

МЕТОД ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ

*В. П. Карасев, А. В. Масалов**

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 ноября 2003 г.

Определяются сущность и базисные структурные элементы метода поляризационной томографии квантового излучения — реконструкции поляризационных состояний поля на основе данных только поляризационных измерений. Обсуждаются его существенные особенности по сравнению с обычной полевой и спиновой томографиями. Предложена общая схема экспериментальной реализации данного метода и кратко анализируется опыт ее применения к поляризационной томографии бифотонного излучения со скрытой поляризацией.

PACS: 42.50.Lc, 03.65.Wj

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание квантовых свойств света на языке квазивероятностных распределений как дополнение к языку волновых функций и матрицы плотности становится в последние годы все более привлекательным из-за наглядности и близости описания к классической интуиции [1–4]. Потребность в наглядном представлении свойств квантовых объектов актуальна в связи с интенсивными исследованиями неклассических состояний и эффектов квантового света (см., например, [1, 4–6] и цитированную там литературу), а также благодаря бурному развитию идей квантовых вычислений, когда квантовые концепции становятся все более востребованными в среде не только физиков, но и инженеров [7–10]. Квазивероятностные распределения аналогичны классическому совместному распределению вероятности нескольких переменных поля, но обеспечивают строгое описание квантового состояния объекта, являясь проекциями оператора плотности в представлении фазового пространства [3]. При соответствующем выборе квазивероятностной функции ее «срезы» определяют истинно вероятностные (так называемые маргинальные) распределения одной из измеримых квантовых наблюдаемых. Например, при описании квадратур светового поля такой выбор

обеспечивает функция Вигнера, которая демонстрирует наибольшую близость описания к классической интуиции при сохранении квантовой информативности [1, 2]. Квантовая томография устанавливает связь между квазивероятностными распределениями и результатами измерений, характеризующих квантовое состояние объекта, причем сама процедура восстановления функции квазивероятности по экспериментально зарегистрированным распределениям наблюдаемых оказывается весьма не простой задачей как в математическом плане, так и с точки зрения практических измерений [11–17].

В настоящее время наиболее разработанным и экспериментально реализованным томографическим методом в квантовой оптике является полевая томография одномодового излучения [11, 12, 14]. В ее основе лежит томографическое представление оператора плотности в форме интегрального разложения по некоторым базисным операторам («томографическим ядрам») [14], где в качестве коэффициентов выступают распределения вероятностей наблюдаемых (квадратур) поля, получаемые в гомодинных измерениях [12]. Однако модели одномодового излучения, очевидно, недостаточны в оптике, и поэтому необходим квазиклассический анализ и квантовая томография многомодовых полей, для которых, помимо полного описания состояния, представляет интерес также частичная

*E-mail: masalov@mail1.lebedev.ru

характеризация состояния в терминах некоторых коллективных переменных [4, 6, 15–18]. Соответственно, имеет смысл и частичная томография многомодовых полей, включающая экспериментальную реконструкцию редуцированного состояния таких полей [15].

Данная статья посвящена проблеме квантовой томографии поляризованного состояния света, описываемого квазивероятностными распределениями в трехмерном пространстве переменных $p_{i=1,2,3}$, которые ассоциированы с векторными параметрами Стокса [15, 16]. Интерес к поляризационным функциям квазивероятности обусловлен тем, что эти распределения оказались эффективным инструментом изучения многих неклассических состояний и явлений поляризационной оптики (см., например, [4, 6] и цитированную там литературу). Более того, ряд недавних экспериментов, демонстрирующих неклассические состояния поляризованного света [19–21], выявляют пробелы и нехватку строгих теоретических средств для создания квазиклассических образов квантового состояния генерируемого излучения.

Общая схема квантовой томографии поляризованных состояний света аналогична той, которая принята в полевой томографии одномодового излучения. Однако конкретные пути ее реализации имеют существенные особенности в силу того, что поляризационные переменные p_i (и соответствующие им операторы \hat{P}_i), во-первых, суть функции квадратур нескольких (минимум двух) мод излучения и, во-вторых, не составляют полного набора переменных поля [15]. Последовательное построение теоретического аппарата поляризационной томографии можно осуществить путем многомодового обобщения [13] одномодовой полевой томографии с последующей репараметризацией квадратур, выделяющей поляризационные (p_i) и неполяризационные переменные, и редукцией последних [15, 17]. Такой способ, очевидно, обладает избыточностью вычислений, а его экспериментальный аналог — сложностью реализации (из-за использования техники многомодового гомодинирования).

Эти недостатки устраняются в альтернативном подходе [15], который можно назвать собственно методом поляризационной томографии излучения (ПТИ) и который положен в основу данной работы. В его рамках осуществляется прямое определение поляризационных функций квазивероятности на основе формализма P -квазиспина [22, 23] и их экспериментальная реконструкция на основе распределений вероятности, получаемых в поляризационных измерениях [16]. Цель данной работы — разъ-

яснение физической сущности и базисных соотношений метода ПТИ¹⁾ с кратким обсуждением его особенностей и примера экспериментальной реализации. Важным вопросом в рамках метода ПТИ является выбор поляризационной функции квазивероятности. Как и в полевой томографии, возможно введение множества поляризационных функций квазивероятности, каждая из которых обладает необходимым математическим содержанием. Однако наилучшее сочетание визуальной информативности и близости к классической интуиции свойственно лишь некоторым; в полевой томографии такое сочетание обеспечивает функция Вигнера. В данной работе сделан выбор одной из множества квазивероятностных функций на основании математической простоты и информативной содержательности.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

Главным объектом квантовой поляризационной томографии излучения является квазивероятностное распределение в трехмерном пространстве переменных p_i , которые ассоциированы с параметрами Стокса s_i , известными из традиционной классической оптики. Как уже говорилось, такое распределение визуализирует интуитивные представления о квантовых флуктуациях излучения и дает возможность качественной и количественной оценки проявления квантовых флуктуаций в поляризационных измерениях [4, 6]. Следует отметить необходимость трех измерений для представления поляризационных свойств излучения. Здесь трехмерность поляризационного пространства состояний выступает как выход за пределы двумерной сферы Пуанкаре, где невозможно представить поляризационные свойства излучения с неопределенной интенсивностью, а также свойства неполяризованного света. На языке наблюдаемых величин сведения для конструирования квазивероятностного распределения черпаются из данных о вероятностных распределениях собственных значений S_i квантовых поляризационных наблюдаемых $\hat{S}_i = 2\hat{P}_i$ и их линейных комбинаций. Переменные S_i , которые пропорциональны параметрам Стокса s_i в случае плосковолнового монохроматического излучения²⁾, измеряются с помощью поля-

¹⁾ Имея в виду, что в работе [15] главное внимание уделялось лишь некоторым математическим аспектам обсуждаемого метода.

²⁾ Поэтому для простоты их будем называть переменными Стокса и в общем случае, когда такая связь не имеет места [22].

