

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА НАМАГНИЧЕННОСТИ В ГЕЛИКОИДАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ С ТОЧЕЧНЫМ ДЕФЕКТОМ

*Д. Ю. Гусакова\*, А. В. Ведяев, О. А. Котельникова*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119992, Москва, Россия*

*А. И. Буздин*

*Univertité Bordeaux I  
33405 TALENCE Cedex, France*

Поступила в редакцию 8 июля 2004 г.

В рамках теории фазовых переходов Ландау рассмотрена модель магнитного геликоида в приложенном внешнем поле в присутствии точечного дефекта. Получено общее решение с помощью гриновских функций для нелинейной задачи с учетом всех членов в функционале свободной энергии. Рассчитано распределение вектора намагниченности в плоскости, перпендикулярной оси геликоида и приложенному магнитному полю.

PACS: 75.25.+z, 75.30.Kz

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Наличие дефектов и неоднородностей в ферромагнитных материалах может сильно влиять на критические свойства магнетиков. Например, если локальная константа обменного взаимодействия вблизи дефекта имеет значение большее, чем в объеме материала, то локализованный магнитный момент может появиться при температуре выше, чем  $T_{C0}$  в объеме. Однако такая ситуация может быть реализована только в том случае, если параметры дефекта (его эффективный радиус и интенсивность обменного взаимодействия) удовлетворяют некоторым определенным условиям (см., например, [1, 2]).

В отсутствие центра симметрии кристаллической структуры функционал свободной энергии магнетика содержит член, линейный по пространственным производным, что приводит к стабилизации основного состояния системы и образованию геликоидальной структуры при температуре выше, чем критическая температура  $T_{C0}$  ферромагнитного перехода [3]. Такая геликоидаль-

ная структура реализуется, например, в MnSi [4] и FeGe [5].

В работе [6] теоретически исследовались статические локализованные состояния на дефектах кристаллической структуры в кубических магнетиках без центра инверсии. Были получены решения для двумерных и трехмерных локализованных состояний при температурах выше температуры фазового перехода парамагнетик–геликоид и показано, что в присутствии дефекта, дающего вклад в функционал свободной энергии в виде члена  $-\gamma M^2 \delta(\mathbf{r})$  (где  $M$  — локальный магнитный момент), для некоторого малого значения параметра  $\gamma$  переход в геликоидальную фазу происходит при температуре  $T_{CL}$  выше, чем критическая температура  $T_C$  перехода типа парамагнетик–геликоид в объемном образце без дефекта.

Вопрос об устойчивости решений для нелинейного векторного поля в моделях с инвариантами Лифшица исследовался в работе [7]. Было показано, что в системах двумерные и трехмерные локализованные состояния, связанные с релаксацией модуля векторного поля, радиально неустойчивы. Однако вывод о существовании состояний с более низкой энер-

\*E-mail: dasha@magn.ru

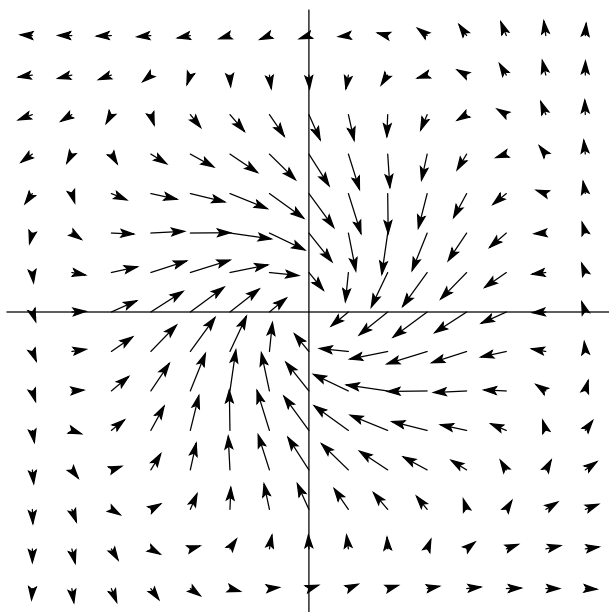


Рис. 1. Распределение вектора намагниченности в плоскости, перпендикулярной оси  $z$  геликоида в отсутствие магнитного поля ( $z = z_1 - z_2 = 2\pi$ )

гией и, следовательно, о радиальной неустойчивости был сделан на основе функционала свободной энергии, не включающего  $\delta$ -образный вклад в энергию системы в окрестности дефекта. Учет этого члена в функционале в корне меняет ситуацию. Можно говорить об устойчивости многомерных локализованных состояний на дефектах кристаллической структуры в кубическом магнетике без центра инверсии.

