

О ГЕНЕРАЦИИ КОГЕРЕНТНЫХ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СТРУКТУР В УРАВНЕНИИ KPZ И МНОГОМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ БЮРГЕРСА

С. Н. Гурбатов, А. Ю. Мошков*

*Нижегородский государственный университет
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 23 июня 2003 г.

Исследуется эволюция случайных многомасштабных возмущений в задаче о росте поверхности раздела двух сред. Эволюция поверхности описывается уравнением KPZ (Kardar, Paris, Zhang), а векторное поле градиента удовлетворяет многомерному уравнению Бюргерса. Показано, что при эволюции статистически неоднородных возмущений со сложной внутренней структурой нелинейные эффекты приводят к генерации когерентных крупномасштабных структур. В результате совместного действия нелинейности и диссипации локализованные возмущения с течением времени приобретают универсальную форму.

PACS: 47.27.Gs, 46.65.+g, 05.45.-a

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное уравнение диффузии,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (1)$$

было первоначально введено Бюргерсом как модель гидродинамической турбулентности [1, 2]. Действительно, оно имеет много общего с известным уравнением Навье–Стокса: тот же тип нелинейности, общие инварианты, одинаковая частотная зависимость для энергетических потерь и т. д. [3]. Различия между уравнением Бюргерса (1) и уравнением Навье–Стокса являются столь же интересными, как и их подобие [4]. Это тем более справедливо и для многомерного уравнения Бюргерса. Позже было показано, что уравнение (1) описывает целый ряд нелинейных волновых явлений, связанных с акустикой, физикой плазмы, динамикой фронтов пламени и т. д. [5–8]. В частности, при случайных начальных условиях уравнение (1) описывает эволюцию интенсивного акустического шума, и поэтому такие решения уравнения Бюргерса называют одномерной акустической турбулентностью.

Многомерное уравнение Бюргерса с внешними случайными силами широко используется

как модель гидродинамической турбулентности Навье–Стокса без давления [9–13]. Трехмерный вариант уравнения (1) совместно с уравнением для плотности используется для описания формирования крупномасштабных структур Вселенной на нелинейной стадии гравитационной неустойчивости, когда силами давления можно пренебречь. Данная модель известна в астрофизике как приближение «слипания» (adhesion model) [14–17] и описывает формирование сильно неоднородных структур в распределении вещества из случайного начального возмущения. Другие проблемы, приводящие к многомерному уравнению Бюргерса или его вариантам, — это рост границы раздела двух сред в результате случайного осаждения вещества на поверхности, движение фронта пламени [18]. В этих случаях потенциал ψ ($\mathbf{v} = -\nabla\psi$) соответствует профилю поверхности, а уравнение, описывающее его эволюцию, эквивалентно уравнению KPZ (Kardar, Paris, Zhang) [8, 18–20]. Среднеквадратичный градиент

$$E(t) = \langle (\nabla\psi(\mathbf{x}, t))^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2(\mathbf{x}, t) \rangle$$

характеризует при этом изрезанность поверхности и может как убывать, так и возрастать с течением времени.

Исследованию динамических и статистических

*E-mail: gurb@rf.unn.ru

характеристик одномерного уравнения Бюргерса, а в последнее время и многомерного, посвящено большое количество работ (см., например, библиографию в монографиях [7, 8]). Несмотря на то что уравнение Бюргерса имеет точное решение — решение Хопфа–Коула [21, 22], — исследование статистических свойств этого уравнения представляет весьма сложную математическую задачу. Так, первые серьезные результаты для броуновского начального потенциала были получены тридцать лет спустя [2] после появления самого уравнения [1], а точное статистическое описание этого специального случая было проведено совсем недавно [23]. Для такого сигнала спектральная плотность на нулевой пространственной частоте сохраняется, а энергия затухает пропорционально $t^{-2/3}$. Если в спектре начального возмущения крупномасштабные компоненты отсутствуют, то реализуется другой сценарий вырождения турбулентности. При гауссовой статистике начальных условий энергия затухает пропорционально t^{-1} с некой логарифмической коррекцией [24–27]. И в этом случае удается дать исчерпывающее статистическое описание вырождающейся турбулентности, в частности, показать, что асимптотически статистические характеристики (спектры, корреляционные функции, вероятностные распределения) становятся автомодельными [25, 27].

В данной работе исследуется эволюция модулированных волн и, в частности, локализованных возмущений со сложной внутренней структурой. Возмущения такого типа возникают, например, в задачах об эволюции фронта пламени [28], когда начальная область возмущений локализована в пространстве и имеет внутреннюю структуру с характерным масштабом, много меньшим области локализации. При этом эволюция фронта пламени сводится в определенных приближениях к двумерному уравнению Бюргерса. В настоящей работе показано, что при эволюции статистически неоднородных возмущений нелинейные эффекты приводят к генерации когерентных крупномасштабных структур. В результате совместного действия нелинейности и диссипации локализованные возмущения с течением времени приобретают универсальную форму.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 приведено решение многомерного уравнения Бюргерса и обсуждены его асимптотики в пределе исчезающе малой вязкости и на больших временах, когда нелинейные эффекты уже несут существенны. Показано, что в пределе исчезающе малой вязкости нелинейные эффекты приводят к возникновению локальной автомодельности полей скорости и потен-

циала. Здесь же обсуждается эволюция основных типов возмущений в одномерном уравнении Бюргерса. В разд. 3 исследуется эволюция локализованных возмущений со сложной внутренней структурой в многомерном уравнении Бюргерса в случае исчезающе малой вязкости, а в разд. 4 исследуется поведение локализованных возмущений на больших временах в среде с конечной вязкостью.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОДХОДЫ

2.1. Локальная автомодельность и временные асимптотики многомерного уравнения Бюргерса

Будем рассматривать векторное уравнение Бюргерса без внешних сил,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (2)$$

и искать потенциальные решения вида

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \psi(\mathbf{x}, t). \quad (3)$$

Потенциал скорости $\psi(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \nu \Delta \psi, \quad (4)$$

идентичному уравнению KPZ [8, 18, 19], обычно записываемому в переменных $h = \lambda^{-1} \psi$. Тогда параметр λ , имеющий размерность скорости, является локальной скоростью роста поверхности, а $h(\mathbf{x}, t)$ описывает отклонение поверхности от роста по нормали и имеет размерность длины. В задачах о росте поверхности раздела двух сред коэффициент ν имеет смысл коэффициента поверхностного натяжения и слагаемое в правой части описывает линейные эффекты сглаживания поверхности. Изрезанность поверхности измеряется ее среднеквадратичным градиентом:

$$E(t) = \langle (\nabla \psi(\mathbf{x}, t))^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2(\mathbf{x}, t) \rangle = \sum_i E_i(t), \quad (5)$$

$$E_i(t) = \left\langle \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = \langle v_i^2 \rangle. \quad (6)$$

Угловые скобки предполагают усреднение по ансамблю или интегрирование по пространственной координате (для локализованного возмущения). В одномерном случае $E(t)$ есть энергия турбулентности и в диссипативной среде всегда убывает с течением времени. При этом в среде с исчезающе малой

вязкостью ($\nu \rightarrow 0$) энергия $E(t)$ сохраняется до образования разрывов в профиле волны и убывает из-за диссипации на ударных фронтах бесконечно малой ширины.

До образования разрывов многомерное уравнение Бюргера в пределе исчезающе малой вязкости соответствует свободному движению частиц. В лагранжевом представлении скорость частиц $\mathbf{V}(t; \mathbf{y})$ является постоянной и зависит лишь от начальной (лагранжевой) координаты частицы \mathbf{y} . В одномерном случае до образования разрывов увеличение длины одного элементарного интервала в эйлеровом представлении, $\Delta x = \Delta y + t\Delta V$, компенсируется уменьшением длины другого соседнего интервала $\Delta x = \Delta y - t\Delta V$ и, следовательно, энергия волны сохраняется. После образования разрывов энергия начинает уменьшаться со временем. В многомерном случае изменение элементарного объема в эйлеровом представлении зависит от начальной кривизны возмущения поверхности и подобной компенсации растягивающихся и сжимающихся объемов не наблюдается. Следовательно, для $d > 1$ мера неровности поверхности $E(t)$ (5) может как возрастать, так и убывать со временем [29, 30], что является результатом отсутствия в данном случае какого-либо закона сохранения. Тем не менее мы будем называть $E(t)$ «энергией турбулентности», а $E_i(t)$ — энергией i -й компоненты скорости.