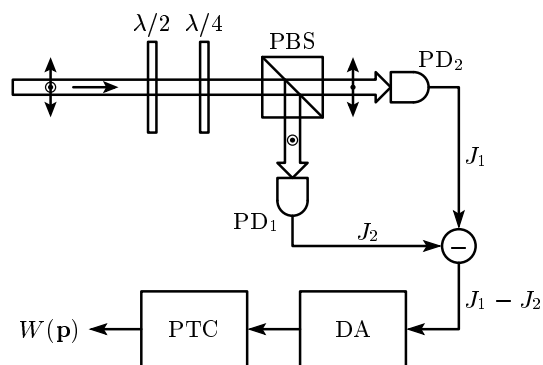


Рис. 1. Схема измерения поляризационных наблюдаемых типа (8): PBS — поляризационный светоделитель, PD_{1,2} — фотодетекторы, DA — анализатор распределения амплитуд разностного фототока, PTC — поляризационный томоконвертор, преобразующий набор измеряемых данных в распределение квазивероятности $W(\mathbf{p})$ или $W(\mathbf{s})$

ризаационного светоделителя, помещенного в исследуемый световой пучок, и двух идеальных фотодетекторов, токи которых вычитаются друг из друга, а разнообразие переменных задается фазовой пластинкой перед светоделителем и ориентацией самого светоделителя (см. рис. 1). В узком смысле слова поляризационная томография состоит в восстановлении поляризационной квазивероятности из результатов указанных простейших поляризационных измерений. Очевидна аналогия поляризационной томографии и квадратурной (полевой) томографии, развитой в связи с анализом неклассических свойств сжатого и других состояний света. В квадратурной томографии также необходима регистрация распределений множества квадратур, а в результате восстанавливается квазивероятностное распределение поля излучения.

Обращаясь к математическим основам поляризационной томографии, перечислим краеугольные элементы метода поляризационной томографии. В первую очередь следует назвать квантовую поляризационную характеристическую функцию, порождаемую оператором сдвига в пространстве поляризационных переменных. С одной стороны, эта характеристическая функция поставляет сведения о распределении вероятности произвольной поляризационной наблюдаемой (зависящей от \hat{S}_i), а с другой стороны, ее трехмерное интегральное преобразование (с тем или иным ядром) является квазивероятностным распределением. Таким образом, поляризационная характеристическая функция связывает наблюдае-

мые величины и квазивероятность. Однако введение характеристической функции не решает двух важных проблем. Во-первых, остается нерешенной проблема выбора типа функции квазивероятности, которая сводится к выбору типа преобразования характеристической функции. На практическом языке этот выбор состоит в поиске такой функции квазивероятности, которая обеспечит оптимальный баланс между квантовой информативностью и «классичностью» представления поляризации. Во-вторых, остается нерешенной другая (возможно, более важная) проблема — определение «классических» образов операторов поляризационных наблюдаемых (аналогов символов Вейля), необходимых для получения «классической» формы усреднения этих наблюдаемых с помощью квазивероятностных функций [24].

Напомним, что в квадратурной томографии построение таких квазиклассических образов можно свести к разложению как оператора плотности, так и операторов произвольных полевых наблюдаемых по непрерывному базису операторов Вигнера $\hat{W}(\beta)$, задаваемых фурье-образами полевого оператора сдвига $\hat{D}(\beta) = \exp(\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a})$ (в свою очередь определяющего полевую характеристическую функцию $\chi(\beta; \hat{\rho}) = \langle \hat{D}^\dagger(\beta) \rangle$ [11]), и последующему проектированию на этот базис [1]. При этом непрерывное семейство операторов Вигнера играет роль, аналогичную семейству глауберовских когерентных состояний в квазиклассических представлениях чистых состояний гильбертова пространства электромагнитного поля, заданного изначально в дискретном фоковском базисе. Отметим, что данное и указанное во Введении («томографическое») разложение полевого оператора плотности образуют ключевые элементы математических основ обычной полевой томографии [14]. Поэтому, согласно [15], и в поляризационной томографии ее вторым краеугольным элементом является определение поляризационного оператора плотности, характеризующего только (!) поляризационные степени свободы световых полей, и получение его «томографического» и «квазиклассического» разложений — аналогов соответствующих разложений для полного полевого оператора плотности. При этом ключевая роль принадлежит томографическому представлению поляризационного оператора плотности, которое в качестве коэффициентов разложения содержит распределения вероятности множества переменных Стокса. Это соотношение является основой для поляризационной томографии, понимаемой в широком смысле слова как восстановление поляризационного оператора

плотности по данным измерений. Отметим, однако, что в силу особенностей коммутационных соотношений для трех операторов \hat{P}_i простой перенос всех формальных конструкций квадратурной томографии в поляризационную томографию не пригоден. В частности, это относится к определению квазиклассического операторного базиса, который позволяет не только выбрать подходящую функцию квазивероятности, но и определить адекватные «классические» образы тех или иных поляризационных операторов. Ниже мы дадим определения указанных базисных элементов математических основ поляризационной томографии и разъяснение их физического смысла.

Ключевое значение для указанных выше целей имеет адекватное описание поляризационной структуры квантовых световых полей и соответствующих операторов величин, задающих эту структуру и наблюдаемых в поляризационных опытах. Казалось бы, естественно взять в качестве таких базисных наблюдаемых поляризационной квантовой оптики три оператора вектора Стокса, соответствующих наблюдаемым в стандартных поляризационных опытах классической оптики:

$$\begin{aligned} \hat{E}_x^{(-)} \hat{E}_x^{(+)} - \hat{E}_y^{(-)} \hat{E}_y^{(+)}, \quad \hat{E}_{x'}^{(-)} \hat{E}_{x'}^{(+)} - \hat{E}_{y'}^{(-)} \hat{E}_{y'}^{(+)}, \\ \hat{E}_+^{(-)} \hat{E}_+^{(+)} - \hat{E}_-^{(-)} \hat{E}_-^{(+)}. \end{aligned}$$

Здесь $\hat{E}_\alpha^{(\pm)}$ — операторы положительно- (отрицательно-) частотных компонент поля с поляризацией α , а индексы $x, y, x', y', -, +$ нумеруют (связанные унитарными преобразованиями) пары ортогональных мод в двух типах линейной и круговой поляризаций излучения. Однако эти операторы, как и их классические прототипы, определены корректно лишь для плосковолнового излучения, и, кроме того, в случае многочастотных полей они зависят от времени и описывают «биения» частотных мод, что не имеет прямого отношения к поляризации. Эти недостатки отсутствуют в описании поляризационной структуры квантового излучения, предложенном в работе одного из авторов [22] и использующем вместо операторов Стокса компоненты \hat{P}_j оператора P -квазиспина $\hat{\mathbf{P}}$, которые в рамках общей квантово-электродинамической схемы заменяют компоненты обычного спина, теряющего свое физическое значение (ввиду отсутствия его калибровочной инвариантности) для безмассовых полей. В случае монохроматического плосковолнового излучения (одной пространственно-временной моды), когда имеются только две поляризационные моды излучения с одинаковыми волновыми векторами \mathbf{k} , эти операторы

определяются через разности операторов чисел фотонов [6]:

$$\begin{aligned} 2\hat{P}_1 = \hat{n}_x - \hat{n}_y, \quad 2\hat{P}_2 = \hat{n}_{x'} - \hat{n}_{y'}, \\ 2\hat{P}_3 = \hat{n}_+ - \hat{n}_-, \quad \hat{n}_\alpha = \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Отметим, что в этом случае операторы $2\hat{P}_i$ совпадают (с точностью до несущественного множителя) с операторами Стокса, чьи средние равны векторным параметрам Стокса; кроме того, оператор $2\hat{P}_3$ совпадает с оператором спиральности. Для случая нескольких пространственно-временных мод компоненты оператора P -квазиспина представляют собой суммы соответствующих операторов по всем модам, но отмеченной выше простой связи с операторами Стокса нет даже для квазимонохроматического излучения.

