

# ПРОВОДИМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ РОМБИЧЕСКОГО ТИПА

Ю. Н. Овчинников\*

Max-Planck-Institute für Physik komplexer Systeme  
01187, Dresden, Germany

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 10 июля 2003 г.

Исследована проблема проводимости, распределения электрического поля, токов и плотности зарядов в периодической двухкомпонентной системе, составленной из ромбов с произвольным углом  $2\alpha$  при вершине. Эффективная проводимость такой среды является тензором со значениями  $\sigma_{eff}^{11}(\alpha)$  и  $\sigma_{eff}^{22}(\alpha)$  в главных осях, удовлетворяющими соотношению Дыхне  $\sigma_{eff}^{11}(\alpha)\sigma_{eff}^{22}(\alpha) = \sigma_1\sigma_2$ , где  $\sigma_{1,2}$  — изотропные проводимости сред 1, 2. Выполняется также соотношение  $\sigma_{eff}^{22}(\alpha) = \sigma_{eff}^{11}(\pi/2 - \alpha)$ . Главные оси направлены вдоль диагоналей ромба. Показано, что на прямоугольнике  $0 < \alpha \leq \pi/2$ ,  $-1 < Z < 1$  ( $Z = (\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2)$ ) существуют три линии, на которых плотность зарядов выражается через эллиптические функции. Получено явное выражение для всех физических величин на этих линиях.

PACS: 84.32.Ff

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Периодическая двухкомпонентная система, составленная из ромбов с углом  $2\alpha$  при вершине, является, по-видимому, простейшей системой, в которой эффективная проводимость не изотропна, и поэтому соотношения Дыхне для компонент тензора проводимости в главных осях  $\sigma_{eff}^{11}(\alpha)$ ,  $\sigma_{eff}^{22}(\alpha)$  [1–4],

$$\sigma_{eff}^{11}(\alpha)\sigma_{eff}^{22}(\alpha) = \sigma_1 \cdot \sigma_2, \quad (1)$$

недостаточно для полного восстановления тензора эффективной проводимости. В формуле (1) величины  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  — изотропные проводимости сред. Элементы  $\sigma_{eff}^{11}(\alpha)$ ,  $\sigma_{eff}^{22}(\alpha)$  удовлетворяют очевидному соотношению

$$\sigma_{eff}^{22}(\alpha) = \sigma_{eff}^{11}(\pi/2 - \alpha). \quad (2)$$

Мы покажем ниже, что даже первые члены теории возмущений по параметру

$$Z = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad (3)$$

для компонент тензора эффективной проводимости нетривиально зависят от угла  $\alpha$ . Тем самым, веро-

ятность получения точных формул алгебраического вида для компонент тензора  $\sigma_{eff}^{11}(\alpha)$ ,  $\sigma_{eff}^{22}(\alpha)$  достаточно мала. Тем не менее в области параметров  $\{0 < \alpha < \pi/2, -1 < Z < 1\}$  существуют три линии, на которых удается найти замкнутое выражение для плотности зарядов, сосредоточенных на границах областей (1), (2), через эллиптические функции. В области  $Z \rightarrow 1$ ;  $\alpha \rightarrow 0$  возникает существенная зависимость плотности зарядов и других физических величин от отношения малых параметров  $(1 - Z)/\alpha$ .

## 2. ПЛОТНОСТЬ ЗАРЯДОВ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ РОМБОВ С УГЛОМ ПРИ ВЕРШИНЕ $2\alpha$

Выберем систему координат  $(x, y)$  с началом, совмещенным с вершиной одного из ромбов, и осями  $(x, y)$ , направленными вдоль осей ромба (см. рис. 1). Векторы элементарной ячейки в этом случае можно выбрать в виде

$$2a \sin \alpha(1, 0); \quad 2a \cos \alpha(0, 1), \quad (4)$$

где  $a$  — длина ребра ромба. Условие непрерывности тока на границах ромбов определяет величину скачка электрического поля  $E$