Используя замену Хопфа–Коула [21, 22],

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}, t) &= 2\nu \ln U(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= -2\nu \nabla \ln U(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\quad (7)$$

можно свести уравнение (4) к линейному уравнению диффузии

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \Delta U, \quad (8)$$

$$U(\mathbf{x}, 0) = U_0(\mathbf{x}) = \exp \frac{\psi_0(\mathbf{x})}{2\nu}. \quad (9)$$

Целью настоящей статьи является исследование эволюции регулярных и случайных сигналов при больших числах Рейнольдса, когда происходит эффективное нелинейное взаимодействие пространственных гармоник начального возмущения и затухание существенно лишь для больших значений волнового числа. Потери энергии в пространстве имеют место лишь в малых окрестностях разрывов. Таким образом, для не очень больших времен можно использовать решение уравнения (2) в пределе исчезающе малой вязкости. На более поздних стадиях эволюции, когда процессы нелинейного взаимодействия

становятся несущественными, развитие поля определяется лишь линейной диссипацией, и в этом случае мы имеем линеаризацию решения Хопфа–Коула.

В пределе бесконечно малой вязкости $\nu \rightarrow 0$ использование метода перевала в решении Хопфа–Коула приводит к так называемому «методу максимума» для потенциального поля скорости [7, 17, 21]:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \max_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (10)$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \psi_0(\mathbf{y}) - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{2t}, \quad (11)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{t} = \mathbf{v}_0(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)). \quad (12)$$

Здесь $\psi_0(\mathbf{y})$ — начальный потенциал: $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = -\nabla \psi_0(\mathbf{x})$. В выражении (12) функция $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ является лагранжевой координатой, в которой функция $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ при фиксированных эйлеровой координате \mathbf{x} и времени t достигает своего абсолютного максимума. Легко показать, что \mathbf{y} является начальной координатой частицы, достигающей точки \mathbf{x} в момент времени t [7].

На достаточно больших временах второе слагаемое в (11) является гораздо более плавной функцией, чем начальный потенциал $\psi_0(\mathbf{y})$. Следовательно, абсолютный максимум функции $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ совпадает с одним из максимальных значений $\psi_0(\mathbf{y})$. В окрестности локального максимума \mathbf{y}_k начальный потенциал можно представить в виде

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \psi_{0,k} \left[1 - \sum_i \frac{(x_i - y_{i,k})^2}{2L_i^2} \right]. \quad (13)$$

Здесь величины x_i задают базис разложения локальной квадратичной формы в точке \mathbf{y}_k по главным осям. Тогда из решений (11), (12) получаем

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_{0,k} \left[1 - \sum_i \frac{(x_i - y_{i,k})^2}{2L_i^2(1 + \psi_{0,k}t/L_i^2)} \right], \quad (14)$$

$$v_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\psi_{0,k}(x_i - y_{i,k})}{L_i^2(1 + \psi_{0,k}t/L_i^2)}. \quad (15)$$

Из выражения (15) легко видеть, что благодаря нелинейности с течением времени происходит локальная изотропизация поля скорости и установление локальной автомодельности в окрестности максимума $\psi_0(\mathbf{x})$. При этом поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ будет определяться частицами, стартующими из точек

$y_i(\mathbf{x}, t)$, лежащих в малой окрестности данного максимума,

$$y_i(\mathbf{x}, t) = \frac{x_i - y_{i,k}}{1 + \psi_{0,k}t/L_i^2}. \quad (16)$$

Таким образом, на больших временах лагранжева координата $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ становится разрывной функцией координаты \mathbf{x} , постоянной внутри области (ячейки), соответствующей одному максимуму, и имеющей «скачки» на его границах [7, 17]. Поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ имеет разрывы значений, а поле потенциала $\psi(\mathbf{x}, t)$ — разрывы производной на границах ячейки. Из (14), (15) легко видеть, что внутри ячеек поля потенциала и скорости обладают универсальной и самоподобной (автомодельной) структурой:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_0(\mathbf{y}_k) - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}_k)^2}{2t}, \quad (17)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}_k}{t}. \quad (18)$$

Продольная компонента вектора скорости $\mathbf{v}(x, t)$ состоит из последовательности пилообразных импульсов, как и в одномерном случае. Поперечная компонента вектора скорости постоянна внутри ячейки. Из формул (14), (15) видно, что такое универсальное поведение полей раньше начинает проявляться в направлениях пространства с большими начальными градиентами (меньшими L_i).

На более поздних этапах эволюция полей скорости и потенциала будет определяться свойствами локальных максимумов $\psi_0(\mathbf{y}_k)$. В случае периодических начальных возмущений возникает периодическая универсальная структура с сохраняющейся формой и амплитуда поля скорости убывает пропорционально t^{-1} . Для случайных начальных возмущений развитие структуры будет сопровождаться непрерывными изменениями формы поверхности, обусловленными поглощениями ячеек (разрывов в одномерном случае) друг другом. Следовательно, будет постоянно возрастать и общий характерный масштаб турбулентности Бюргерса, $L(t)$.

Теперь обсудим так называемый «поздний предел» решения уравнения Бюргерса, когда при фиксированном коэффициенте вязкости $\nu \neq 0$ время t стремится к бесконечности. Рассмотрим класс возмущений с ограниченным начальным потенциалом $\langle \psi_0(\mathbf{x})^2 \rangle < \infty$, полагая $\psi_0(\mathbf{x})$ локализованным возмущением или статистически однородным случайным полем. Для подобных сигналов в скалярном поле $U(\mathbf{x}, t)$ можно выделить постоянную компоненту \bar{U} :

$$U(\mathbf{x}, t) = \bar{U} + \tilde{U}(\mathbf{x}, t) = \bar{U}(1 + u(\mathbf{x}, t)), \quad (19)$$

и относительное возмущение $u(\mathbf{x}, t) = \tilde{U}(\mathbf{x}, t)/\bar{U}$ поля $U(\mathbf{x}, t)$. Здесь предполагается, что $\tilde{U}_0(\mathbf{x})$ и $u_0(\mathbf{x})$ — поля с нулевым средним значением. С течением времени диффузия приводит к сглаживанию неоднородностей поля $U(\mathbf{x}, t)$ в линейном уравнении диффузии (8), что приводит к уменьшению амплитуды возмущения поля $\tilde{U}(\mathbf{x}, t)$. На временах, когда $|\tilde{U}| \ll \bar{U}$ ($|u| \ll 1$), решение Хопфа–Коула (7) можно линеаризовать, и мы имеем

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -2\nu \nabla u(\mathbf{x}, t). \quad (20)$$

Так как $\tilde{U}(\mathbf{x}, t)$ и $u(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют линейному уравнению диффузии, то и $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ также описывается линейным уравнением. Это говорит о наступлении линейной стадии эволюции. Суммарные нелинейные эффекты присутствуют в этом решении лишь за счет нелинейной интегральной связи между начальным полем скорости $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ и полями $\tilde{U}(\mathbf{x}, 0)$, \bar{U} (см. (3), (9)) и характеризуются величиной начального числа Рейнольдса $Re_0 \sim |\Delta\psi_0|/\nu$. Здесь $\Delta\psi_0$ — характерная амплитуда ψ_0 .

Из формулы (20) легко получить известный результат для одномерного уравнения Бюргерса об асимптотическом поведении гармонического возмущения [5, 6]. При $Re_0 \gg 1$ гармоническая волна трансформируется в пилообразную, однако из-за диссипации волна на больших временах будет снова иметь гармоническую форму, а ее амплитуда не будет зависеть от начальной. При больших начальных числах Рейнольдса статистически однородное гауссово поле $v_0(x)$ также трансформируется в последовательность пилообразных импульсов и обладает на нелинейной стадии существенно не гауссовыми статистическими свойствами [7, 27]. Тем не менее на больших временах, когда справедлива линеаризация (20), случайные поля $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ со статистически однородным начальным потенциалом $\psi_0(\mathbf{x})$ слабо сходятся к однородному гауссову полю с нулевым средним [29]. Эта стадия известна как гауссов сценарий в турбулентности Бюргерса. Данный сценарий реализуется и для многомерного уравнения Бюргерса. В отсутствие дальних корреляций распределения начального потенциала поля скорости и потенциала имеют универсальную ковариантную функцию [7, 29] с амплитудой, нелинейно связанной с ее начальным значением и пропорциональной $\exp(Re_0^2)$. Когда начальный потенциал имеет дальние корреляции,

$$\langle \psi_0(\mathbf{x})\psi_0(0) \rangle = |\mathbf{x}|^{-\alpha} F(\mathbf{x}/x), \quad 0 < \alpha < 3,$$

на линейной стадии сохраняются как дальние корреляции, так и анизотропия поля $F(\mathbf{x}/x)$ [29].