Операторы \hat{P}_i удовлетворяют коммутационным соотношениям $[\hat{P}_a, \hat{P}_b] = i\epsilon_{abc} \hat{P}_c$ алгебры $su(2)$ [22], что позволяет эффективно использовать ее формализм для поляризационной характеристики квантовых состояний гильбертова пространства (Фока) световых полей и вывода базисных соотношений метода ПТИ [15]. В частности, разнообразие поляризационных свойств квантовых состояний излучения описывается с помощью базиса $\{|P, \mu\rangle\}$ собственных состояний операторов $\hat{\mathbf{P}}^2 \equiv \hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_3^2 \equiv \hat{P}^2 + \hat{P}$ и \hat{P}_3 . При этом базис поляризационных состояний излучения $\{|P, \mu\rangle\}$ в гильбертовом пространстве фокских состояний нумеруется квантовыми числами P и μ , которые задают, соответственно, значения P -квазиспина и его проекции на направление излучения (половине значения полной спиральности поля):

$$\begin{aligned} \hat{P} |P, \mu\rangle = P |P, \mu\rangle, \\ \hat{\mathbf{P}}^2 \equiv \hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_3^2 \equiv \hat{P}^2 + \hat{P}, \\ \hat{P}_3 |P, \mu\rangle = \mu |P, \mu\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

фиксируя тем самым поляризационную структуру электромагнитного поля [22].

В простейшем случае одной пространственно-временной моды, когда справедливо соотношение

$$\hat{\mathbf{P}}^2 = \hat{P}^2 + \hat{P} = \hat{N}^2/4 + \hat{N}/2 \quad \leftrightarrow \quad \hat{P} = \frac{\hat{N}}{2} \quad (3)$$

между операторами P -квазиспина и оператором полного числа фотонов

$$\hat{N} = \hat{n}_x + \hat{n}_y = \hat{n}_{x'} + \hat{n}_{y'} = \hat{n}_+ + \hat{n}_-,$$

задание поляризационного базиса $\{|P, \mu\rangle\}$ в гильбертовом пространстве $L_F(1) = \text{Span}\{|n_+, n_-\rangle\}$ сводится к перенумерации фоковских состояний с круговой поляризацией:

$$\begin{aligned} |P, \mu\rangle &\equiv |n_+ = P + \mu, n_- = P - \mu\rangle = \\ &= \frac{(\hat{a}_+^\dagger)^{P+\mu} (\hat{a}_-^\dagger)^{P-\mu}}{\sqrt{(P+\mu)!(P-\mu)!}} |0, 0\rangle, \quad (4) \\ 2P &= 0, 1, 2, \dots, \infty, \quad |\mu| \leq P. \end{aligned}$$

Для однофотонных состояний излучения из (4) и (2) следует, что значения P -квасиспина равны $1/2$, а не единице (как это имеет место для обычного спина), при этом операторы квазиспина \hat{P}_i из (1) задаются в базисе (4) матрицами Паули. Это обусловлено тем, что понятие P -квасиспина ассоциировано с $SU(2)$ -симметрией свободного электромагнитного поля, которая дополнительна к релятивистской инвариантности, описываемой группой Пуанкаре³⁾. Наличие такой инвариантности отмечалось в литературе уже в начале 20-го века и угадывается в бивекторной формулировке уравнений Максвелла, данной Майорана. Позже такая симметрия явно, но спорадически формулировалась в работах по теории поля⁴⁾, но систематическое использование понятия P -квасиспина для адекватной характеристики поляризационной структуры квантовых световых полей было предложено в работе [22]. В общем случае произвольного числа пространственно-временных мод векторы $|P, \mu\rangle$ задаются линейными комбинациями фоковских состояний, которые соответствуют разложению (Клебша–Гордана) тензорных произведений $D^{P_1=N_1/2} \otimes D^{P_2=N_2/2} \otimes \dots$ неприводимых представлений группы $SU(2)$ (с базисами (4)) на неприводимые компоненты с базисами (2) [22].

Задание поляризационного базиса (2) позволяет ввести поляризационный оператор плотности

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \sum_{P, \mu, \mu'} R_{\mu', \mu}^P |P, \mu'\rangle \langle P, \mu|, \quad (5) \\ R_{\mu, \mu'}^P &\equiv \langle P, \mu | \hat{\rho} | P, \mu' \rangle, \end{aligned}$$

который представляет собой редукцию полного оператора плотности излучения: $R_{\mu, \mu'}^P = \langle P, \mu | \hat{\rho} | P, \mu' \rangle$. Поляризационный оператор плотности характеризует квантовые свойства света в поляризационных

³⁾ Поэтому используемый иногда в литературе термин «урезанный (редуцированный) спин» (ввиду отмеченной выше связи $2\hat{P}_z$ с оператором спиральности) для обозначения P -квасиспина не вполне адекватен, так как маскирует его физическую сущность.

⁴⁾ Краткие исторические замечания по этому вопросу можно найти в работах [23].

опытах и полностью описывает только (!) поляризационное состояние поля [15]. В качестве примеров выпишем матричные элементы

$$R_{\mu', \mu}^P(N) = \delta_{P, N/2} c_{P+\mu, P-\mu} c_{P+\mu', P-\mu'}^*, \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu', \mu}^P(\alpha_+, \alpha_-) &= \exp(-|\alpha_+|^2 - |\alpha_-|^2) \times \\ &\times \frac{(\alpha_+)^{P+\mu} (\alpha_-)^{P-\mu} (\alpha_+^*)^{P+\mu'} (\alpha_-^*)^{P-\mu'}}{\sqrt{(P+\mu)!(P-\mu)!(P+\mu')!(P-\mu')!}} \quad (6b) \end{aligned}$$

для состояний квантово-оптического излучения двух поляризационных мод круговой поляризации с фиксированным полным числом фотонов в обеих модах:

$$|N\rangle = \sum_{n_+, n_- = N} c_{n_+, n_-} |n_+, n_-\rangle, \quad \hat{\rho}(N) = |N\rangle \langle N|,$$

и двухмодовых глауберовских когерентных состояний

$$\begin{aligned} |\alpha_+, \alpha_-\rangle &= \exp(-|\alpha_+|^2/2 - |\alpha_-|^2/2) \times \\ &\times \sum_{n_+, n_-} \frac{(\alpha_+)^{n_+} (\alpha_-)^{n_-}}{\sqrt{n_+! n_-!}} |n_+, n_-\rangle, \\ \hat{\rho} &= |\alpha_+, \alpha_-\rangle \langle \alpha_+, \alpha_-|. \end{aligned}$$

Отметим, что в первом примере оператор \hat{R} определяется конечным числом $(N+1)^2$, а во втором — бесконечным числом матричных элементов $R_{\mu', \mu}^P$.