В последнее время геликоидальные структуры изучаются экспериментально довольно интенсивно. Кроме уже давно известных материалов MnSi [4] и FeGe [5], гелимагнетизм был обнаружен, например, в  $\text{Ba}_2\text{CuGe}_2\text{O}_7$  [8, 9] и  $\text{K}_2\text{V}_3\text{O}_8$  [10]. Эти вещества представляют большой интерес с точки зрения исследования обменного взаимодействия Дзялошинского–Мория. В работе [11] обсуждается возникновение в перечисленных выше материалах так называемых несоразмерных структур нового типа, включая магнитные вихри, или скирмионы. Экспериментальное исследование влияния примесных ионов  $\text{Co}^{2+}$  в  $\text{Ba}_2(\text{Co}_x\text{Cu}_{1-x})\text{Ge}_2\text{O}_7$  ( $x$  — концентрация примесей) на геликоидальную структуру было проведено в работе [12]. Однако этот вопрос еще мало изучен и требует более подробного изучения.

Ниже мы рассмотрим модель, аналогичную [6], в которой в выражении для свободной энергии учтем еще дополнительный нелинейный член, пропорциональный  $\mathbf{M}^4$  и член, связанный с зеемановской

энергией магнитного момента во внешнем поле. Целью нашей работы являлся расчет устойчивого магнитного состояния в геликоидальной системе с одиночной магнитной примесью. Будет показано, что во внешнем магнитном поле при температуре выше  $T_{CL}$  кроме однородного магнитного момента появляется локализованное геликоидальное магнитное состояние, которое может наблюдаться в экспериментах по рассеянию нейтронов.

Данная проблема может быть интересна и с той точки зрения, что в различных нелинейных моделях физики конденсированного состояния можно найти структурные аналоги неоднородным конфигурациям, реализующимся в геликоиде. Кроме магнетиков [13, 14] взаимодействия, описываемые инвариантами, линейными по первым пространственным производным (инварианты Лифшица), имеют место также в определенных классах сегнетоэлектриков и жидких кристаллов [15]. Примером многомерных стационарных локализованных состояний в физических системах являются также абрикосовские вихри в сверхпроводниках [16]. Аналогично в магнетиках без центра инверсии линейный по пространственным производным член стабилизирует двумерное локализованное состояние и возникают магнитные вихри [17].

## 2. РАСЧЕТ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ МАГНЕТИКА

Рассмотрим ферромагнетик со слабым взаимодействием типа взаимодействия Дзялошинского–Мория во внешнем поле в присутствии дефекта, локализованного в точке  $x = y = z = 0$ . Функционал свободной энергии такой системы записывается как

$$F = \frac{n\theta}{M_S^2} \int \left( \tau \mathbf{M}^2 + \frac{b}{2} \mathbf{M}^4 + a^2 (\nabla M_x)^2 + a^2 (\nabla M_y)^2 + a^2 (\nabla M_z)^2 + \lambda \mathbf{M} \cdot \text{rot } \mathbf{M} - \gamma \mathbf{M}^2 \delta(\mathbf{r}) - H M_z \right) d^3 \mathbf{r}, \quad (1)$$

где величина  $\theta$  порядка температуры магнитного фазового перехода  $T_{C0}$ ,  $n$  — плотность магнитных моментов,  $M_S$  — намагниченность насыщения при нулевой температуре,  $\tau = (T - T_{C0})/T_{C0}$ ,  $H_z$  — внешнее магнитное поле, приложенное вдоль оси  $z$ . Два первых члена в выражении для свободной энергии представляют собой разложение вблизи точки Кюри по степеням вектора намагниченности  $\mathbf{M}$ , играющего роль параметра порядка в общей теории фазовых переходов второго рода. Отметим, что  $T_{C0}$  — критическая температура ферромагнитного перехода в отсутствие члена, пропорционального  $\mathbf{M} \cdot \text{rot } \mathbf{M}$ . С