\*E-mail: ovc@itp.ac.ru

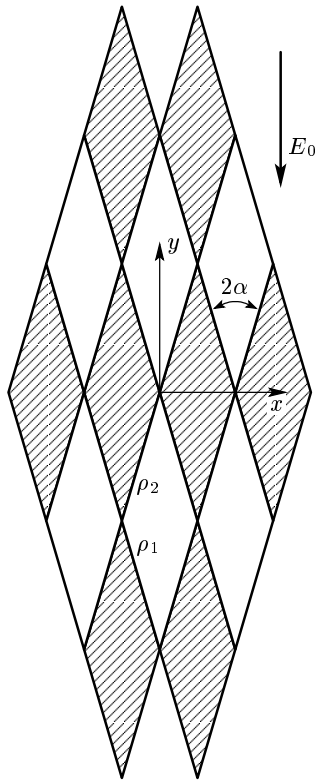


Рис. 1. Периодическая двухкомпонентная система ромбического типа

$$\sigma_1 \mathbf{E}_n^{(1)} = \sigma_2 \mathbf{E}_n^{(2)} \quad (5)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к ребру ромба,  $E_n^{(1)}, E_n^{(2)}$  — проекции электрического поля на векторы нормали. Уравнение Максвелла  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$ , где  $\rho$  — плотность зарядов, дает второе уравнение для величины скачка электрического поля:

$$E_n^{(1)} - E_n^{(2)} = 4\pi\rho. \quad (6)$$

Скалярный потенциал  $\varphi$  связан с плотностью зарядов соотношением

$$\varphi = E_0 y - 4\pi \int d^2 r_1 G(r - r_1) \rho(r_1), \quad (7)$$

где  $G$  — функция Грина оператора Лапласа на плоскости:

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln |r - r_1|. \quad (8)$$

Мы выбрали направление электрического поля  $\mathbf{E}_0$  вдоль оси  $y$ , что позволит найти компоненту (22) тензора проводимости в главных осях. Между компонентами проводимости (11) и (22) в главных осях существуют очевидные соотношения

$$\sigma_{eff}^{11}(\alpha) = \sigma_{eff}^{22} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right), \quad \sigma_{eff}^{12}(\alpha) = \sigma_{eff}^{21}(\alpha) = 0. \quad (9)$$

Заряды сосредоточены только вдоль ребер ромбов. С учетом трансляционной симметрии и двух плоскостей симметрии существуют лишь две независимые функции  $\rho_1, \rho_2$ , определяющие плотность зарядов на всех ребрах ромбов. В результате для скалярного потенциала  $\varphi$  находим с учетом формул (4) выражение

$$\begin{aligned} \varphi = E_0 y - 2a \times \\ \times \int_0^1 dt \sum_{K,L} \left\{ \left[ \ln \left( (x - at \sin \alpha - 2aK \sin \alpha)^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (y - at \cos \alpha - 2aL \cos \alpha)^2 \right)^{1/2} + \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \ln \left( (x + at \sin \alpha - 2aK \sin \alpha)^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (y - at \cos \alpha - 2aL \cos \alpha)^2 \right)^{1/2} \right] \rho_1(t) + \right. \\ \left. \left[ \ln \left( (x - at \sin \alpha - 2aK \sin \alpha)^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (y + at \cos \alpha - 2aL \cos \alpha)^2 \right)^{1/2} + \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \ln \left( (x + at \sin \alpha - 2aK \sin \alpha)^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (y + at \cos \alpha - 2aL \cos \alpha)^2 \right)^{1/2} \right] \rho_2(t) \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Граничные условия (5), (6) и выражение (10) для скалярного потенциала  $\varphi$  позволяют получить два уравнения для величин  $\rho_1, \rho_2$ . Простая проверка показывает, что величины  $\rho_1, \rho_2$  удовлетворяют простому соотношению

$$\rho_2(t) = -\rho_1(t). \quad (11)$$

В результате остается одно уравнение для величины  $\rho_1(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{Z}{2\pi} \left\{ E_0 \sin \alpha + 2 \sin(2\alpha) \int_0^1 dt \rho_1(t) \times \right. \\ \times \sum_{K,L} \left[ \frac{t + K + L}{(t + t' + 2K)^2 \sin^2 \alpha + (t - t' + 2L)^2 \cos^2 \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{K + L}{(t - t' - 2K)^2 \sin^2 \alpha + (t - t' + 2L)^2 \cos^2 \alpha} - \right. \\ \left. - \frac{K + L}{(t + t' + 2K)^2 \sin^2 \alpha + (t + t' - 2L)^2 \cos^2 \alpha} + \right. \\ \left. \left. + \frac{t - K - L}{(t - t' - 2K)^2 \sin^2 \alpha + (t + t' - 2L)^2 \cos^2 \alpha} \right] \right\} = \\ = \rho_1(t'). \quad (12) \end{aligned}$$

При значении угла  $\alpha = \pi/4$  формула (12) переходит в выражение, полученное в работе [3].