Введение поляризационного оператора плотности (5) мотивировано тем, что для всякой поляризационной переменной (т.е. такой, оператор которой зависит только от билинейных комбинаций полевых операторов \hat{a}_α и \hat{a}_α^\dagger вида (1), а значит, только от \hat{S}_j или \hat{P}_j) матричные элементы ее оператора $\hat{A}(\hat{\mathbf{P}})$ в базисе $\{|P, \mu\rangle\}$ имеют блочно-диагональную форму (блочную по индексу μ и диагональную по P):

$$\langle P', \mu' | \hat{A}(\hat{\mathbf{P}}) | P, \mu \rangle = \delta_{P', P} A_{\mu', \mu}^P. \quad (7)$$

Тогда квантовое среднее $\langle \hat{A}(\hat{\mathbf{P}}) \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{A}(\hat{\mathbf{P}})]$ выражается через матричные элементы поляризационного оператора плотности как

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}(\hat{\mathbf{P}}) \rangle &= \sum_{2P=0}^{\infty} \sum_{\mu=-P}^P \sum_{\mu'=-P}^P A_{\mu, \mu'}^P R_{\mu', \mu}^P \equiv \\ &\equiv \text{Tr} [\hat{R} \hat{A}(\hat{\mathbf{P}})], \quad (8) \end{aligned}$$

а не через элементы полного полевого оператора плотности. Отметим, что выражение (8) аналогично формуле усреднения для спиновых систем [25], но в

отличие от последней оно содержит в общем случае бесконечные суммы по квазиспину P , поскольку из (4) (и примера (6б)) следует, что световые поля, генерируемые реальными источниками, являются системами с переменным P -квазиспином [22]; только состояния с фиксированным полным числом фотонов N в обеих поляризационных модах (6а) формально эквивалентны состояниям частиц со спином $N/2$.

Данное описание поляризационной структуры световых полей легко обобщается на случай произвольного числа m пространственно-временных мод с помощью определения полных наблюдаемых \hat{P}_i путем суммирования по \mathbf{k} «парциальных» компонент $\hat{P}_{i\mathbf{k}}$, заданных соотношениями (1) [6, 15]. При этом соотношения (3), (4) нарушаются, P -квазиспин становится самостоятельной (не зависящей от \hat{N}) наблюдаемой, а определяемый соотношениями (2) поляризационный базис $|P, \mu; \lambda\rangle \in L_F(m)$ содержит дополнительные (неполяризационные) квантовые числа λ . В то же время сохраняются соотношение (8) и физический смысл поляризационного оператора плотности \hat{R} , хотя его формальное определение (5) слегка модифицируется: базисные векторы $|P, \mu'\rangle$ в (5) и след в последнем равенстве (8) определяются не в полном полевом пространстве $L_F(m)$, а в его фактор-пространстве $L_P(m) \sim L_F(1)$; соответственно, коэффициенты $R_{\mu, \mu'}^P$ определяются путем суммирования элементов $\langle P, \mu; \lambda | \hat{\rho} | P, \mu'; \lambda \rangle$ полевой матрицы плотности по неполяризационным индексам λ [15].

Так же, как в полевой томографии, требующей для исследования состояния поля регистрации вероятностных распределений множества «повернутых» квадратур, в поляризационной томографии необходимо иметь дело с множеством «повернутых» поляризационных наблюдаемых Стокса [15, 16] вида

$$\begin{aligned} \hat{S}(\theta, \phi) &= (\hat{S}_1 \sin \theta \cos \phi + \hat{S}_2 \sin \theta \sin \phi + \hat{S}_3 \cos \theta) = \\ &= 2\hat{T}(\mathbf{n})\hat{P}_3\hat{T}^\dagger(\mathbf{n}). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ соответствует вектору положения на поляризационной сфере Пуанкаре, а унитарный оператор

$$\hat{T}(\mathbf{n}) = \exp \left[-i\theta(-\hat{P}_1 \sin \phi + \hat{P}_2 \cos \phi) \right] \quad (10)$$

описывает вращения на этой сфере. Каждая наблюдаемая $\hat{S}(\theta, \phi)$ имеет дискретный спектр: $S = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ с вырожденными собственными состояниями

$$\begin{aligned} |P, \mu; \theta, \phi\rangle &= \hat{T}(\mathbf{n})|P, \mu\rangle = \\ &= \sum_{\mu'} D_{\mu', \mu}^P(\phi, \theta, -\phi) |P, \mu'\rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\hat{S}(\theta, \phi) |P, \mu; \theta, \phi\rangle = 2\mu |P, \mu; \theta, \phi\rangle,$$

которые одновременно являются обобщенными когерентными состояниями группы $SU(2)$ поляризационной инвариантности световых полей с элементами $\exp \left[i \left(\sum_j u_j P_j \right) \right]$ [15]. Здесь $D_{\mu', \mu}^P(\phi, \theta, -\phi)$ — D -функция Вигнера группы $SU(2)$ [25]. Распределения вероятности $p(S; \theta, \phi)$ наблюдаемых $\hat{S}(\theta, \phi)$ в состоянии \hat{R} определяются через «усреднение»

$$p(S; \theta, \phi) = \sum_{P \geq |S/2|} \left\langle P, \frac{S}{2}; \theta, \phi \left| \hat{R} \right| P, \frac{S}{2}; \theta, \phi \right\rangle \quad (12)$$

поляризационного оператора плотности в базисе (11). Отметим, что благодаря (11), (12) распределения вероятности $p(S; \theta, \phi)$ выражаются в форме рядов от произведений матричных элементов $R_{\mu', \mu}^P$ поляризационного оператора плотности и сферических функций $Y_{lm}(\theta, \phi)$:

$$\begin{aligned} p(S; \theta, \phi) &= \sum_{P \geq |S/2|} \sum_{|\mu| \leq P, |\mu'| \leq P} R_{\mu', \mu}^P \times \\ &\times \sum_{l=0}^{2P} \sum_{m=-l}^l (-1)^{(S/2)-\mu} \dots Y_{lm}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (13)$$

где множители «...» выражаются через произведения коэффициентов Клебша–Гордана группы $SU(2)$ [25].