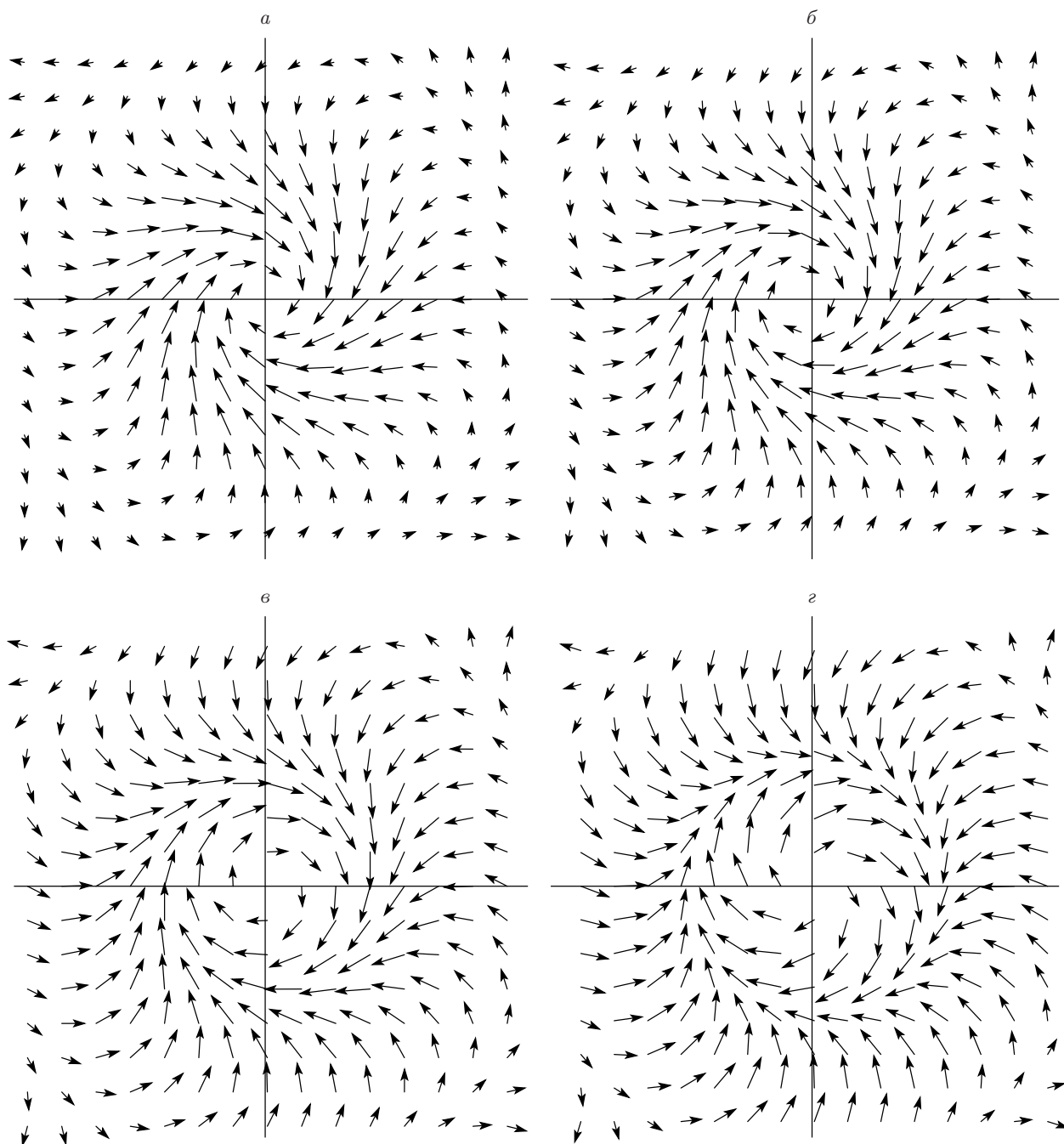


Рис. 2. Распределение вектора намагниченности в плоскости, перпендикулярной оси  $z$  геликоида в приложенном внешнем магнитном поле ( $z = z_1 - z_2 = 2\pi$ ).  $H (a) : H (б) : H (в) : H (г) = 3 : 4 : 5 : 6$

