2001).
17. S. M. J. Aubin, N. R. Dilley, M. B. Wemple, G. Christou, and D. N. Hendrickson, *J. Amer. Chem. Soc.* **120**, 839 (1998).
18. G. Christou, D. Gatteschi, D. N. Hendrickson, and R. Sessoli, *MRS Bull.* **25**, 66 (2000).
19. R. S. Edwards, S. Hill, S. Bhaduri, N. Aliaga-Alcalde, E. Bolin, S. Maccagnano, G. Christou, and D. N. Hendrickson, *Polihedron* **22**, 1911 (2003).
20. J. R. Friedman, M. P. Sarachik, J. Tejada, and R. Ziolo, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3830 (1996).
21. L. Thomas, F. Lioni, R. Ballou, D. Gatteschi, R. Sessoli, and B. Barbara, *Nature* **383**, 145 (1996).
22. C. Sangregorio, T. Ohm, C. Paulsen, R. Sessoli, and D. Gatteschi, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4645 (1997).
23. S. M. J. Aubin, N. R. Dilley, M. W. Wemple, M. B. Maple, G. Christou, and D. N. Hendrickson, *J. Amer. Chem. Soc.* **120**, 839 (1998).
24. W. Wernsdorfer and R. Sessoli, *Science* **284**, 133 (1999).
25. W. Wernsdorfer, M. Soler, G. Christou, and D. N. Hendrickson, *J. Appl. Phys.* **91**, 7164 (2002).
26. W. Wernsdorfer, S. Bhaduri, C. Boskovic, G. Christou, and D. N. Hendrickson, *Phys. Rev. B* **65**, 180403R (2002).
27. E. Kececioglu and A. Garg, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 237205 (2002); *Phys. Rev. B* **67**, 054406 (2003).
28. E. M. Chudnovsky and X. Martines Hidalgo, *Europhys. Lett.* **50**, 395 (2000).
29. A. I. Wainshtein, V. I. Zakharov, V. A. Novikov, and M. A. Shifman, *Sov. Phys. Usp.* **136**, 553 (1982).
30. E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems*, in: *Frontiers in Physics*, **82**, Addison-Wesley (1991).
31. В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, *ЖЭТФ* **84**, 616 (1983); **93**, 1436 (1987); В. М. Елеонский, Н. Н. Кирова, Н. Е. Кулагин, *ЖЭТФ* **77**, 409 (1979).
32. Б. А. Иванов, В. Е. Киреев, *ЖЭТФ* **121**, 320 (2002).
33. R. Lu, J. L. Zhu, Y. Zhou, and B. L. Gu, *Phys. Rev. B* **62**, 11661 (2000).
34. E. A. Kochetov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, 4473 (1998); M. Stone, K.-S. Park and A. Garg, *J. Math. Phys.* **41**, 8025 (2000); A. Garg, E.A. Kochetov, K.-S. Park, and M. Stone, *J. Math. Phys.* **44**, 48 (2003).