Другой важный элемент математического аппарата ПТИ — поляризационная характеристическая функция

$$\begin{aligned} \chi(\omega, \mathbf{n}) &= \langle \hat{U}^\dagger(\omega, \mathbf{n}) \rangle = \sum_{P, \mu, \mu'} R_{\mu, \mu'}^P U_{\mu', \mu}^P(-\omega, \mathbf{n}) = \\ &= \sum_{S=-\infty}^{\infty} p(S; \theta, \phi) \exp \left(i\omega \frac{S}{2} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

которая определяется с помощью унитарного оператора сдвига

$$\begin{aligned} \hat{U}(\omega, \mathbf{n}) &= \exp(-i\omega \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{P}}) = \\ &= \hat{T}(\mathbf{n}) \exp(-i\omega \hat{P}_3) \hat{T}^\dagger(\mathbf{n}) = \\ &= \sum_{P, \mu, \mu'} U_{\mu', \mu}^P(\omega, \mathbf{n}) |P, \mu'\rangle \langle P, \mu| = \\ &= \sum_{P, \mu} |P, \mu; \theta, \phi\rangle \langle P, \mu; \theta, \phi| \exp(-i\omega \mu) \end{aligned} \quad (15)$$

упомянутой выше поляризационной группы $SU(2)$ [15].

Данные выше элементы описания поляризации квантового света позволяют получить (на основе их математических свойств [15, 25]) базовое для ПТИ томографическое представление поляризационного оператора плотности:

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \int_{S_+^2} d^2\mathbf{n} \sum_{S=-\infty}^{\infty} p(S; \theta, \phi) \hat{K}(S; \mathbf{n}) \equiv \\ &\equiv \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{S=-\infty}^{\infty} p(S; \theta, \phi) \hat{K}(S; \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь коэффициентами являются распределения вероятностей $p(S; \theta, \phi)$ — поляризационные томограммы, определяемые экспериментально, а операторное томографическое ядро имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{K}(S; \mathbf{n}) &= \hat{T}(\mathbf{n}) \hat{K}_0(S) \hat{T}^\dagger(\mathbf{n}), \\ \hat{K}_0(S) &= \frac{2\hat{P} + 1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos \left[\omega \left(\frac{S}{2} - \hat{P}_3 \right) \right] \times \\ &\times \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega, \end{aligned} \quad (17)$$

справедливый для произвольного числа пространственно-временных мод (с учетом сделанных выше замечаний относительно определения полных наблюдаемых \hat{P}_i). Отметим, что в отличие от гомодинной полевой томографии ядро $\hat{K}(S; \mathbf{n})$ в (16) не сингулярно, как это следует из спектрального разложения $\hat{K}_0(S)$ в поляризационном базисе $\{|P, \mu\rangle\}$ [15]. Представление поляризационного оператора плотности в форме разложения (16) по частично непрерывному базису (17) является первым основным результатом данной работы.

Базисное соотношение (16) является обратным к (12) и замыкает взаимосвязь между поляризационным оператором плотности и множеством данных о распределениях, извлекаемых из экспериментальных измерений. Оба эти соотношения составляют математическую основу поляризационной квантовой томографии в широком смысле слова. Отметим, что из-за непрерывности переменных θ, ϕ разложение (16) оператора \hat{R} по «частично непрерывному» операторному базису $\{\hat{K}(S; \mathbf{n})\}$ страдает, в отличие от дискретного представления (5), чрезвычайной избыточностью данных измерений (континуальностью массива поляризационных томограмм $p(S; \theta, \phi)$, необходимых для точной реконструкции

поляризационного оператора плотности). Эта избыточность обусловлена сверхполнотой множества базисных операторов по сравнению с полной системой счетного базиса диадик $|P, \mu'\rangle\langle P, \mu|$ в определении (5). Ее можно ослабить, «редуцировав» базис операторов $\hat{K}(S; \mathbf{n})$ и множество соответствующих томограмм $p(S; \theta, \phi)$ к полным счетным подмножествам по угловым переменным вектора $\mathbf{n}(\theta, \phi)$, аналогично случаю спиновой томографии [26]. Кроме того, такая «размерная редукция» массива данных измерений может быть усилена при наличии априорной информации о характере исследуемого излучения. Например, из (6) следует, что мультипольные разложения (13) для вероятностей $p(S; \theta, \phi)$ содержат конечное число членов в случае N -фотонных состояний монохроматического плосковолнового излучения с поляризационным оператором плотности (6а), тогда как в случае глауберовских когерентных состояний с поляризационным оператором плотности (6б) такие разложения, хотя и бесконечны, но определяют (при любых S) вероятности $p(S; \theta, \phi)$ как семейство функций на сфере, параметризуемое значениями α_+ и α_- . Поэтому можно ожидать, что качественную томографию в первом случае можно получить с не более чем $(N + 1)^2$ измерений, тогда как во втором случае число измерений, необходимых для этой цели, будет определяться методами статистического оценивания параметров [27].

Для завершения томографической схемы необходимо вычислить с помощью (16) матричные элементы поляризационного оператора плотности \hat{R} в некотором базисе. Эта задача сводится к вычислению в этом базисе матричных элементов томографических ядер $\hat{K}(S; \mathbf{n})$, что обеспечивает переход (проектирование) от (16) к его соответствующей s -числовой версии. Например, в работе [15] было осуществлено такое проектирование равенства (16) на базис диадик $|P, \mu'\rangle\langle P, \mu|$, что приводит к его s -числовой версии для восстановления матричных элементов $R_{\mu', \mu}^P$ из экспериментальных измерений. Однако для завершения томографической схемы в узком смысле необходимо ввести в нее функции квазивероятности как координаты оператора плотности в некотором базисе «квазиклассических» (нумеруемых точками фазового пространства) эрмитовых операторов [24]. Отметим, что по отношению к базису диадик такой квазиклассический операторный базис играет роль, аналогичную роли глауберовских когерентных состояний по отношению к дискретному фоковскому базису при описании состояний гильбертова пространства электромагнитного поля. Выбор подходящего базиса для определения адекватной функции

квазивероятности диктуется простотой и наглядностью тех соотношений, которые возникают в соответствующем квазиклассическом анализе квантовых проблем. Так, в полевой томографии с функцией Вигнера в качестве квазивероятности такой базис образуют операторы Вигнера $\hat{W}(\beta)$, определяемые фурье-преобразованиями полевого оператора сдвига $\hat{D}(\beta)$ [1].