учетом этого члена переход в геликоидальную магнитную структуру происходит при температуре  $T_C$  выше, чем температура ферромагнитного перехода, т. е.  $(T_C - T_{C0})/T_{C0} = \tau_0 = (\lambda/2a)^2$ . В кубическом кристалле без центра инверсии наличие малого линейного по производным члена, пропорционального

$\lambda \mathbf{M} \cdot \text{rot } \mathbf{M}$  в выражении для свободной энергии, приводит к возникновению геликоидальной магнитной сверхструктуры, налагающейся на основную ферромагнитную структуру. Знак параметра  $\lambda$  в данном веществе определяет энергетически выгодное на-

правление вращения вектора  $\mathbf{M}$  в нем. Член, пропорциональный  $-\gamma \mathbf{M}^2 \delta(\mathbf{r})$ , описывает локальное увеличение температуры магнитного перехода вблизи точечного дефекта. Коэффициент магнитной жесткости  $a$  по порядку величины сравним с межатомными расстояниями.

Равновесное состояние системы определяется решением системы дифференциальных уравнений Эйлера, минимизирующих функционал энергии (1):

$$\begin{pmatrix} \widehat{\Delta}_{zz} - \tau & \widehat{L}_{z\rho} & \widehat{L}_{z\phi} \\ \widehat{L}_{\rho z} & \widehat{\Delta}_{\rho\rho} - \tau & \widehat{L}_{\rho\phi} \\ \widehat{L}_{\phi z} & \widehat{L}_{\phi\rho} & \widehat{\Delta}_{\phi\phi} - \tau \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{r}} \begin{pmatrix} M^{*z}(\mathbf{r}') \\ M^\rho(\mathbf{r}') \\ M^\phi(\mathbf{r}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^z(\mathbf{r}) \\ f^\rho(\mathbf{r}) \\ f^\phi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь введены цилиндрические координаты для пространственной переменной  $\mathbf{r} = (z, \rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$ ,  $\widehat{\Delta}_{zz} = \Delta$ ,  $\widehat{\Delta}_{\rho\rho} = \Delta - 1/\rho^2$ ,  $\widehat{\Delta}_{\phi\phi} = \Delta - 1/\rho^2$ ,  $\Delta$  — лапласиан, записанный в цилиндрических координатах. Компоненты оператора  $\widehat{L}_{ij}$  равны, соответственно,

$$\begin{aligned} \widehat{L}_{z\rho} &= -\widehat{L}_{\rho z} = \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \widehat{L}_{\rho\phi} &= -\widehat{L}_{\phi\rho} = \lambda \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \widehat{L}_{\phi z} &= -\widehat{L}_{z\phi} = \lambda \frac{\partial}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (3)$$

В правую часть уравнения входят функции

$$\begin{aligned} f^z(\mathbf{r}) &= -C \frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi\rho} + bM^{*z}\mathbf{M}^2, \\ f^\rho(\mathbf{r}) &= bM^\rho\mathbf{M}^2, \quad f^\phi(\mathbf{r}) = bM^\phi\mathbf{M}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $C = \gamma(M_{(z=0,\rho=0)}^z + H/2\tau)$ ,  $M^{*z}$  — разность между полным магнитным моментом  $M^z$  в направлении  $z$  и его однородной пространственной частью  $H/2\tau$ :  $M^{*z} = M^z - H/2\tau$ . Магнитный момент дефекта направлен вдоль оси  $z$ .