2.2. Эволюция основных типов одномерных возмущений

Пусть начальный потенциал $\psi_0(\mathbf{x})$ представляет собой суперпозицию одномерных функций $\psi_{0,i}(x_i)$:

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \sum_i \psi_{0,i}(x_i), \quad v_{0,i}(\mathbf{x}) = v_{0,i}(x_i). \quad (21)$$

В этом случае непосредственно из формулы (2) следует, что взаимодействия между компонентами поля $v_{0,i}$ не происходит и эволюция в каждом направлении $v_{0,i}(\mathbf{x}, t) = v_{0,i}(x_i, t)$ определяется одномерным уравнением Бюргерса (1). Поэтому кратко рассмотрим эволюцию основных классов возмущения в одномерном уравнении Бюргерса [5–8].

Рассмотрим вначале эволюцию локализованного возмущения. Будем считать, что начальный потенциал

$$\psi_0(x) = m \left(1 - \frac{x^2}{2L_0^2} + \dots \right)$$

имеет единственный максимум $m = \psi_0(y_k)$, локализованный в области размером порядка L_* , ($L_0 \approx L_*$) около точки $x = y_k$, и выполняется условие $\psi_0(x) = 0$, если $|x - y_k| > L_*$. При $\nu \rightarrow 0$ данное возмущение на больших временах трансформируется в так называемую N -волну [5] с градиентом $\partial v / \partial x = 1/t$ и положением разрыва (ударного фронта) $|x_s - y_k| = (2mt)^{1/2}$. Благодаря увеличению характерного пространственного размера амплитуда такого сигнала убывает как

$$\frac{x_s(t)}{t} \sim m^{1/2} t^{-1/2}$$

и энергия уменьшается как

$$\frac{x_s^3}{t^2} \sim m^{3/2} t^{-1/2}.$$

Следовательно, асимптотическое поведение локализованного возмущения на нелинейной стадии определяется только значением максимума $m = \psi_0(y_k)$ начального потенциала и не зависит от пространственного распределения возмущения. Для больших, но конечных чисел Рейнольдса $\text{Re}_0 = m/2\nu \gg 1$ ударные фронты имеют конечную ширину и координата разрыва равна

$$x_s(t) = \left[2t \left(m - \nu \ln \frac{4\pi\nu t}{L_{eff}^2} \right) \right]^{1/2},$$

где $L_{eff}^2 \sim L_0^2 / \text{Re}_0$. Из выражения (20) легко получить, что на линейной стадии развития

($t \gg L_0^2 \exp(2 \text{Re}_0) / \text{Re}_0 \nu$) поле $v(x, t)$ имеет универсальную структуру:

$$v(x, t) = B \frac{x}{\sqrt{4\pi\nu t^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right), \quad (22)$$

где постоянная

$$B \approx L_0 \left(\frac{2\pi}{\text{Re}_0} \right)^{1/2} \exp(\text{Re}_0).$$

Для локализованных возмущений со случайной сложной внутренней структурой асимптотическая форма волны также универсальна [31]. При этом нелинейные эффекты приводят к генерации среднего поля (крупномасштабной структуры) из начального поля с нулевым средним.

Рассмотрим эволюцию гармонического возмущения $v_0(x) = k_0 \psi_0 \sin(k_0 x)$ с потенциалом $\psi_0(x) = \psi_0 \cos(k_0 x)$. Начальная энергия такого сигнала равна

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\psi_0^2 k_0^2}{2} = \frac{2\pi^2 \psi_0^2}{L_0^2}, \quad k_0 = \frac{2\pi}{L_0}.$$

При бесконечных числах Рейнольдса ($\nu \rightarrow 0$) к моменту времени $t \gg t_{nl}$ поле скорости трансформируется в периодическую пилообразную волну с градиентом $\partial v / \partial x = 1/t$. Здесь $t_{nl} = 1/k_0^2 \psi_0$ — характерное время проявления нелинейных эффектов. Важно отметить, что на этой стадии амплитуда $a = L_0/t$ и энергия $E(t) = L_0^2/12t^2$ поля не зависят от начальной амплитуды возмущения. Следовательно, если в двумерном начальном возмущении (21) компоненты имеют одинаковую амплитуду потенциала $\psi_0(x)$, но существенно разные периоды L_i ($L_1 \ll L_2$), то начальная энергия компоненты с меньшим масштабом будет намного больше: $E_1(0)/E_2(0) = L_2^2/L_1^2$. Однако на больших временах $t \gg t_{nl,2} = 1/k_2^2 \psi_0$ имеет место обратная ситуация: $E_1(t)/E_2(t) \rightarrow L_1^2/L_2^2$. Для больших, но конечных чисел Рейнольдса $\text{Re}_0 = \psi_0/2\nu$ при $t \gg t_{nl}$ Re_0 начинается линейная стадия эволюции поля и

$$v(x, t) = 4\nu k_0 \sin(k_0 x) \exp(-\nu k_0^2 t).$$

Для двумерного возмущения (21) на этой стадии также преобладает компонента с большим периодом L_0 .

Непрерывные случайные поля также трансформируются в последовательность ячеек с одинаковыми градиентами поля $\partial v / \partial x = 1/t$, но случайным положением разрывов, разделяющих их. Слияние ячеек ведет к росту общего масштаба турбулентности $L(t)$, поэтому энергия случайного поля $E(t) \propto L^2(t)/t^2$ убывает медленнее, чем энергия

периодического сигнала. Сценарий развития турбулентности определяется поведением крупномасштабной части начального энергетического спектра:

$$E_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int \langle v_0(x)v_0(x+z) \rangle \exp(ikz) dz, \quad (23)$$

$$E_0(k) = \alpha^2 k^n b_0(k). \quad (24)$$

Здесь $b_0(k)$ — функция, быстро убывающая при $k > k_0 \sim l_0^{-1}$. При $n < 1$ начальный потенциал представляет собой броуновское или фрактальное броуновское движение и может быть использован метод масштабного подобия [2, 7, 17, 32]. В этом случае турбулентность является автомодельной, а ее характерный масштаб равен

$$L(t) = (\alpha t)^{2/(3+n)}$$

и не зависит от пространственного масштаба начального спектра l_0 [7]. Более того, на больших временах даже поведение отдельных реализаций случайного поля слабо зависит от мелкомасштабных флуктуаций и определяется крупномасштабными компонентами начального возмущения [33].

При $n > 1$ закон затухания энергии сильно зависит от статистических свойств начального поля [8, 30]. Для гауссова начального возмущения средний потенциал $\langle \psi \rangle$, характерный масштаб $L(t)$ и энергия $E(t)$ турбулентности,

$$L(t) = (t\sigma_\psi)^{1/2} \ln^{-1/4} \left(\frac{t\sigma_\psi}{2\pi l_0^2} \right), \quad (25)$$

$$E(t) = t^{-1} \sigma_\psi \ln^{-1/2} \left(\frac{t\sigma_\psi}{2\pi l_0^2} \right),$$

определяются только двумя обобщенными характеристиками начального спектра: дисперсиями начального потенциала, $\sigma_\psi^2 = \langle \psi_0^2 \rangle$, и скорости, $\sigma_v^2 = \langle v_0^2 \rangle$ [24–27, 34]. Здесь $l_0 = \sigma_\psi / \sigma_v$ — характерный масштаб начального возмущения. Таким образом, в двумерном начальном возмущении (21) энергии двух компонент с одинаковыми дисперсиями σ_ψ и разными пространственными масштабами $l_{0,i}$ ($l_{0,1} \ll l_{0,2}$) в начальный момент времени $t = 0$ будут существенно различаться:

$$\frac{E_1(0)}{E_2(0)} = \frac{l_2^2}{l_1^2} \gg 1.$$

Однако при больших временах они будут практически одинаковы, $E_1(t)/E_2(t) \approx 1$, с точностью до малой логарифмической поправки. При конечных числах Рейнольдса, $Re_0 = \sigma_\psi / 2\nu$, благодаря многократным слияниям разрывов линейный режим начинается очень поздно, при $t \gg t_{nl} \exp(Re_0^2) / Re_0$,

где $t_{nl} = \sigma_\psi / l_0^2$ — время проявления нелинейных эффектов. На линейной стадии энергия затухает как $Ct^{-3/2}$, где константа $C \sim l_0 \exp(Re_0^2) / Re_0$.

3. ЭВОЛЮЦИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СРЕДЕ С ИСЧЕЗАЮЩЕ МАЛОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

3.1. Эволюция простых возмущений

Рассмотрим эволюцию локализованного анизотропного возмущения в многомерном уравнении Бюргерса. Для упрощения выкладок начнем с двумерного ($d = 2$) случая, поскольку обобщение для $d > 2$ в большинстве ситуаций очевидно. Сначала обратимся к частному случаю, когда начальный потенциал $\psi_0(\mathbf{x})$ является квадратичной функцией координат (см. (13) при $y_{i,k} = 0$) внутри области S_0 , определяемой как

$$\frac{x_1^2}{2L_1^2} + \frac{x_2^2}{2L_2^2} \leq 1,$$

и $\psi_0(\mathbf{x}) = 0$ вне S_0 . При этом эволюция полей потенциала $\psi(\mathbf{x}, t)$ и скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ внутри расширяющегося эллипса $S(t)$, заданного выражениями

$$\frac{x_1^2}{2L_1^2(t)} + \frac{x_2^2}{2L_2^2(t)} \leq 1, \quad (26)$$

$$L_i(t) = L_i \left(1 + \frac{\psi_0 t}{L_i^2} \right)^{1/2} = L_i \left(1 + \frac{t}{t_{nl,i}} \right)^{1/2} \quad (27)$$

описывается формулами (14), (15) и $\mathbf{v} = 0$, $\psi = 0$ вне этой области. Здесь $t_{nl,i} = L_i^2 / \psi_0$ — время нелинейности i -й компоненты скорости. В этом случае происходит независимая эволюция каждой компоненты скорости $v_i(x_i, t)$ и, в частности,

$$v_2(x_2, t) = \frac{\psi_0 x_2}{L_2^2(1 + \psi_0 t / L_2^2)}$$

не зависит от другой координаты x_1 . Однако границы расширяющегося по оси x_1 интервала

$$\Delta x_1(x_2, t) = 2L_1(t) \left[2 \left(1 - \frac{x_2^2}{2L_2^2(t)} \right) \right]^{1/2},$$

на котором скорость $v_2(x_2, t)$ не зависит от x_1 , определяются как величиной $L_2(t)$, так и величиной $L_1(t)$ и, следовательно, имеет место сильное взаимодействие между компонентами скорости. Энергия компонент скорости определяется выражениями

$$E_1(t) = \frac{\pi \psi_0^2 L_2(t)}{L_1(t)}, \quad E_2(t) = \frac{\pi \psi_0^2 L_1(t)}{L_2(t)}. \quad (28)$$

Рассмотрим эволюцию сильно анизотропного возмущения ($L_1 \ll L_2$), и в качестве меры анизотропии выберем отношение энергий компонент:

$$\kappa(t) = \frac{E_1(t)}{E_2(t)} = \frac{L_2^2(t)}{L_1^2(t)}.$$

Из формул (28) следует, что энергия мелкомасштабной компоненты, $E_1(t)$, монотонно убывает, в то время как энергия крупномасштабной, $E_2(t)$, монотонно возрастает. Соответственно, коэффициент анизотропии $\kappa(t)$ монотонно уменьшается от значения $\kappa(0) = L_2^2/L_1^2 \gg 1$ и стремится к 1 при $t \gg t_{nl,2}$. При $t_{nl,1} \ll t \ll t_{nl,2}$, когда нелинейное самовоздействие крупномасштабной компоненты еще несущественно, для энергии компонент имеем

$$E_1(t) \approx \frac{\pi\psi_0^2 L_2}{(\psi_0 t)^{1/2}}, \quad E_2(t) \approx \frac{\pi\psi_0^2 (\psi_0 t)^{1/2}}{L_2}. \quad (29)$$

Таким образом, энергия мелкомасштабной компоненты монотонно уменьшается по тому же закону, что и в одномерном случае. Энергия крупномасштабной компоненты растет со временем благодаря переносу в пространстве незатухающей компоненты скорости $v_2(x_2, t) \approx v_2(x_2, 0)$ компонентой v_1 . На больших временах энергия всего поля $E(t)$ и каждой из компонент являются постоянными. Сохранение энергии (средней изрезанности поверхности) на больших временах обусловлено тем, что уменьшение с течением времени максимальных градиентов $v_i(t) \propto t^{-1/2}$ компенсируется увеличением объема $V(t) \propto t^{1/2}$. На рис. 1 изображена эволюция безразмерной энергии $e_i(t) = E_i(t)\psi_0^2/\pi$ компонент анизотропного возмущения ($L_2/L_1 = \sqrt{10}$) как функция безразмерного времени $\tau = t/t_{nl,1}$.

В трехмерном случае легко получить, что для начального потенциала $\psi_0(\mathbf{x})$, описываемого внутри соответствующего эллипсоида уравнением (13), энергия компоненты скорости $v_1(t)$ изменяется как

$$E_1(t) \propto \frac{\psi_0^2 L_2(t) L_3(t)}{L_1(t)}, \quad (30)$$

где $L_i(t)$ определяется из уравнения (27). Для сильно анизотропного возмущения энергия компонент поля на начальной стадии ($\min t_{nl,i} \ll t \ll \max t_{nl,i}$) может как возрастать, так и убывать и оставаться постоянной во времени, но при $t \gg \max t_{nl,i}$ поле становится изотропным и энергия растет как $t^{1/2}$.

Предположим, что начальное анизотропное локализованное возмущение можно представить в виде

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \psi_0 f_1(x_1) f_2(x_2), \quad (31)$$

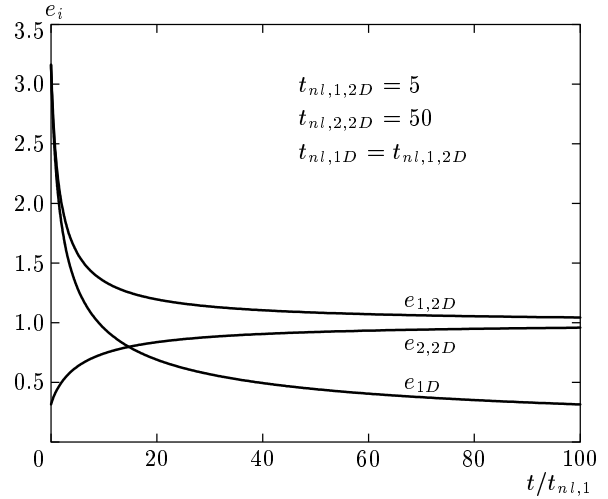


Рис. 1. Эволюция безразмерной энергии $e_{i,2D} = E_i\psi_0^2/\pi$ компонент двумерного анизотропного возмущения ($L_2/L_1 = \sqrt{10}$) как функции безразмерного времени $\tau = t/t_{nl,1}$. Для сравнения приведена эволюция энергии одномерного локализованного возмущения e_{1D}

где функции f_i имеют максимум в точке $\mathbf{x} = 0$ ($f_1(0) = f_2(0) = 1$) и характерные масштабы L_i ($L_1 \ll L_2$). Для такого возмущения $E_1(0) \gg E_2(0)$. На временах

$$\frac{t_{nl,1}}{f_2(x_2)} \ll t \ll t_{nl,2}, \quad t_{nl,i} = \frac{L_i^2}{\psi_0},$$

мелкомасштабная компонента $v_1(\mathbf{x}, t)$ трансформируется в N -образный импульс, а самовоздействие крупномасштабной компоненты $v_2(\mathbf{x}, t)$ еще не существенно. Следовательно, при фиксированном x_2 в пространственном интервале

$$|x_1| \leq L_s(t) = (2\psi_0 f_2(x_2) t)^{1/2} \quad (32)$$

наблюдается универсальное поведение компонент поля:

$$v_1(\mathbf{x}, t) \approx \frac{x_1}{t}, \quad v_2(\mathbf{x}, t) \approx \psi_0 f_1(0) \frac{\partial f_2(x_2)}{\partial x_2}. \quad (33)$$

А именно, $v_1(\mathbf{x}, t)$ не зависит от x_2 и начальной амплитуды возмущения, а величина $v_2(\mathbf{x}, t)$ не зависит от x_1 и равна начальному полю на оси $x_1 = 0$: $v_2(\mathbf{x}, t) = v_2(0, x_2, 0)$. Следовательно, из (32), (33) для энергии компонент имеем

$$E_1(t) \approx \frac{2^{5/2} \psi_0^{3/2}}{3t^{1/2}} \int f_2^{3/2}(x_2) dx \propto E_1(0) \frac{L_1}{(\psi_0 t)^{1/2}}, \quad (34)$$

$$E_2(t) \approx 2^{3/2} \psi_0^{3/2} t^{1/2} \int f_2^{1/2}(x_2) \left(\frac{\partial f_2(x_2)}{\partial x_2} \right)^2 dx \propto \propto E_2(0) \frac{(\psi_0 t)^{1/2}}{L_1}. \quad (35)$$

Таким образом, и в данном случае наблюдается затухание мелкомасштабной компоненты v_1 и возрастание крупномасштабной v_2 . При $t \gg t_{nl,2}$ происходит изотропизация начального возмущения и поле скорости имеет универсальную структуру (18) внутри области $|\mathbf{x}| < (2\psi_0 t)^{1/2}$.