В уравнении (12) можно выполнить одно суммирование. В результате уравнение (12) приводится к виду

$$\begin{aligned} & \frac{Z}{2\pi} \left\{ E_0 \sin \alpha + \pi \int_0^1 dt \rho_1(t) \times \right. \\ & \times \sum_K \left[ \frac{\operatorname{sh}(\pi \operatorname{tg} \alpha(t+t'+2K))}{\operatorname{ch}(\pi \operatorname{tg} \alpha(t+t'+2K)) - \cos(\pi(t-t'))} + \right. \\ & + \frac{\operatorname{sh}(\pi \operatorname{ctg} \alpha(t-t'+2K))}{\operatorname{ch}(\pi \operatorname{ctg} \alpha(t-t'+2K)) - \cos(\pi(t+t'))} + \\ & + \frac{\operatorname{sh}(\pi \operatorname{ctg} \alpha(t+t'+2K))}{\operatorname{ch}(\pi \operatorname{ctg} \alpha(t+t'+2K)) - \cos(\pi(t-t'))} + \\ & + \frac{\operatorname{sh}(\pi \operatorname{tg} \alpha(t-t'+2K))}{\operatorname{ch}(\pi \operatorname{tg} \alpha(t-t'+2K)) - \cos(\pi(t+t'))} + \\ & + \frac{\operatorname{sh}(\pi \operatorname{ctg} \alpha(t-t'-2K))}{\operatorname{ch}(\pi \operatorname{ctg} \alpha(t-t'-2K)) - \cos(\pi(t-t'))} - \\ & - \frac{\operatorname{sh}(\pi \operatorname{tg} \alpha(t-t'+2K))}{\operatorname{ch}(\pi \operatorname{tg} \alpha(t-t'+2K)) - \cos(\pi(t-t'))} + \\ & + \frac{\operatorname{sh}(\pi \operatorname{ctg} \alpha(t+t'-2K))}{\operatorname{ch}(\pi \operatorname{ctg} \alpha(t+t'-2K)) - \cos(\pi(t+t'))} - \\ & \left. - \frac{\operatorname{sh}(\pi \operatorname{tg} \alpha(t+t'+2K))}{\operatorname{ch}(\pi \operatorname{tg} \alpha(t+t'+2K)) - \cos(\pi(t+t'))} \right] \Big\} = \\ & = \rho_1(t'), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$Z = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}. \quad (14)$$

Функция  $\rho_1(t)$  является аналитической дwoякопериодической функцией комплексной переменной  $t$ , имеющей по две точки ветвления в каждом параллелограмме периодов. Найдем поведение функции  $\rho_1(t)$  в окрестности точек ветвления  $t = \{0, 1\}$ . При  $t \rightarrow 0$  функция  $\rho_1(t)$  пропорциональна степени  $t$ :

$$\rho_1(t) \propto A/t^{2\nu}. \quad (15)$$

Из уравнения (13) находим уравнение для коэффициента  $\nu$ :

$$Z \sin(2\alpha) \int_0^\infty dt t^{1-2\nu} \left[ \frac{1}{t^2 + 1 - 2t \cos(2\alpha)} + \frac{1}{t^2 + 1 - 2t \cos(2\alpha)} \right] = \pi. \quad (16)$$

Вычисляя интегралы в формуле (16), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{dt t^{1-2\nu}}{t^2 + 1 + 2t \cos(2\alpha)} = \\ & = \frac{\pi}{\sin(2\alpha)} \frac{\sin(2\alpha(1-2\nu))}{\sin(2\pi\nu)}, \\ & \int_0^\infty \frac{dt t^{1-2\nu}}{t^2 + 1 - 2t \cos(2\alpha)} = \\ & = \frac{\pi}{\sin(2\alpha)} \frac{\sin(2\pi\nu + 2\alpha(1-2\nu))}{\sin(2\pi\nu)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из формул (16), (17) получаем уравнение для параметра  $\nu$ :

$$Z \frac{\sin(\pi\nu + 2\alpha(1-2\nu))}{\sin(\pi\nu)} = 1. \quad (18)$$

При  $\alpha = \pi/4$  уравнение (18) совпадает с результатом работы [3]. В окрестности точки  $t = 1$  функция  $\rho_1(t)$  представима в виде

$$\rho_1(t) \approx \frac{B}{(1-t)^{2\mu}}. \quad (19)$$

Параметр  $\mu$  удовлетворяет уравнению

$$Z \frac{\sin(\pi\mu + 2\alpha(1-2\mu))}{\sin(\pi\mu)} = -1. \quad (20)$$

Уравнения (18), (20) получены в работе [5].