Уравнения (2) сложно решить аналитически, поэтому удобно воспользоваться следующей процедурой. Сначала найдем собственные функции и собственные значения системы уравнений (2) с нулевой правой частью:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\Delta}_{zz} - \tau & \widehat{L}_{z\rho} & \widehat{L}_{z\phi} \\ \widehat{L}_{\rho z} & \widehat{\Delta}_{\rho\rho} - \tau & \widehat{L}_{\rho\phi} \\ \widehat{L}_{\phi z} & \widehat{L}_{\phi\rho} & \widehat{\Delta}_{\phi\phi} - \tau \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{r}} \times \begin{pmatrix} M^{*z}(\mathbf{r}')_{\alpha,(\omega,\sigma,\nu)} \\ M^\rho(\mathbf{r}')_{\alpha,(\omega,\sigma,\nu)} \\ M^\phi(\mathbf{r}')_{\alpha,(\omega,\sigma,\nu)} \end{pmatrix} = 0. \quad (5)$$

Получим, что имеются три собственных значения  $\tau$ , для которых

$$1. \quad \tau_1 = -(\omega^2 + \sigma^2),$$

$$\begin{cases} M_{1,(\omega,\sigma,\nu)}^{*z}(z, \rho, \phi) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} J_\nu(\sigma\rho) e^{i\omega z} e^{i\nu\phi}, \\ M_{1,(\omega,\sigma,\nu)}^\rho(z, \rho, \phi) = \frac{i\sigma}{2\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} (J_{\nu+1}(\sigma\rho) - J_{\nu-1}(\sigma\rho)) e^{i\omega z} e^{i\nu\phi}, \\ M_{1,(\omega,\sigma,\nu)}^\phi(z, \rho, \phi) = \frac{\sigma}{2\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} (J_{\nu+1}(\sigma\rho) + J_{\nu-1}(\sigma\rho)) e^{i\omega z} e^{i\nu\phi}. \end{cases}$$

$$2. \quad \tau_2 = -(\omega^2 + \sigma^2 + \lambda\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}),$$

$$\begin{cases} M_{2,(\omega,\sigma,\nu)}^{*z}(z, \rho, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} J_\nu(\sigma\rho) e^{i\omega z} e^{i\nu\phi}, \\ M_{2,(\omega,\sigma,\nu)}^\rho(z, \rho, \phi) = \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} \left( \frac{J_{\nu+1}(\sigma\rho)}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2} + \omega} + \frac{J_{\nu-1}(\sigma\rho)}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2} - \omega} \right) e^{i\omega z} e^{i\nu\phi}, \\ M_{2,(\omega,\sigma,\nu)}^\phi(z, \rho, \phi) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} \left( \frac{J_{\nu+1}(\sigma\rho)}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2} + \omega} - \frac{J_{\nu-1}(\sigma\rho)}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2} - \omega} \right) e^{i\omega z} e^{i\nu\phi}. \end{cases} \quad (6)$$

$$3. \quad \tau_3 = -(\omega^2 + \sigma^2 - \lambda\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}),$$

$$\begin{cases} M_{3,(\omega,\sigma,\nu)}^{*z}(z, \rho, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} J_\nu(\sigma\rho) e^{i\omega z} e^{i\nu\phi}, \\ M_{3,(\omega,\sigma,\nu)}^\rho(z, \rho, \phi) = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} \left( \frac{J_{\nu+1}(\sigma\rho)}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2} - \omega} + \frac{J_{\nu-1}(\sigma\rho)}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2} + \omega} \right) e^{i\omega z} e^{i\nu\phi}, \\ M_{3,(\omega,\sigma,\nu)}^\phi(z, \rho, \phi) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} \left( \frac{J_{\nu+1}(\sigma\rho)}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2} - \omega} - \frac{J_{\nu-1}(\sigma\rho)}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2} + \omega} \right) e^{i\omega z} e^{i\nu\phi}. \end{cases}$$

Можно легко проверить, что функции  $M_{\alpha}^{*z,\rho,\phi}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) ортонормированы, т. е.

$$\sum_{\nu} \int \sigma d\sigma \int d\omega \sum_{\alpha=1,2,3} M_{\alpha,(\omega,\sigma,\nu)}^i(\mathbf{r}_1) \times (M_{\alpha,(\omega,\sigma,\nu)}^j(\mathbf{r}_2))^{c.c.} = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta_{ij}.$$