3.2. Эволюция возмущений со сложной внутренней структурой

Из решения уравнения Бюргера (12) следует, что асимптотическое решение (17), (18), имеющее вид

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_0(\mathbf{y}_*) - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}_*)^2}{2t}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}_*}{t}, \quad (36)$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}_*| < L_s(t) = (2Ht)^{1/2},$$

имеет место для любого начального локализованного возмущения с единственным максимумом $H = \psi_0(\mathbf{y}_*)$, расположенным в точке $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_*$. На данной стадии энергия поля в d -мерном случае задается выражением

$$E(t) = \frac{2^{(d+4)/2} H^{(d+2)/2} t^{(d-2)/2}}{\Gamma(d/2)(d+2)}, \quad (37)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Из формулы (37) видно, что для $d = 1$ энергия $E(t)$ уменьшается со временем, в двумерном случае $E(t)$ является константой, а при $d \geq 3$ — растет со временем. Напомним, что для многомерного уравнения Бюргера величина

$$E(t) = \langle (\nabla \psi(\mathbf{x}, t))^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2(\mathbf{x}, t) \rangle$$

есть среднеквадратичный градиент и характеризует изрезанность поверхности.

Если изначально локализованное возмущение обладает сложной внутренней структурой, то процесс изотропизации может иметь различные стадии. Ниже мы рассмотрим эволюцию многомасштабного локализованного начального возмущения, считая, что его начальный потенциал представим в форме

$$\psi_0^M(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x})\psi_0(\mathbf{x}), \quad (38)$$

$$M(\mathbf{x}) = 1 - \sum_i \frac{x_i^2}{2L_{M,i}^2} + \dots$$

Здесь $\psi_0(\mathbf{x})$ — случайное гауссово статистически однородное поле с корреляционной функцией

$$\langle \psi_0(\mathbf{x})\psi_0(\mathbf{x} + \rho) \rangle = B_\psi(\rho) = \sigma_\psi^2 \prod_{i=1}^d R_i(\rho_i), \quad (39)$$

$$R_i(\rho_i) = 1 - \frac{\rho_i^2}{2!l_{0,i}^2} + \frac{\rho_i^4}{4!l_{1,i}^4} + \dots \quad (40)$$

Мы также предположим, что если $B_\psi(|\rho| > l_{st}) \approx 0$, где $l_{st} \sim l_0, l_1$, то гауссово поле $\psi_0(\mathbf{x})$ в точках $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| > l_{st}$ является статистически независимым. Огибающая функция $M(\mathbf{x})$ имеет максимум в точке $\mathbf{x} = 0$, причем характерные масштабы $L_{M,i}$ много больше масштабов внутренней структуры $l_{0,i}$.

Можно показать [7], что для статистически однородного начального поля $\psi_0(\mathbf{x})$ на достаточно больших временах $t \gg \max(l_{0,i})^2 / \sigma_\psi$ происходит изотропизация полей скорости $v(\mathbf{x}, t)$ и потенциала $\psi(\mathbf{x}, t)$. При этом все статистические свойства турбулентности становятся автомодельными и характеризуются интегральным масштабом $L(t)$ равным

$$L(t) = (\sigma_\psi t)^{1/2} d^{-1/4} \left[\ln \frac{\sigma_\psi t}{l_{eff}^2 (2\pi)^{1/d}} \right]^{-1/4}, \quad (41)$$

где

$$l_{eff}^d = \prod_{i=1}^d l_{0,i}$$

— эффективный пространственный масштаб начального поля. Для энергии каждой из компонент скорости и энергии турбулентности имеем

$$E_i(t) = \frac{L^2(t)}{t^2} = \frac{\sigma_\psi}{t} d^{-1/2} \left[\ln \frac{\sigma_\psi t}{l_{eff}^2 (2\pi)^{1/d}} \right]^{-1/2}, \quad (42)$$

$$E(t) = \sum_i E_i(t).$$

Средний потенциал (средняя высота поверхности) растет при этом по логарифмическому закону:

$$\langle \psi(\mathbf{x}, t) \rangle = d^{1/2} \left[\ln \frac{\sigma_\psi t}{l_{eff}^2 (2\pi)^{1/d}} \right]^{1/2}. \quad (43)$$

Для статистически неоднородного поля (38) на стадии, когда интегральный масштаб турбулентности $L(t)$ много меньше масштаба модуляции $L_{M,i}$, можно использовать квазистатистическое приближение. В данном приближении на временах

$$\frac{\min(L_{0,i})^2}{\sigma_\psi} \gg t \gg \frac{\max(L_{0,i})^2}{\sigma_\psi}$$

интегральный масштаб $L(\mathbf{x}, t)$ и энергия $E(\mathbf{x}, t)$ турбулентности по-прежнему описываются уравнениями (41), (42), но дисперсия начального потенциала в этих уравнениях является медленной функцией координаты $\sigma_\psi^2 = \sigma_\psi^2 M^2(\mathbf{x})$. Это значит, что имеет место локальная изотропизация внутренней структуры. При этом интегральный масштаб растет быстрее в областях большей амплитуды поля: $L(\mathbf{x}, t) \approx (\sigma_\psi M(\mathbf{x})t)^{1/2}$, а нелинейные эффекты приводят к частичному подавлению модуляции: $E(\mathbf{x}, t) \approx \sigma_\psi M(\mathbf{x})t^{-1}$, в то время как для начального возмущения $E(\mathbf{x}, 0) = \sigma_\psi^2 M^2(\mathbf{x})$.

На этой стадии поле скорости имеет ячеистую структуру с универсальным поведением (18) внутри каждой ячейки. Границы ячейки определяются из условия соприкосновения двух локальных максимумов \mathbf{y}_k и \mathbf{y}_m функции $\psi_0(\mathbf{x})$ и являются плоскостями, ортогональными вектору $\Delta\mathbf{y}_{k,m} = \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_m$. Скорость движения границ является постоянной и совпадает по направлению с вектором $\Delta\mathbf{y}_{k,m}$, пропорциональным по величине разнице потенциалов, $\psi(\mathbf{y}_k) - \psi(\mathbf{y}_m)$, двух соседних максимумов и направленным к ячейке с меньшим из двух максимумов. Для статистически неоднородного начального возмущения (38) среднее значение локального максимума медленно убывает от центра возмущения. Следовательно, скорость границ ячеек и само поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ будут иметь некую среднюю компоненту, направленную из точки $\mathbf{x} = 0$. Границы локализованного возмущения будут при этом иметь «пузырьковую» структуру. Внешние ячейки имеют плоские границы при контакте с внутренними ячейками, и сферические — $|\mathbf{x} - \mathbf{y}_k| < (2\psi_0(\mathbf{y}_k)t)^{1/2}$ — на границах возмущения. На больших временах выживает единственная ячейка с абсолютным максимумом потенциала, при этом поля потенциала и скорости имеют универсальную структуру (36).