Два периода  $(\tau, \tau')$  могут быть найдены с помощью уравнения (13) и равны

$$\tau = \frac{2}{1 + i \operatorname{tg} \alpha}, \quad \tau' = \frac{2i \operatorname{tg} \alpha}{1 + i \operatorname{tg} \alpha}. \quad (21)$$

Плотность заряда  $\rho_1(t)$  представима в виде

$$\rho_1(t) = A(\phi(t))^\nu + A^*((\phi(t^*))^*)^\nu, \quad (22)$$

где  $\phi(t)$  — дwoякопериодическая функция.

Отметим одно важное свойство ядра в уравнении (13): интеграл по внешней переменной  $t'$  не зависит от угла  $\alpha$  и, следовательно, совпадает с выражением, полученным в работе [3]. Интегрируя уравнение (13) по внешней переменной  $t'$ , получим

$$\frac{Z}{2\pi} \left\{ E_0 \sin \alpha + 2\pi \int_0^1 dt (1-2t) \rho_1(t) \right\} = \int_0^1 dt \rho_1(t). \quad (23)$$

Компонента  $\sigma_{eff}^{22}(t)$  тензора проводимости выражается через плотность заряда  $\rho_1(t)$  по формуле

$$\sigma_{eff}^{22}(\alpha) = \frac{4\pi}{E_0 \sin \alpha} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \int_0^1 dt \rho_1(t). \quad (24)$$

### 3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ПО ПАРАМЕТРУ Z

Теория возмущений в уравнениях (12), (13) тривиальна. Полагая

$$\rho_1(t) = E_0 \tilde{\rho}(t) \sin \alpha, \quad (25)$$

получим с точностью до членов второго порядка по Z включительно

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t') = & \frac{Z}{2\pi} + \frac{Z^2}{2\pi^2} \sin(2\alpha) \times \\ & \times \int_0^1 dt \sum_{K,L} \left[ \frac{t+K+L}{(t+t'+2K)^2 \sin^2 \alpha + (t-t'+2L)^2 \cos^2 \alpha} + \right. \\ & + \frac{K+L}{(t-t'-2K)^2 \sin^2 \alpha + (t-t'+2L)^2 \cos^2 \alpha} - \\ & - \frac{K+L}{(t+t'+2K)^2 \sin^2 \alpha + (t+t'-2L)^2 \cos^2 \alpha} + \\ & \left. + \frac{t-K-L}{(t-t'-2K)^2 \sin^2 \alpha + (t+t'-2L)^2 \cos^2 \alpha} \right] + \dots \quad (26) \end{aligned}$$

Из формул (23), (24), (26) находим в третьем порядке теории возмущений значение проводимости  $\sigma_{eff}^{22}(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{eff}^{22}(\alpha) = & \frac{2\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left\{ 1 + \frac{Z^2}{2} \int_0^1 dt (1-2t') \int_0^1 dt \times \right. \\ & \times \sum_{K=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\text{sh}(\pi \text{tg} \alpha(t+t'+2K))}{\text{ch}(\pi \text{tg} \alpha(t+t'+2K)) - \cos(\pi(t-t'))} + \right. \\ & + \frac{\text{sh}(\pi \text{ctg} \alpha(t-t'+2K))}{\text{ch}(\pi \text{ctg} \alpha(t-t'+2K)) - \cos(\pi(t+t'))} + \\ & + \frac{\text{sh}(\pi \text{ctg} \alpha(t+t'-2K))}{\text{ch}(\pi \text{ctg} \alpha(t+t'-2K)) - \cos(\pi(t-t'))} + \\ & + \frac{\text{sh}(\pi \text{tg} \alpha(t-t'-2K))}{\text{ch}(\pi \text{tg} \alpha(t-t'-2K)) - \cos(\pi(t+t'))} - \\ & - \frac{\text{sh}(\pi \text{tg} \alpha(t-t'-2K))}{\text{ch}(\pi \text{tg} \alpha(t-t'-2K)) - \cos(\pi(t-t'))} + \\ & + \frac{\text{sh}(\pi \text{ctg} \alpha(t-t'+2K))}{\text{ch}(\pi \text{ctg} \alpha(t-t'+2K)) - \cos(\pi(t-t'))} + \\ & + \frac{\text{sh}(\pi \text{ctg} \alpha(t+t'-2K))}{\text{ch}(\pi \text{ctg} \alpha(t+t'-2K)) - \cos(\pi(t+t'))} - \\ & \left. - \frac{\text{sh}(\pi \text{tg} \alpha(t+t'+2K))}{\text{ch}(\pi \text{tg} \alpha(t+t'+2K)) - \cos(\pi(t+t'))} \right]. \quad (27) \end{aligned}$$