Здесь с.с. обозначает комплексное сопряжение. Далее удобно ввести гриновские функции  $G^{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  системы (5):

$$G^{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\nu} \int \sigma d\sigma \times \int d\omega \sum_{\alpha=1,2,3} \frac{M_{\alpha,(\omega,\sigma,\nu)}^i(\mathbf{r}_1) (M_{\alpha,(\omega,\sigma,\nu)}^j(\mathbf{r}_2))^{c.c.}}{\tau_{\alpha} - \tau}, \quad (7)$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{pmatrix} \hat{\Delta}_{zz} - \tau & \hat{L}_{z\rho} & \hat{L}_{z\phi} \\ \hat{L}_{\rho z} & \hat{\Delta}_{\rho\rho} - \tau & \hat{L}_{\rho\phi} \\ \hat{L}_{\phi z} & \hat{L}_{\phi\rho} & \hat{\Delta}_{\phi\phi} - \tau \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{r}} \times \begin{pmatrix} G^{zz}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & G^{z\rho}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & G^{z\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ G^{\rho z}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & G^{\rho\rho}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & G^{\rho\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ G^{\phi z}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & G^{\phi\rho}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & G^{\phi\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{pmatrix} = \hat{I} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (8)$$

Здесь  $\hat{I}$  — единичная матрица. Таким образом, формальное решение системы уравнений (2) имеет вид

$$M^i(\mathbf{r}_1) = \sum_j \int d\mathbf{r}_2 G^{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f^j(\mathbf{r}_2). \quad (9)$$

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численный расчет пространственного распределения вектора намагниченности заключался в решении интегральных уравнений (9) с использованием итерационной процедуры для различных значений приложенного магнитного поля.

Уравнения (9) являются сложными интегральными уравнениями относительно компонент вектора намагниченности  $\mathbf{M}$ . Поэтому трудно найти решение в явном виде. Однако, если пренебречь нелинейными членами в (4), т. е. предположить, что

$$\begin{aligned} f^{0z}(z, \rho, \phi) &= -C \frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi\rho}, \\ f^{0\rho}(z, \rho, \phi) &= 0, \\ f^{0\phi}(z, \rho, \phi) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

то выражения для компонент вектора намагниченности (9) с учетом (10) легко могут быть получены через функции Грина:

$$M^{0*z}(z, \rho) = -C \int \rho' d\rho' \int dz' \times \int d\phi' G^{zz}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\delta(\rho')\delta(z')}{2\pi\rho'}, \quad (11)$$

$$M^{0\rho}(z, \rho) = -C \int \rho' d\rho' \int dz' \times \int d\phi' G^{\rho z}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\delta(\rho')\delta(z')}{2\pi\rho'},$$

$$M^{0\phi}(z, \rho) = -C \int \rho' d\rho' \int dz' \times \int d\phi' G^{\phi z}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\delta(\rho')\delta(z')}{2\pi\rho'}$$

Учтем, что система однородна относительно изменения угла  $\phi$ , тогда собственные функции (6) принимают вид:

$$1. \quad \tau_1 = -(\omega^2 + \sigma^2), \quad \begin{cases} M_{1,(\omega,\sigma)}^{*z}(z, \rho) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} J_0(\sigma\rho) e^{i\omega z}, \\ M_{1,(\omega,\sigma)}^\rho(z, \rho) = \frac{i\sigma}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} J_1(\sigma\rho) e^{i\omega z}, \\ M_{1,(\omega,\sigma)}^\phi(z, \rho) = 0, \end{cases}$$

$$2. \quad \tau_2 = -(\omega^2 + \sigma^2 + \lambda\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}), \quad \begin{cases} M_{2,(\omega,\sigma)}^{*z}(z, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} J_0(\sigma\rho) e^{i\omega z}, \\ M_{2,(\omega,\sigma)}^\rho(z, \rho) = -\frac{i\omega}{\sqrt{2}\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} J_1(\sigma\rho) e^{i\omega z}, \\ M_{2,(\omega,\sigma)}^\phi(z, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} J_1(\sigma\rho) e^{i\omega z}, \end{cases} \quad (12)$$