Представим поле скорости в виде суммы крупномасштабной, \mathbf{v}_l , и мелкомасштабной, \mathbf{v}_s , компонент:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_l(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{v}_l(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (44)$$

Здесь угловые скобки означают статистическое усреднение. Запишем уравнение Бюргерса для потенциального поля в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v})^2 + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (45)$$

Будем считать, что эволюция мелкомасштабной компоненты \mathbf{v}_s может быть описана в квазистатистическом приближении. Пренебрегая нелинейными искажениями

и диссипацией крупномасштабной компоненты, после усреднения (45) получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}_l(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla \langle \mathbf{v}_s^2(\mathbf{x}, t) \rangle = -\frac{1}{2} \nabla E_s(\mathbf{x}, t). \quad (46)$$

Таким образом, мы имеем, что для неоднородного случайного поля происходит генерация регулярной крупномасштабной компоненты с ненулевым средним значением. До проявления нелинейных искажений мелкомасштабной компоненты ($t \ll t_{nl,s} = \min(l_{1,i}^2/\sigma_\psi)$) регулярная компонента определяется начальной энергией поля скорости:

$$\mathbf{v}_l(\mathbf{x}, t) = \frac{t\sigma_v^2}{2} \nabla M^2(\mathbf{x}).$$

На сильно нелинейной стадии развития, когда происходит локальная изотропизация внутренней структуры, из уравнений (44), (43) имеем логарифмический рост крупномасштабной компоненты:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_l(\mathbf{x}, t) &= -\nabla \langle \psi(\mathbf{x}, t) \rangle \approx \\ &\approx -\nabla |M(\mathbf{x})| \sigma_\psi d^{1/2} \left(\ln \frac{\sigma_\psi t}{l_{eff}^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (47)$$

Для анизотропной функции $M(\mathbf{x})$ среднее поле скорости на этой стадии также является анизотропным. Когда масштаб внутренней структуры $L(\mathbf{x}, t)$ становится порядка масштаба функции модуляции $M(\mathbf{x})$, необходимо учитывать нелинейные искажения регулярной компоненты $\mathbf{v}_l(\mathbf{x}, t)$. В конечном итоге взаимодействие (слияние) ячеек ведет к изотропизации полей скорости и потенциала. На больших временах ячейка с абсолютно максимальным значением потенциала поглотит все остальные и асимптотическое решение будет описываться уравнением (36). Границы $L_s(t)$ (36) и энергия $E(t)$ (37) такой структуры определяются только абсолютным максимумом H начального потенциала $\psi_0^M(\mathbf{x})$ (38). На рис. 2а-в изображена эволюция поверхности $\psi(\mathbf{x}, t)$ двумерного локализованного возмущения на нелинейной стадии для отношения времен, соответственно, $t/t_{nl} = 10, 30, 80$. Хорошо видны происходящая с течением времени изотропизация поля и структура границ ячеек.

Рассмотрим статистические свойства величины абсолютного максимума H для возмущений со сложной внутренней структурой, предполагая, что характерный масштаб внутренней структуры много меньше масштаба огибающей. В Приложении показано,

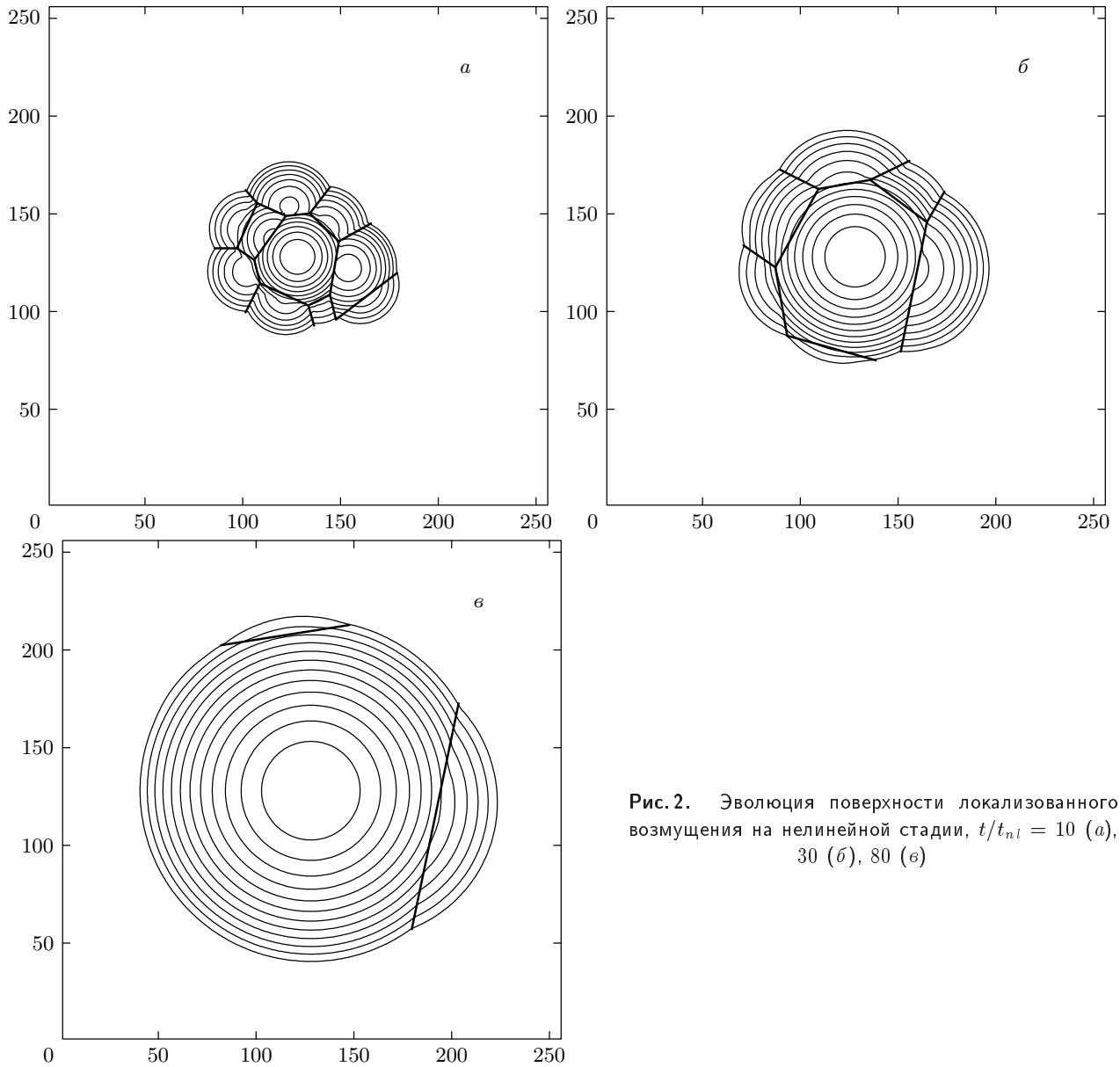


Рис. 2. Эволюция поверхности локализованного возмущения на нелинейной стадии, $t/t_{nl} = 10$ (а), 30 (б), 80 (в)

что интегральная функция $Q(H, V)$ вероятности нахождения абсолютного максимума в некотором объеме V может быть выражена через среднее число $N(H; V)$ максимумов потенциала ψ_0 , превышающих уровень H (см. формулу (81)),

$$Q(H; V) = \exp(-N(H; V)). \quad (48)$$

Для статистически однородного поля плотность максимумов n определяется из уравнения (78), см. Приложение. Для статистически неоднородного поля $\psi_0^M(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x})\psi_0(\mathbf{x})$ (38) при $L_{M,i} \gg l_i$ можно ввести локальную плотность $n_{loc}(\mathbf{x})$, описывающуюся

тем же уравнением, но с заменой σ_ψ на $M(\mathbf{x})\sigma_\psi$. Тогда для среднего количества $N_\infty(H)$ максимумов потенциала ψ_0^M во всем пространстве имеем

$$N_\infty(H) = \frac{1}{(2\pi)^{(d+1)/2} l_{eff}^d} \int \left(\frac{H}{M(\mathbf{x})\sigma_\psi} \right)^{d-1} \times \exp\left(-\frac{H^2}{2M^2(\mathbf{x})\sigma_\psi^2}\right) d^d \mathbf{x}. \quad (49)$$

Для больших H , используя метод Лапласа, из уравнений (38), (49) получаем

$$N_{\infty}(H) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{H}{\sigma_{\psi}}\right)^{d-1} \left(\frac{L_{eff}^M}{l_{eff}}\right)^d \times \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_{\psi}^2}\right), \quad (50)$$

где

$$l_{0,eff}^d = \prod_{i=1}^d l_{0,i}, \quad (L_{eff}^M)^d = \prod_{i=1}^d L_{M,i}.$$