В поляризационной томографии также целесообразно выбрать в качестве квазиклассического операторного базиса какое-либо интегральное преобразование оператора сдвига (15) группы $SU(2)$ в трехмерное поляризационное фазовое пространство $R^3 = \{\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)\}$, являющееся фактор-пространством полного полевого фазового пространства ($R^3 \equiv C^2/S^1$ для случая одной пространственно-временной моды) и имеющее координаты $p_{i=1,2,3}$, ассоциированные с векторными параметрами Стокса [6, 15]. Простейший такой операторный базис задается фурье-образами оператора сдвига $\hat{U}(\omega, \mathbf{n})$, нумеруемыми фазовыми точками $\mathbf{p} \in R^3$ [6]:

$$\begin{aligned} \hat{W}(\mathbf{p}) &= \int_{R^3} \frac{d\omega d\mathbf{n}}{(2\pi)^3} \hat{U}(\omega, \mathbf{n}) e^{i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}} = \\ &= \int_{R^3} \frac{d\omega d\mathbf{n}}{(2\pi)^3} \sum_{P, \mu} |P, \mu; \theta, \phi\rangle \langle P, \mu; \theta, \phi| e^{i\omega(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - \mu)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Однако, в отличие от операторов Вигнера полевой томографии, операторы (18) сингулярны и, кроме того, не являются взаимно ортогональными:

$$\text{Tr} [\hat{W}(\mathbf{p}) \hat{W}(\mathbf{p}')] \neq \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (19)$$

что не позволяет получить полное квазиклассическое описание поляризации излучения, в частности, квазиклассическую форму квантового среднего (8). Последний недостаток можно компенсировать введением еще одного операторного базиса $\{\hat{V}(\mathbf{p})\}$, обладающего свойством биортогональности по отношению к $\hat{W}(\mathbf{p})$:

$$\text{Tr} [\hat{W}(\mathbf{p}) \hat{V}(\mathbf{p}')] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (20)$$

и задаваемого другим типом преобразования оператора сдвига $\hat{U}(\omega, \mathbf{n})$ [6, 15, 28]:

$$\begin{aligned} \hat{V}(\mathbf{p}) &= \frac{2\hat{P} + 1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega \int_0^\pi d\cos\theta \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\phi \hat{U}(\omega, \mathbf{n}) e^{i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}} = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega \int_0^\pi d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \times \\ &\quad \times \sum_{P, \mu} \frac{2P + 1}{4\pi^2} |P, \mu; \theta, \phi\rangle \langle P, \mu; \theta, \phi| e^{i\omega(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - \mu)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Свойство (20) биортогональности операторов $\hat{W}(\mathbf{p})$ и $\hat{V}(\mathbf{p})$ делает удобным их использование в квантовых расчетах парами, что аналогично парному использованию P - и Q -представлений в квазиклассических расчетах квантово-оптических величин. Так, задавая разложение поляризационного оператора плотности в базисе $\hat{V}(\mathbf{p})$ в виде

$$\hat{R} = \int_{R^3} W(\mathbf{p}) \hat{V}(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (22)$$

получаем функцию поляризационной квазивероятности $W(\mathbf{p})$ как проекцию оператора плотности на базис $\hat{W}(\mathbf{p})$:

$$W(\mathbf{p}) = \text{Tr} [\hat{R} \hat{W}(\mathbf{p})]. \quad (23)$$

Тогда квантовые средние (8) можно представить в классической форме:

$$\langle \hat{A}(\hat{\mathbf{P}}) \rangle = \int_{R^3} V(\mathbf{p}; \hat{A}) W(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (24)$$

где квазиклассическим партнером квазивероятностного распределения $W(\mathbf{p})$ является проекция $V(\mathbf{p}; \hat{A})$ (вейлевский символ) квантового оператора $\hat{A}(\hat{\mathbf{P}})$ на базис $\hat{V}(\mathbf{p})$:

$$V(\mathbf{p}; \hat{A}) = \text{Tr} [\hat{A} \hat{V}(\mathbf{p})]. \quad (25)$$

Таким образом, пара биортогональных операторных базисов $\hat{W}(\mathbf{p})$ и $\hat{V}(\mathbf{p})$ замыкает математическую схему квантовой поляризационной томографии.

В работах [4, 6] в качестве функции поляризационной квазивероятности была взята проекция оператора \hat{R} на базис (18). Среди множества биортогональных пар базисы (18) и (21) обладают тем преимуществом, что символ Вейля оператора сдвига совпадает с классической экспонентой:

$$V(\mathbf{p}; \hat{U}^\dagger(\omega, \mathbf{n})) = \text{Tr} \left[\hat{U}^\dagger(\omega, \mathbf{n}) \hat{V}(\mathbf{p}) \right] = \exp(i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}), \quad (26)$$

а символ Вейля оператора типа $f(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{P}})$ есть просто $f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})$. Кроме того, в силу (22)–(26) квазивероятность $W(\mathbf{p})$ в этом случае можно определить как преобразование Фурье характеристической функции $\chi(\omega, \mathbf{n})$,

$$W(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \chi(\omega, \mathbf{n}) \exp(-i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) d\omega d\mathbf{n}, \quad (27)$$

что соответствует определению совместного распределения вероятностей в классической картине. Выбор квазивероятностного распределения в соответствии с (27) (эквивалентный заданию базисов в форме (18) и (21)) является вторым основным результатом данной работы. Адекватность такого квазивероятностного распределения для характеристики квантового поляризационного состояния излучения была проиллюстрирована расчетом ряда примеров квазивероятностных распределений [4], где продемонстрирована хорошая чувствительность данного типа распределений к квантовым особенностям поляризационных состояний света и, в частности, к интерференции амплитуд вероятности суперпозиционных состояний [6].

Наконец, проектируя соотношение (16) на операторный базис (18), получим (с помощью формализма [25] и теории обобщенных функций) важнейшее с практической точки зрения соотношение между набором экспериментально измеряемых распределений (поляризационных томограмм) $p(S; \theta, \phi)$ и функцией квазивероятности $W(\mathbf{p})$:

$$W(\mathbf{p}) = \int_{S_+^2} d\mathbf{n} \sum_{S=-\infty}^{\infty} p(S; \theta, \phi) K(S; \mathbf{n}; \mathbf{p}), \quad (28)$$

$$K(S; \mathbf{n}; \mathbf{p}) = \text{Tr} \left[\hat{K}(S; \mathbf{n}) \hat{W}(\mathbf{p}) \right] = -\frac{2}{\pi^2} \delta^{(2)}(S - 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}).$$

Это соотношение вместе с формулами (16) и (17) полностью решает задачу идеальной (при 100%-ой квантовой эффективности фотодетекторов) ПТИ для произвольного числа пространственно-временных мод [15]. Формула (28) восстановления функции квазивероятности по данным экспериментальных измерений является третьим основным результатом данной работы. На практике,

однако, как и в полевой томографии [14], эта идеальная схема должна корректироваться введением в базисные соотношения (16), (28) «сглаживающих» факторов, отвечающих учету неединичной квантовой эффективности фотодетекторов.