Из формулы (27) следует, что проводимость  $\sigma_{eff}^{22}(\alpha)$  представима в виде

$$\sigma_{eff}^{22}(\alpha) = \frac{2\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left\{ 1 + \frac{Z^2}{2} (F_1(\alpha) + F_2(\alpha)) \right\}, \quad (28)$$

где

$$F_1(\alpha) = F_1\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad F_2(\alpha) = -F_2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \quad (29)$$

Из теоремы Дыхне следует, что функция  $F_1(\alpha)$  не зависит от  $\alpha$  и равна единице:

$$F_1(\alpha) \equiv 1. \quad (30)$$

Из формул (27), (28) находим функцию

$$\begin{aligned} F_2(\alpha) = & \int_0^1 dt' (1-2t') \int_0^1 dt \times \\ & \times \sum_{K=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\text{sh}(\pi \text{ctg} \alpha(t-t'+2K))}{\text{ch}(\pi \text{ctg} \alpha(t-t'+2K)) - \cos(\pi(t-t'))} + \right. \\ & + \frac{\text{sh}(\pi \text{ctg} \alpha(t+t'-2K))}{\text{ch}(\pi \text{ctg} \alpha(t+t'-2K)) - \cos(\pi(t+t'))} - \\ & - \frac{\text{sh}(\pi \text{tg} \alpha(t-t'-2K))}{\text{ch}(\pi \text{tg} \alpha(t-t'-2K)) - \cos(\pi(t-t'))} - \\ & \left. - \frac{\text{sh}(\pi \text{tg} \alpha(t+t'+2K))}{\text{ch}(\pi \text{tg} \alpha(t+t'+2K)) - \cos(\pi(t+t'))} \right]. \quad (31) \end{aligned}$$

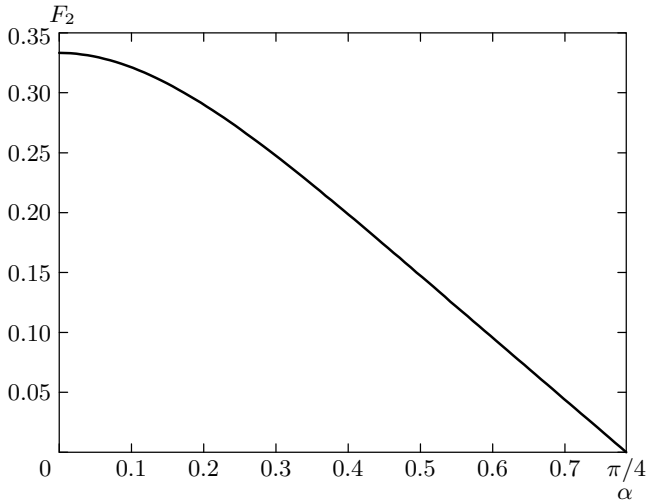


Рис. 2.

Интегрируя по частям правую часть уравнения (31), получаем

$$F_2(\alpha) = 4 \int_0^1 dt' (t' - (t')^2) \times \sum_{K=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\text{sh}(\pi \text{ctg} \alpha (t' + 2K))}{\text{ch}(\pi \text{ctg} \alpha (t' + 2K)) - \cos(\pi t')} - \frac{\text{sh}(\pi \text{tg} \alpha (t' + 2K))}{\text{ch}(\pi \text{tg} \alpha (t' + 2K)) - \cos(\pi t')} \right]. \quad (32)$$

В пределе  $\alpha \rightarrow 0$  находим

$$F_2(\alpha)_{\alpha \rightarrow 0} = 4 \int_0^1 dt (t - t^2)(1 - t) = \frac{1}{3}. \quad (33)$$

Функция  $F_2(\alpha)$  — нетривиальная функция переменной  $\alpha$ . Результаты численного нахождения функции  $F_2(\alpha)$  приведены на рис. 2.

#### 4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ $\rho_1$

В прямоугольнике  $\{0 < \alpha < \pi/2, 0 < \nu < 1/2\}$  существуют три линии, на которых функция  $\phi(t)$  — эллиптическая функция. Одна из них — прямая  $\alpha = \pi/4$ . В этом случае  $\tau = (\tau')^*$ ,  $\mu = -\nu$ ,  $\phi = B\wp^\nu$ , где  $\wp$  — эллиптическая функция Вейерштрасса [3],  $B$  — численный коэффициент. Существуют две линии, на которых