В формуле (50) отношение $(L_{eff}^M/l_{eff})^d = N_{max}$ является числом независимых локальных максимумов начального возмущения (38). В нашем случае ($N_{max} \gg 1$) можно ввести безразмерный потенциал

$$h = \frac{H}{\sigma_{\psi}} = h_0 \left(1 + \frac{z}{h_0^2}\right), \quad (51)$$

где $h_0 = H_0/\sigma_{\psi}$, а H_0 — решение уравнения $N_{\infty}(H_0) = 1$:

$$H_0 \approx \sigma_{\psi} \left(2d \ln \frac{L_{eff}^M}{l_{eff}}\right)^{1/2}. \quad (52)$$

Безразмерный потенциал h имеет двойное экспоненциальное распределение:

$$Q(z) = \exp[-\exp(-z)], \quad (53)$$

$$Q_h(h) = \exp\{-\exp[-(h-h_0)h_0]\}.$$

При $N_{max} \gg 1$ интегральная функция (48) распределения абсолютного максимума сконцентрирована в узкой окрестности $\Delta H/H \approx 1/h_0^2 \ll 1$ точки $H_0 = h_0\sigma_{\psi}$. Таким образом, из выражений (36), (37) следует, что относительные флуктуации пространственного масштаба

$$\frac{\Delta L_s(t)}{L_s(t)} \approx \frac{1}{2h_0^2}$$

и энергии

$$\frac{\Delta E(t)}{E(t)} \approx \frac{d+2}{2h_0^2}$$

изотропного поля скорости достаточно малы. Аналогично приведенным в разделе вычислениям можно получить, что распределение плотности вероятности для координаты \mathbf{y}_k изотропного поля (36) является гауссовым с квадратичным средним, равным $\langle y_{k,i}^2 \rangle = L_{M,i}^2/h_0^2$. На временах, когда масштаб структуры $L_s(t) \gg L_{M,i}$, вариации поля определяются лишь изменениями позиции разрывов $L_s(t)$, которые достаточно малы. Для средней скорости $\mathbf{v}_l(\mathbf{x}, t)$ (см. (44)) и дисперсии $\sigma_{\mathbf{v}}^2(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{v}_s^2(\mathbf{x}, t) \rangle$ из формул (36), (51) и (53) имеют

$$\mathbf{v}_l(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{\mathbf{x}}{t} \left[1 - Q_h\left(\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma_{\psi}^2 t}\right)\right], \quad (54)$$

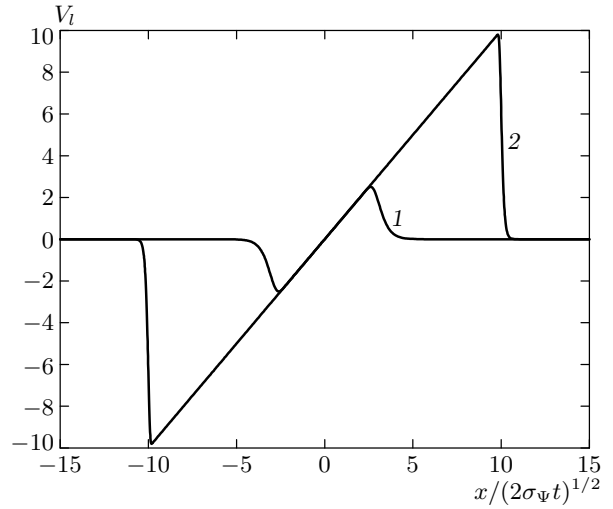


Рис. 3. Безразмерное автомодельное среднее поле $V_l(x)$ при $h_0 = 3$ (1), 10 (2)

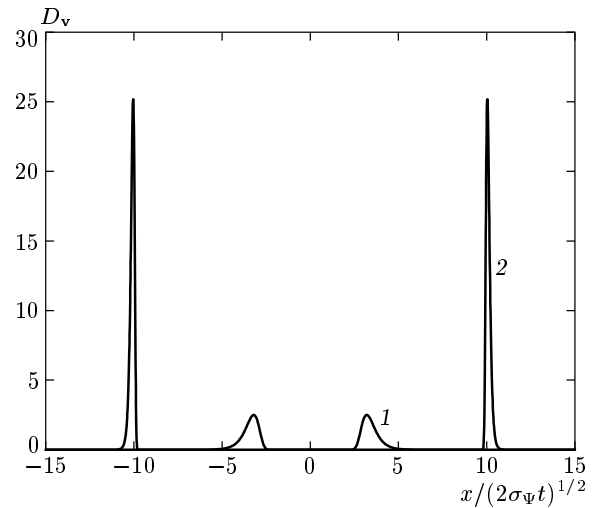


Рис. 4. Безразмерная автомодельная дисперсия $D_v(x)$ при $h_0 = 3$ (1), 10 (2)

$$\sigma_{\mathbf{v}}^2(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x}^2}{t^2} Q_h\left(\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma_{\psi}^2 t}\right) \left[1 - Q_h\left(\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma_{\psi}^2 t}\right)\right]. \quad (55)$$

Из этих выражений следует, что среднее поле и дисперсия являются автомодельными функциями:

$$\mathbf{v}_l(\mathbf{x}, t) = (2\sigma_{\psi}^2 t)^{1/2} \mathbf{V}_l\left(\frac{\mathbf{x}}{(2\sigma_{\psi}^2 t)^{1/2}}\right),$$

$$\sigma_{\mathbf{v}}^2(\mathbf{x}, t) = 2\sigma_{\psi}^2 t D_v\left(\frac{\mathbf{x}}{(2\sigma_{\psi}^2 t)^{1/2}}\right),$$

форма которых определяется единственным параметром $h_0 = H_0/\sigma_{\psi}$ (52). При увеличении отноше-

ния характерного масштаба возмущения к масштабу внутренней структуры среднее поле стремится к N -волне, а дисперсия локализуется в окрестностях разрывов, что показано, соответственно, на рис. 3, 4. Как видно из (54), при $N_{max} \gg 1$ энергия регулярной компоненты $\mathbf{v}_l(\mathbf{x}, t)$ описывается уравнением (37), где $H = h_0 \sigma_\psi$. Дисперсия $\sigma_v^2(\mathbf{x}, t)$ отлична от нуля в узкой окрестности $\Delta L_s(t)/L_s(t) \approx 1/2h_0^2$ координаты разрыва $L_s(t) = (2\sigma_\psi h_0 t)^{1/2}$. Энергия $E_s(t)$ случайной компоненты много меньше энергии $E_l(t)$ средней компоненты поля $\mathbf{v}_l(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{E_s(t)}{E_l(t)} \approx \frac{d+2}{h_0^2} \approx \frac{d+2}{d} \left(2 \ln \frac{L_{eff}^M}{l_{eff}} \right)^{-1} \ll 1. \quad (56)$$

Таким образом, в среде с исчезающе малой вязкостью нелинейные эффекты приводят к генерации практически детерминированной крупномасштабной изотропной структуры.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОЛЯ НА БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

Для анализа поведения поля при больших, но конечных числах Рейнольдса будем использовать решение Хопфа–Коула. Когда масштаб функции Грина линейного уравнения диффузии (8) много больше масштаба начального локализованного возмущения, из выражений (8), (9) получаем

$$U(\mathbf{x}, t) = 1 + \frac{B}{(4\pi\nu t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4\nu t}\right), \quad (57)$$

где константа B равна

$$B = \int \left[\exp\left(\frac{\psi_0(\mathbf{y})}{2\nu}\right) - 1 \right] d^d \mathbf{y}. \quad (58)$$

Для больших начальных чисел Рейнольдса $Re_0 \sim H/2\nu$, где H — глобальный максимум функции $\psi_0(\mathbf{y})$, константа B может быть представлена как

$$B = L_{eff}^d \exp\left(\frac{H}{2\nu}\right). \quad (59)$$

где L_{eff} — некий эффективный масштаб подынтегрального выражения в (58). Тогда выражение (57) принимает вид

$$U(\mathbf{x}, t) = 1 + \exp\left[-\frac{1}{2\nu} \left(\frac{\mathbf{x}^2}{2t} - H + \nu d \ln \frac{4\pi\nu t}{L_{eff}^2} \right)\right]. \quad (60)$$

При малой вязкости ($\nu \rightarrow 0$) из уравнений (7), (60) получаем решение (36). Но при конечных числах