$$3. \quad \tau_3 = -(\omega^2 + \sigma^2 - \lambda\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}), \quad \begin{cases} M_{3,(\omega,\sigma)}^{*z}(z, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} J_0(\sigma\rho) e^{i\omega z}, \\ M_{3,(\omega,\sigma)}^\rho(z, \rho) = -\frac{i\omega}{\sqrt{2}\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}} J_1(\sigma\rho) e^{i\omega z}, \\ M_{3,(\omega,\sigma)}^\phi(z, \rho) = -\frac{1}{\sqrt{2}} J_1(\sigma\rho) e^{i\omega z}. \end{cases}$$

Подставляя далее в выражение (7) для функций Грина  $G^{ij}$  собственные функции (12) получаем

$$\begin{aligned} G^{zz}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= - \int \sigma d\sigma d\omega \frac{\left((\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \lambda^2\omega^2\right) J_0(\sigma\rho_1) J_0(\sigma\rho_2) e^{i\omega(z_1 - z_2)}}{(\omega^2 + \sigma^2 + \tau) \left((\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \lambda^2(\omega^2 + \sigma^2)\right)}, \\ G^{\rho\rho}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \int \sigma d\sigma d\omega \frac{\left((\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \lambda^2\sigma^2\right) J_1(\sigma\rho_1) J_1(\sigma\rho_2) e^{i\omega(z_1 - z_2)}}{(\omega^2 + \sigma^2 + \tau) \left((\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \lambda^2(\omega^2 + \sigma^2)\right)}, \\ G^{\phi\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= - \int \sigma d\sigma d\omega \frac{(\omega^2 + \sigma^2 + \tau) J_1(\sigma\rho_1) J_1(\sigma\rho_2) e^{i\omega(z_1 - z_2)}}{(\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \lambda^2(\omega^2 + \sigma^2)}, \\ G^{z\rho}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \int \sigma d\sigma d\omega \frac{i\sigma\omega\lambda^2 J_0(\sigma\rho_1) J_1(\sigma\rho_2) e^{i\omega(z_1 - z_2)}}{(\omega^2 + \sigma^2 + \tau) \left((\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \lambda^2(\omega^2 + \sigma^2)\right)}, \\ G^{\rho z}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \int \sigma d\sigma d\omega \frac{i\sigma\omega\lambda^2 J_1(\sigma\rho_1) J_0(\sigma\rho_2) e^{i\omega(z_1 - z_2)}}{(\omega^2 + \sigma^2 + \tau) \left((\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \lambda^2(\omega^2 + \sigma^2)\right)}, \\ G^{z\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \int \sigma d\sigma d\omega \frac{\sigma\lambda J_0(\sigma\rho_1) J_1(\sigma\rho_2) e^{i\omega(z_1 - z_2)}}{(\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \lambda^2(\omega^2 + \sigma^2)}, \\ G^{\phi z}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \int \sigma d\sigma d\omega \frac{\sigma\lambda J_1(\sigma\rho_1) J_0(\sigma\rho_2) e^{i\omega(z_1 - z_2)}}{(\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \lambda^2(\omega^2 + \sigma^2)}, \\ G^{\rho\phi(\phi\rho)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= - \int \sigma d\sigma d\omega \frac{i\omega\lambda J_1(\sigma\rho_1) J_1(\sigma\rho_2) e^{i\omega(z_1 - z_2)}}{(\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \lambda^2(\omega^2 + \sigma^2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда для трех компонент вектора намагниченности на первом шаге итерационной процедуры из (10), учитывая (13), получаем, что