$$\mu = -1 - \nu \quad (34)$$

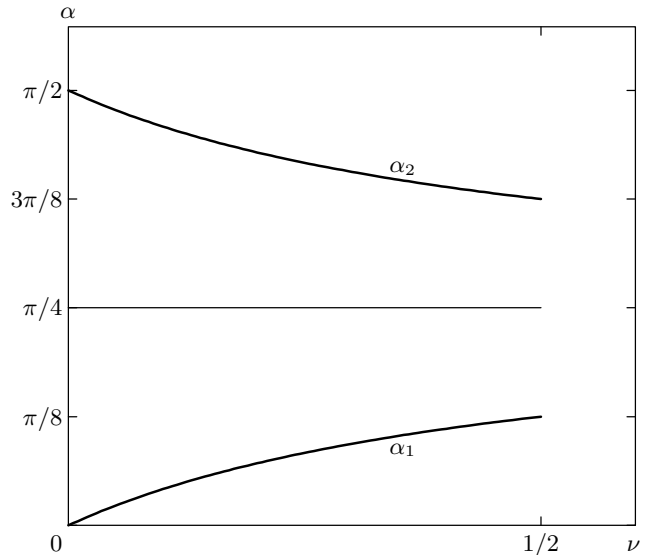


Рис. 3.

и, следовательно,  $\phi$  — эллиптическая функция. Зависимость  $\alpha_1(\nu)$ ,  $\alpha_2(\nu)$ , на этих линиях определяется формулами (18), (20), (34), приводящими к уравнению

$$\frac{\sin(\pi\nu + 2\alpha(1 - 2\nu))}{\sin(\pi\nu)} + \frac{\sin(\pi\mu + 2\alpha(1 - 2\mu))}{\sin(\pi\mu)} = 0. \quad (35)$$

Решения этого уравнения следующие:

$$\alpha_1(\nu) = \frac{\pi\nu}{2(1 + 2\nu)}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 = \frac{\pi(1 + \nu)}{2(1 + 2\nu)}. \quad (36)$$

Все эти три линии приведены на рис. 3. На линиях (36) эллиптическая функция  $\phi$  может быть выражена через  $\theta_1$ -функцию [6]:

$$\theta_1(z) = i \sum_{K=-\infty}^{\infty} (-1)^K \exp\left(-\pi \text{tg} \alpha \left(K - \frac{1}{2}\right)^2\right) \times \exp(i(2K - 1)\pi z). \quad (37)$$

Из формулы (37) следует, что

$$\theta_1\left(\frac{z + \tau}{\tau}\right) = e^{-i\pi} \theta_1\left(\frac{z}{\tau}\right), \quad (38)$$

$$\theta_1\left(\frac{z + \tau'}{\tau}\right) = -\exp\left(\pi \text{tg} \alpha - \frac{2i\pi z}{\tau}\right) \theta_1\left(\frac{z}{\tau}\right).$$

Формулы (38) позволяют записать эллиптическую функцию  $\phi$  с периодами  $\{\tau, \tau'\}$  в виде

$$\phi = \left( \frac{\theta_1 \left( \frac{1-z}{\tau} \right)}{e^{i\pi z/\tau} \theta_1 \left( \frac{z}{\tau} \right)} \right)^2. \quad (39)$$

Функция  $\phi(z)$  удовлетворяет соотношению

$$\phi(z)\phi(1-z) = e^{\pi \operatorname{tg} \alpha - i\pi}. \quad (40)$$

Приведем также полезные соотношения

$$e^{i\pi z/\tau} \theta_1 \left( \frac{z}{\tau} \right) = ie^{-\pi \operatorname{tg} \alpha/4} \times \sum_{K=-\infty}^{\infty} (-1)^K \exp \left[ -\pi \operatorname{tg} \alpha (K^2 - K(1-z)) + i\pi Kz \right], \quad (41)$$

$$\phi(1-z) = \left( \frac{2 \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^{K+1} \exp \left[ -\pi \operatorname{tg} \alpha \left( K - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \sin \left( \pi z \left( K - \frac{1}{2} \right) \frac{e^{i\alpha}}{\cos \alpha} \right)}{ie^{-(\pi/4) \operatorname{tg} \alpha} \left[ 1 + 2 \sum_{K=1}^{\infty} e^{-\pi \operatorname{tg} \alpha K^2} \operatorname{ch} \left( \pi Kz \frac{e^{-i(\pi/2-\alpha)}}{\cos \alpha} \right) \right]} \right)^2.$$

Функция  $\phi(z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\phi')^2 + C_1 \phi^3 + C_2 \phi^2 - C_1 e^{\pi \operatorname{tg} \alpha} \phi = 0, \quad (42)$$