Отметим теперь некоторые особенности представленного метода ПТИ. Во-первых, сингулярность числового томографического ядра $K(S; \mathbf{n}; \mathbf{p})$ в (28) обусловлена сингулярным характером квазиклассических базисных операторов (18) (в силу свойств периодичности $\hat{U}(\omega, \mathbf{n})$), а не операторного томографического ядра $\hat{K}(S; \mathbf{n})$ из (17), которое здесь вполне регулярно в отличие от случая гомодинной полевой томографии [11, 14]. Поэтому можно использовать модификации данной выше схемы ПТИ на основе применения более «гладких» поляризационных функций квазивероятности, например, получаемых редукцией многомодовых полевых функций Вигнера [15]. Во-вторых, поскольку операторы \hat{P}_i подчиняются алгебре $su(2)$, базисные соотношения (16), (28) метода ПТИ могут быть использованы и в спиновой томографии [26, 29, 30]. Однако переменный характер P -квазиспина световых полей (с суммированием по бесконечному спектру $0 \leq P \leq \infty$ в (8)) влечет содержательные различия обоих методов (в любых версиях) [15]. В частности, в силу конечномерности спиновой матрицы плотности для осуществления томографии спиновых систем достаточно конечного (!) числа спиновых томограмм [26], заданных на двумерной (в силу фиксированности полного спина) сферической решетке в «фазовом пространстве» спиновых систем. В то же время из-за наличия бесконечных сумм по S в (28) и суммирования по значениям P в определении $p(S; \theta, \phi)$ в (12) двумерные спиновые томограммы [29, 30] пригодны лишь для реконструкции поляризационных состояний частного вида с фиксированным значением P -квазиспина, для которых соответствующие поляризационные функции квазивероятности эффективно определены на двумерной сфере [4]. Пример таких состояний поставляют N -фотонные состояния типа (6а). Таким образом, можно сказать, что в формальном плане метод ПТИ включает спиновую томографию, но не наоборот. В содержательном плане эти различия обусловлены тем, что в спиновой томографии спиновые волновые функции априори отделены от координатных, тогда как поляризационные переменные вычлняются как коллективные переменные из полного полевого описания.

3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

Экспериментальная реализация поляризационной томографии излучения была представлена впервые в работе [16]. Источником излучения служил параметрический генератор света, представляющий собой кристалл КТР (калий–титанил–фосфат) в резонаторе с накачкой излучением непрерывного аргонового лазера. В идеале излучение данного параметрического генератора должно состоять из потока пар фотонов, где один фотон из всякой пары принадлежит поляризационной моде x , а другой — моде y . В теории такое излучение называется ХУ-бифотонным светом [4], оно является одним из ярких примеров неклассических сортов неполяризованного света (для которого $\langle \hat{S}_{i=1,2,3} \rangle = 0$) и обладает при этом скрытой поляризацией излучения. ХУ-бифотонный свет после открытия [31] интенсивно исследуется в последнее время как теоретически, так и экспериментально [4, 32, 33]. Квантовое состояние идеального бифотонного света описывается выражением

$$|XY\rangle = \exp(z\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger - z^*\hat{a}_x\hat{a}_y)|0,0\rangle = \frac{1}{\text{ch } r} \exp(e^{i\theta}\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger \text{th } r) |0,0\rangle, \quad z = re^{i\theta}, \quad (29)$$

и является собственным для оператора \hat{S}_1 с нулевым собственным значением. Его поляризационная функция квазивероятности $W(\mathbf{p})$ вычисляется с помощью фурье-преобразования (27) поляризационной характеристической функции (14). В приближении, где подавлены значения характеристической функции вне пределов основного периода (приближение большого числа фотонов $\langle n \rangle \gg 1$), функция $W(\mathbf{p})$ задается следующим выражением [4]:

$$W(s_1, s_2, s_3) \equiv W(\mathbf{p} = (s_1/2, s_2/2, s_3/2)) \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(s_1)}{\sqrt{\langle n \rangle (\langle n \rangle + 2)}} \frac{1}{\sqrt{s_2^2 + s_3^2}} \times \exp\left(-\frac{\sqrt{s_2^2 + s_3^2}}{\sqrt{\langle n \rangle (\langle n \rangle + 2)}}\right), \quad (30)$$

где $\langle n \rangle \equiv \langle XY | \hat{N} | XY \rangle = 2 \text{sh}^2 r$ — полное число фотонов. Плотность квазивероятности сосредоточена в плоскости (s_2, s_3) , что, очевидно, соответствует отсутствию шумов при наблюдении параметра Стокса s_1 . Приближенное выражение (30) в отличие от точного обладает аналитической простотой, которая значительно упрощает сопоставление с экспериментом.

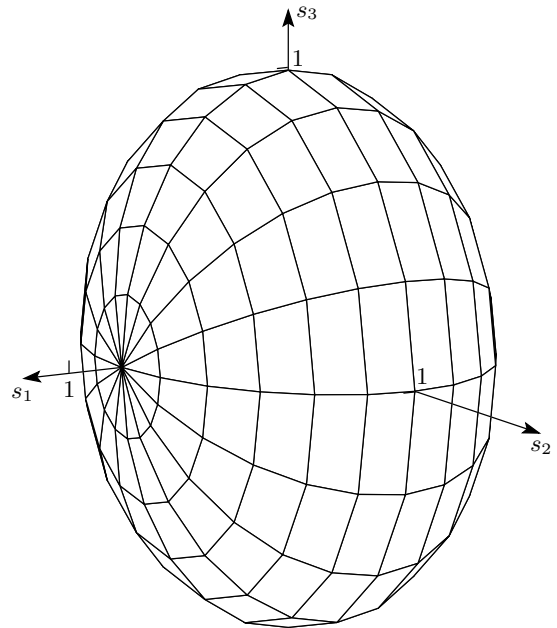


Рис. 2. Поверхность уровня $1/\sqrt{e}$ (от максимума) функции квазивероятности $W(\mathbf{s})$, восстановленной по экспериментальным данным [17]

Собственно измерения поляризационного состояния излучения, описанные в работе [16], проводились по схеме, представленной на рис. 1. Здесь семейство поляризационных наблюдаемых $\hat{S}(\theta, \phi)$ задается поворотом фазовых $\lambda/2$ - и $\lambda/4$ -пластин. При неизменной установке поляризационных элементов значения поляризационной наблюдаемой пропорциональны разности фототоков J_1 и J_2 , поступающих от фотодиодов PD₁ и PD₂. Множество значений разностного тока преобразуется в распределение вероятности $p(J_1 - J_2; \theta, \phi)$. Благодаря применению фотодиодов с высокой квантовой эффективностью (и проведению процедуры калибровки) распределения $p(J_1 - J_2; \theta, \phi)$ соответствуют распределениям $p(S; \theta, \phi)$. Регистрация распределений поляризационных наблюдаемых осуществлялась для набора θ и ϕ на сетке с шагом $\pi/10$. Зарегистрированные распределения оказались близкими к гауссовым с нулевым средним и с дисперсией, зависящей от углов θ и ϕ : для поляризационных наблюдаемых s_2 и s_3 дисперсии совпадают в пределах ошибок измерений с пуассоновским уровнем, т. е. со стандартным квантовым уровнем. Однако по мере приближения поляризационной наблюдаемой к s_1 шумы становились ниже пуассоновского уровня на 24%. Полученный массив данных на решетке $p(S; \theta_i, \phi_j)$ экстраполировался до континуального набора $p(S; \theta, \phi)$. Подстав-