$$\begin{aligned}
 M^{0*z}(z, \rho) &= C \int_0^{+\infty} \sigma d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{(\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \omega^2 \lambda^2}{(\omega^2 + \sigma^2 + \tau)((\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \lambda^2(\omega^2 + \sigma^2))} J_0(\sigma\rho) e^{i\omega z}, \\
 M^{0\rho}(z, \rho) &= C \int_0^{+\infty} \sigma d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{-i\omega\sigma\lambda^2}{(\omega^2 + \sigma^2 + \tau)((\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \lambda^2(\omega^2 + \sigma^2))} J_1(\sigma\rho) e^{i\omega z}, \\
 M^{0\phi}(z, \rho) &= C \int_0^{+\infty} \sigma d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\sigma\lambda}{(\omega^2 + \sigma^2 + \tau)^2 - \lambda^2(\omega^2 + \sigma^2)} J_1(\sigma\rho) e^{i\omega z}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Далее, учитывая вид (4) правой части системы уравнений (2), т. е. наличие нелинейных членов, пропорциональных  $bM^iM^2$ , и повторяя процедуру расчета компонент вектора намагниченности численно, получаем, что  $M^i$  имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
 M^z &\sim H/2\tau + I_{1z}H + I_{2z}bH^3, \\
 M^\rho &\sim I_{1\rho}H + I_{2\rho}bH^3, \\
 M^\phi &\sim I_{1\phi}H + I_{2\phi}bH^3.
 \end{aligned}$$

Здесь  $I_{zi}, I_{\rho i}, I_{\phi i}$  — некоторые числа, полученные после интегрирования выражений, зависящих от  $G^{0ij}$  и  $M^{0i}$ , по переменным  $\omega$  и  $\sigma$ . Для наглядности удобно перейти к декартовым координатам в некоторой плоскости  $z$  (например,  $z = z_1 - z_2 = 2\pi$ ), перпендикулярной оси геликоида, и рассмотреть двумерную картину распределения проекций  $M^x$  и  $M^y$  вектора намагниченности в этой плоскости.

На рис. 1 представлены результаты расчета распределения вектора намагниченности в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ , при нулевом внешнем поле. Сравнение показывает совпадение полученного нами распределения с распределением, полученным ранее в работе [6] без учета внешнего магнитного поля и нелинейного члена  $bM^4/2$  в функционале свободной энергии.

На рис. 2 показана эволюция магнитной структуры при включении внешнего магнитного поля. Магнитное поле приложено вдоль оси  $z$ . Можно видеть, что степень завихренности увеличивается с увеличением поля (рис. а, б, в, г расположены в порядке возрастания значения магнитного поля), при этом в образовании вихревой структуры за счет обменного взаимодействия с соседями начинают участвовать все более удаленные от дефекта магнитные моменты.

Свойства исследуемых здесь неоднородных состояний характерны для широкого класса систем и носят универсальный характер. Поэтому предложенный способ расчета отклика системы на приложенное внешнее магнитное поле и полученные результаты могли бы быть полезны и в других областях физики твердого тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-02-16688а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Каганов, А. И. Омелянчук, ЖЭТФ **61**, 1679 (1971).
2. I. N. Khlustikov and A. I. Buzdin, Adv. Phys. **36**, 271 (1987).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
4. M. L. Plumer and M. B. Walker, J. Phys. C **14**, 4689 (1981).
5. J. Beille, J. Voicon, and M. Roth, Sol. St. Comm. **47**, 399 (1983).
6. А. Буздин, Y. Meurdesoif, Письма в ЖЭТФ **65**, 776 (1997).
7. А. Богданов, Письма в ЖЭТФ **68**, 296 (1998).
8. A. Zheludev, G. Shirane, Y. Sasago et al., Phys. Rev. B **54**, 15163 (1996).
9. A. Zheludev, S. Maslov, G. Shirane et al., Phys. Rev. B **59**, 11432 (1999).
10. M. D. Lumsden, B. C. Sales, D. Mandrus et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 159 (2001).
11. A. N. Bogdanov, U. K. Röbber, M. Wolf, and K.-H. Müller, Phys. Rev. B **66**, 214410 (2002).
12. A. Zheludev, T. Sato, T. Masuda et al., Phys. Rev. B **68**, 024428 (2003).
13. И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **46**, 1420 (1964).
14. Ю. А. Изюмов, УФН **27**, 850 (1984).
15. П. де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, Москва (1977).
16. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
17. A. Bogdanov and A. Hubert, J. Magn. Magn. Mat. **138**, 255 (1994).