где

$$C_1 = \left( \frac{4\pi B_0 e^{-i(\pi/2-\alpha)}}{B_1 \cos \alpha} e^{-(\pi/4) \operatorname{tg} \alpha} \right)^2, \quad (43)$$

$$C_2 = \frac{12\pi^2}{\cos^2 \alpha} e^{2i\alpha} \left( \frac{B_2}{3B_0} - \frac{2B_3}{B_1} \right),$$

$$B_0 = \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^{K+1} \left( K - \frac{1}{2} \right) \times \exp \left( -\pi \operatorname{tg} \alpha \left( K - \frac{1}{2} \right)^2 \right),$$

$$B_1 = 1 + 2 \sum_{K=1}^{\infty} e^{-\pi \operatorname{tg} \alpha K^2},$$

$$B_3 = \sum_{K=1}^{\infty} K^2 e^{-\pi \operatorname{tg} \alpha K^2},$$

$$B_2 = \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^{K+1} \left( K - \frac{1}{2} \right)^3 \times \exp \left( -\pi \operatorname{tg} \alpha \left( K - \frac{1}{2} \right)^2 \right).$$

Из формул (22), (34), (41) следует, что плотность заряда на вещественной оси в интервале (0,1) представима в виде

$$\rho_1(t) = \{A \phi(t)^\nu + A^* (\phi(t)^*)^\nu\} E_0 \sin \alpha, \quad (44)$$

где

$$A = |A| e^{i(\pi/2 + \nu(\pi - 2\alpha))}. \quad (45)$$

Величина  $|A|$  определяется уравнением (23):

$$\frac{Z}{2\pi} \left\{ 1 + 2\pi i |A| \int_0^1 dt (1-2t) \left[ \left( \phi(t) e^{i(\pi-2\alpha)} \right)^\nu - \left( \left( \phi(t) e^{i(\pi-2\alpha)} \right)^\nu \right)^* \right] \right\} = i |A| \int_0^1 dt \left[ \left( \phi(t) e^{i(\pi-2\alpha)} \right)^\nu - \left( \left( \phi(t) e^{i(\pi-2\alpha)} \right)^\nu \right)^* \right]. \quad (46)$$

Компонента  $\sigma_{eff}^{22}(\alpha)$  определяется формулой (24) и равна

$$\sigma_{eff}^{22}(\alpha) = 4\pi i |A| \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \int_0^1 dt \left[ \left( \phi(t) e^{i(\pi-2\alpha)} \right)^\nu - \left( \left( \phi(t) e^{i(\pi-2\alpha)} \right)^\nu \right)^* \right]. \quad (47)$$

Рассмотрим предельный случай  $\alpha \rightarrow \pi/2$ . Из формулы (41) находим

$$\begin{aligned} \phi(1-z) &= \exp[\pi z(\operatorname{tg} \alpha - i)], \\ \phi(z) &= \exp[\pi(1-z)(\operatorname{tg} \alpha - i)]. \end{aligned} \quad (48)$$

Параметры  $\nu$ ,  $A$ ,  $Z$  определяются формулами (18), (36), (45):

$$\begin{aligned} \nu &= 1 - \frac{2\alpha}{\pi}, \quad A = |A| \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\nu^2\right)\right), \\ Z &= \frac{1}{2}, \quad \nu \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\pi}. \end{aligned} \quad (49)$$

Используя формулы (48), (49), приведем выражение для плотности заряда к виду

$$\rho_1(t) = E_0 \sin \alpha \left\{ 2\pi\nu(1-t)e^{2(1-t)} \right\}, \quad (50)$$

$$i \left\{ \left( \phi(t)e^{i(\pi-2\alpha)} \right)^\nu - \left( \left( \phi(t)e^{i(\pi-2\alpha)} \right)^\nu \right)^* \right\} = 2\pi\nu(1-t)e^{2(1-t)}.$$

Коэффициент  $|A|$  определяется формулами (46), (50):

$$\begin{aligned} 2\pi\nu|A| &= \frac{Z}{2\pi} \left\{ \int_0^1 dt t \left( \frac{3}{2} - t \right) e^{2t} \right\}^{-1} = \\ &= \frac{4Z}{\pi(5+e^2)}. \end{aligned} \quad (51)$$

Используя формулы (47), (50), (51), получим значение компоненты  $\sigma_{eff}^{22}(\alpha)$  тензора проводимости при  $\alpha \rightarrow \pi/2$ :

$$\sigma_{eff}^{22}(\alpha) = \frac{4\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{e^2 + 1}{e^2 + 5} \approx 0.67713\sigma_1. \quad (52)$$

Компонента  $\sigma_{eff}^{11}(\alpha)$  восстанавливается с помощью соотношения Дыхне:

$$\sigma_{eff}^{11}(\alpha) = 0.49227\sigma_1, \quad \alpha \rightarrow \pi/2. \quad (53)$$

Отметим, что  $\alpha = 0$  является особой точкой. В частности, функция  $F_2(\alpha)$  (см. уравнение (31)) является периодической с периодом  $\pi$  нечетной функцией переменной  $\alpha$  и  $F_2(\alpha \rightarrow +0) = 1/3$ . И, следовательно, ее разложение в тригонометрические ряды содержит бесконечное число гармоник.