ляя последний в (28), получаем квазивероятностное распределение в виде трехмерной гауссовой функции (рис. 2):

$$W(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{\sqrt{0.76(2\pi\langle n \rangle)^3}} \times \exp\left(-\frac{s_1^2}{0.76 \cdot 2\langle n \rangle} - \frac{s_2^2 + s_3^2}{2\langle n \rangle}\right). \quad (31)$$

Для оценки качества реконструкции состояния методом ПТИ распределение (31) целесообразно сравнить с таковым для поляризационного состояния ХУ-бифотонного излучения, порождаемого в процессе спонтанного параметрического рассеяния света. Качественно распределение (31) имеет сходство с (30): они оба сжаты в направлении s_1 . Однако (31) отличается от (30) как конечной шириной в направлении s_1 , так и характером уменьшения плотности в плоскости (s_2, s_3) . Это отличие обусловлено, в первую очередь, тем, что исследованное методом ПТИ излучение порождается в режиме генерации (на выходе из резонатора), а не спонтанного рассеяния. Поэтому его состояние имеет более сложную структуру по сравнению с состоянием (29) и требует для своего адекватного описания более точной модели.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, разработанный и апробированный нами метод ПТИ представляет собой достаточно простой и весьма эффективный инструмент исследования поляризационных свойств света, который дает информацию о квантовом состоянии поляризации излучения, достаточную для предсказания результатов всевозможных поляризационных измерений. Базовым соотношением метода является формула (28) восстановления функции квазивероятности по данным экспериментальных измерений, которая, в свою очередь, опирается на общее томографическое представление (16) поляризационного оператора плотности и адекватный выбор (27) типа квазивероятностного распределения (23). Наиболее важной областью применения метода ПТИ, по-видимому, является анализ сложных многофотонных состояний света, где отсутствует априорная информация о квантовой структуре поляризационных мод.

В заключение коснемся практических аспектов применения метода ПТИ. Как видно из соотношений (16), (28), для точной реконструкции квантового поляризационного состояния необходимо иметь решетчато-континуальный массив

$\{p(S; \theta, \phi)\}$ экспериментальных данных (поляризационных томограмм), что практически невозможно. Поэтому возникает задача «адекватной дискретизации» этих соотношений, резко уменьшающей объем измерений и заменяющей интегрирование по классическим параметрам θ, ϕ конечным суммированием по ним при сохранении основных характеристик функций квазивероятностей $W(\mathbf{p})$ [34]. Для ее решения можно использовать редукцию «переполненности» томографических ядер $\hat{K}(S; \mathbf{n})$ и $K(S, \mathbf{n}; \mathbf{p})$ (по аналогии со случаем томографии спиновых систем [26]) и ограничение «разрешающей способности» восстановления квазивероятности. Однако в целом вопросы оптимизации практических процедур ПТИ требуют дальнейшего исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы ИНТАС (грант № 01-2122) и РФФИ (грант № 02-02-17498).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, УФН **139**, 587 (1983).
2. M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, and E. P. Wigner, Phys. Rep. **106**, 121 (1984).
3. H.-W. Lee, Phys. Rep. **259**, 147 (1995).
4. V. P. Karassiov and A. V. Masalov, Las. Phys. **12**, 948 (2002).
5. V. Buzek and P. L. Knight, in *Progress in Optics*, ed. by E. Wolf, North-Holland, Amsterdam (1995), Vol. 34, p. 1.
6. V. P. Karassiov and A. V. Masalov, J. Opt. B **4**, S366 (2002).
7. Б. Б. Кадомцев, УФН **164**, 449 (1994).
8. A. Steane, Rep. Progr. Phys. **61**, 117 (1998).
9. *Физика квантовой информации*, под ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цайлингера, Постмаркет, Москва (2002).
10. Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, Радиотехн. и электрон. **47**, 1029 (2002).
11. K. Vogel and H. Risken, Phys. Rev. A **40**, 2847 (1987).
12. D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, and A. Faridani, Phys. Rev. Lett. **70**, 1244 (1993).
13. H. Kühn, D.-G. Welsh, and W. Vogel, Phys. Rev. A **51**, 4240 (1995).

14. U. Leonhardt, H. Paul, and G. M. D'Ariano, *Phys. Rev. A* **52**, 4899 (1995).
15. В. П. Карасев, Кратк. сообщ. по физике ФИАН № 9, 34 (1999).
16. П. А. Бушев, В. П. Карасев, А. В. Масалов, А. А. Путилин, *Опт. и спектр.* **91**, 558 (2001).
17. M. G. Raymer, A. C. Funk, and D. F. McAlister, in *Quantum Communications, Computing and Measurement 2*, ed. by P. Kumar et al., Kluwer Academic/Plenum, New York (2000) p. 147.
18. G. S. Agarwal, J. Lehner, and H. Paul, *Opt. Comm.* **129**, 369 (1996).
19. N. Korolkova, G. Leuchs, R. Loudon, T. C. Ralph, and Ch. Silberhorn, *Phys. Rev. A* **65**, 052306 (2002).
20. R. Schnabel, W. P. Bowen, N. Treps, T. C. Ralph, H-A. Bahor, and P. K. Lam, *Phys. Rev. A* **67**, 012316 (2003).
21. J. Heersink, T. Gaber, S. Lorenz, O. Glockl, N. Korolkova, and G. Leuchs, *Phys. Rev. A* **68**, 013815 (2003).
22. V. P. Karassiov, *J. Phys. A* **26**, 4345 (1993).
23. V. P. Karassiov, *J. Rus. Laser Res.* **15**, 391 (1994); **21**, 370 (2000).
24. Р. Л. Стратонович, *ЖЭТФ* **31**, 1012 (1956).
25. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
26. S. Weigert, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 802 (2000).
27. Д. Худсон, *Статистика для физиков*, Мир, Москва (1970).
28. S. M. Chumakov, A. B. Klimov, and K. V. Wolf, *Phys. Rev. A* **61**, 034101 (2000).
29. В. А. Андреев, В. И. Манько, *ЖЭТФ* **114**, 437 (1998).
30. А. В. Klimov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, Yu. F. Smirnov, and V. N. Tolstoy, *J. Phys. A* **35**, 6101 (2002).
31. V. P. Karassiov and V. I. Puzyrevskii, *J. Sov. Laser Res.* **10**, 229 (1989).
32. Д. Н. Клышко, *ЖЭТФ* **111**, 1955 (1997).
33. А. В. Бурлаков, С.П. Кулик, Г. О. Рытиков, М. В. Чехова, *ЖЭТФ* **122**, 738 (2002).
34. Ф. Наттерер, *Математические аспекты компьютерной томографии*, Мир, Москва (1990).