### 5. ПРОВОДИМОСТЬ В ОБЛАСТИ $Z \rightarrow 1$

Рассмотрим область значений параметра  $Z$  близких к единице:

$$1 - Z \ll 1. \quad (54)$$

Предположим также, что угол  $\alpha$  удовлетворяет условиям

$$\alpha \gg 1 - Z, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha \gg 1 - Z. \quad (55)$$

При выполнении условий (54), (55) параметр  $\nu$  близок к значению  $1/2$ :

$$\nu = \frac{1}{2} - \delta, \quad \delta \ll 1. \quad (56)$$

Из уравнения (18) находим величину

$$\delta = \left( \frac{2(1-Z)}{\pi^2[1-(1-4\alpha/\pi)^2]} \right)^{1/2}. \quad (57)$$

Плотность заряда  $\rho_1$  при выполнении условия (56) определяется в нулевом приближении формулой (15):

$$\rho_1 \approx E_0 \sin \alpha \frac{\tilde{C}(\alpha)}{t^{1-2\delta}}, \quad (58)$$

где  $\tilde{C}(\alpha)$  — величина порядка единицы, если выполнено условие

$$\delta \gg 1 - Z. \quad (59)$$

Компонента  $\sigma_{eff}^{22}(\alpha)$  определяется формулой (24) и при выполнении условий (56), (59) равна

$$\sigma_{eff}^{22}(\alpha) = 2\pi \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \frac{\tilde{C}(\alpha)}{\delta}. \quad (60)$$

При  $\alpha = \pi/4$  коэффициент  $\tilde{C}(\pi/4) = 1/\pi$ . Тем самым, при  $Z \rightarrow 1$  в широкой области углов  $\alpha$ , удовлетворяющих условию (55), компоненты тензора эффективной проводимости  $\sigma_{eff}^{22}(\alpha)$  и  $\sigma_{eff}^{11}(\alpha)$  различаются лишь численным множителем порядка единицы.

В области, когда  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $Z \rightarrow 1$ , из уравнений (18), (20) находим оба параметра  $\mu, \nu$ :

$$\mu = -\frac{\alpha}{\pi}, \quad 1 - 2\nu = \frac{1-Z}{2\alpha} \operatorname{tg}(\pi\nu). \quad (61)$$

Из уравнения (61) следует, что параметр  $\nu$  является функцией отношения малых параметров  $\{\alpha, 1-Z\}$  с областью изменения  $(0, 1/2)$ . В этой области происходит сильное изменение плотности зарядов и возникает существенное отношение компонент тензора  $\sigma_{eff}^{22}(\alpha)$  и  $\sigma_{eff}^{11}(\alpha)$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы проводимость, распределение зарядов и токов в периодической двухкомпонентной системе, составленной из ромбов с произвольным углом  $2\alpha$  при вершине. Исследование частных случаев показывает, что нет особых оснований надеяться на существование простых алгебраических выражений для компонент тензора эффективной проводимости [7]. Показано, что на плоскости параметров  $(\alpha, \nu)$  существуют три линии, на которых найдено явное выражение для плотности зарядов и тензора эффективной проводимости через эллиптические функции. В точке общего положения на плоскости  $\{\alpha, \nu\}$  плотность зарядов есть аналитическая дwoякопериодическая функция параметра  $t$  с двумя точками ветвления в параллелограмме периодов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Миннауки РФ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
2. В. Г. Марихин, Письма в ЖЭТФ **71**, 391 (2000).
3. Ю. Н. Овчинников, А. М. Дюгаев, ЖЭТФ **117**, 1013 (2000).
4. Ю. Н. Овчинников, И. А. Лукьянчук, ЖЭТФ **121**, 239 (2002).
5. L. G. Fel and I. V. Kaganov, J. Phys. A **36**, 5349 (2003).
6. Н. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Гостехиздат, Москва (1958).
7. И. М. Халатников, А. Ю. Каменщик, ЖЭТФ **118**, 1456 (2000).