Рейнольдса выражение (36) справедливо лишь на ограниченном временном интервале. Для конечных t и для достаточно малых значений x мы по-прежнему имеем решение (36) внутри « d -сферы»:

$$|\mathbf{x}| \leq L_s(t) = \left[2t \left(H - d\nu \ln \frac{4\pi\nu t}{L_{eff}^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (61)$$

При конечных числах Рейнольдса ударный фронт имеет конечную ширину $\delta \sim t^{1/2}$. Однако более существенно, что за счет логарифмической поправки к положению разрыва (36) отношение ширины разрыва к положению ударного фронта $\delta(t)/L_s(t)$ возрастает с течением времени. Это приводит к уменьшению эффективного числа Рейнольдса и, следовательно, к разрушению нелинейной структуры. На больших временах, когда $B/(4\pi\nu t)^{d/2} \ll 1$, мы имеем линейное решение и для поля скорости из выражений (20), (57) получаем

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{B}{(4\pi\nu t)^{d/2}} \nabla \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4\nu t}\right). \quad (62)$$

На больших временах эволюция поверхности (потенциала $\psi(\mathbf{x}, t)$) описывается линейным уравнением диффузии, а сама поверхность имеет гауссову форму с высотой $B(4\pi\nu t)^{-d/2}$ и пространственным масштабом $(2\nu t)^{1/2}$.

Если потенциал начального возмущения имеет один максимум и представим в его окрестности в виде (13), то, как следует из уравнения (59),

$$B = \left(\frac{4\pi\nu}{\psi_0} \right)^{(d+1)/2} \prod_{i=1}^d L_i \exp \frac{\psi_0}{2\nu}.$$

Если начальное локализованное случайное возмущение является гауссовым и представимо в форме (38), то для среднего значения B из формулы (58) получаем

$$\langle B \rangle = \int \left(\exp \frac{Re_0^2 M^2(\mathbf{y})}{2} - 1 \right) d^d \mathbf{y}, \quad (63)$$

$$Re_0 = \frac{\sigma_\psi}{2\nu}.$$

Из последнего выражения следует, что среднее значение $\langle B \rangle$ не зависит от внутренней структуры потенциала $\psi_0(\mathbf{x})$ и всегда положительно, что является результатом генерации среднего поля на нелинейной

стадии. Для дисперсии $\sigma_B^2 = \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle$ справедливо равенство

$$\sigma_B^2 = \iint \exp\left(\frac{\sigma_\psi^2 (M^2(\mathbf{y}) + M^2(\mathbf{y}'))}{8\nu^2}\right) \times \\ \times \left[\exp\left(\frac{B_\psi(\mathbf{y}-\mathbf{y}')M(\mathbf{y})M(\mathbf{y}')}{4\nu^2}\right) - 1 \right] d^d \mathbf{y} d^d \mathbf{y}'. \quad (64)$$

Здесь $B_\psi(\mathbf{z})$ — функция корреляции однородного начального потенциала $\psi_0(\mathbf{x})$. При больших начальных числах Рейнольдса Re_0 для среднего значения B получаем

$$\langle B \rangle = \left(\frac{2\pi}{\text{Re}_0}\right)^{(d+1)/2} \prod_{i=1}^d L_{M,i} \exp\left(\frac{\text{Re}_0^2}{2}\right) \propto \\ \propto \left(\frac{L_{eff}^M}{\text{Re}_0^{1/2}}\right)^d \exp\left(\frac{\text{Re}_0^2}{2}\right), \quad (65)$$

а для дисперсии справедливо соотношение

$$\sigma_B^2 \propto \left(\frac{l_{eff} L_{eff}^M}{\text{Re}_0}\right)^d \exp(2 \text{Re}_0^2). \quad (66)$$

Таким образом, на линейной стадии эволюции поле имеет универсальную структуру (62) со случайной амплитудой B . При этом отношение энергий случайного и регулярного полей определяется величиной относительных флуктуаций B :

$$\frac{E_s(t)}{E_l(t)} = \frac{\sigma_B^2}{(\langle B \rangle)^2} \propto \left(\frac{l_{eff}}{L_{eff}^M}\right)^d \exp(\text{Re}_0^2). \quad (67)$$

Эти флуктуации на линейной стадии развития в $\exp(\text{Re}_0^2)$ раз больше таких же флуктуаций на нелинейной стадии (см. (56)). Тем не менее при $(l_{eff}/L_{eff}^M)^d \ll \exp(-\text{Re}_0^2)$ мы имеем относительно малый разброс B , и с увеличением отношения $(l_{eff}/L_{eff}^M)^d$ распределение B медленно сходится к нормальному. Такое поведение схоже со свойствами однородного поля на поздней стадии развития [29].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследуется эволюция случайных многомасштабных возмущений в задачах о росте поверхностей. Эволюция поверхности описывается уравнением KPZ для потенциала ψ , а векторное поле градиента ($\mathbf{v} = -\nabla\psi$) удовлетворяет многомерному уравнению Бюргерса. Среднеквадратичный градиент

$$E(t) = \langle (\nabla\psi(\mathbf{x}, t))^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2(\mathbf{x}, t) \rangle$$

характеризует при этом изрезанность поверхности и может как убывать, так и возрастать с течением времени. Относительное влияние нелинейных и диффузионных (диссипативных) эффектов характеризуется при этом числом Рейнольдса Re_0 .

В пределе исчезающе малой вязкости нелинейные эффекты приводят к возникновению локальной автомодельности полей скорости и потенциала, когда случайное возмущение разбивается на ячейки с универсальным поведением поля в каждой из них. В результате взаимного поглощения одних ячеек другими, на больших временах выживает лишь одна ячейка с наибольшим значением начального потенциала. На этих временах внутри d -мерной сферы поверхность имеет форму параболоида высотой H и радиусом L_s , которые определяются величиной максимального потенциала начального локализованного возмущения H . При этом поле скорости терпит разрыв на границе области и амплитуда ударного фронта убывает с течением времени. Показано, что если масштаб сложной внутренней структуры существенно меньше масштаба локализации, то параметры асимптотической структуры H и L_s мало меняются при переходе от одной случайной реализации к другой. Это означает, что из случайного сложного локализованного возмущения с нулевым средним генерируется практически детерминированная когерентная структура. Показано, что на поздней стадии мы имеем автомодельную эволюцию среднего поля и поля дисперсии.

При конечных числах Рейнольдса сильно нелинейная стадия эволюции сменяется в конце концов на линейную. Для не слишком больших времен ударный фронт имеет конечную ширину $\delta \sim t^{1/2}$. Однако более существенно то, что за счет логарифмической поправки к положению разрыва отношение ширины разрыва к положению ударного фронта $\delta(t)/L_s(t)$ возрастает с течением времени. Это приводит к уменьшению эффективного числа Рейнольдса и, следовательно, к разрушению нелинейной структуры. На больших временах эволюция поверхности описывается линейным уравнением диффузии, а сама поверхность имеет гауссову форму с высотой $B(4\pi\nu t)^{-d/2}$, причем среднее значение $\langle B \rangle$ не зависит от внутренней структуры потенциала $\psi_0(\mathbf{x})$ и всегда положительно. Этот эффект является проявлением генерации среднего поля на нелинейной стадии. На линейной стадии флуктуации высоты существенно возрастают по сравнению с нелинейной стадией. Это связано с тем, что время перехода от нелинейной стадии к линейной в разных реализациях экспоненциально

зависит от максимальной высоты начального возмущения.

Авторы благодарны У. Фришу, А. Нуллесу, А. И. Саичеву за ценные дискуссии и обсуждение проблемы. Работа выполнена при финансовой поддержке ведущей научной школы (грант НШ-838.2003.2), РФФИ (грант № 02-02-17374) и программы «Университеты России».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Статистические свойства максимумов неоднородных случайных гауссовых полей

Асимптотическое поведение поля на больших временах определяется максимумом случайного поля ψ_0 , амплитуда которого превышает вариацию начального потенциала σ_ψ , поэтому можно использовать ряд результатов теории экстремальных процессов [7, 27, 35].

Задача о статистике пиков гауссова поля достаточно хорошо изучена в изотропном и статистически однородном случае (см. [36]). Для анализа же турбулентности Бюргерса необходимо исследовать статистические свойства абсолютных максимумов анизотропного и статистически неоднородного поля $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$. Рассмотрим сначала статистику максимумов статистически однородного поля $S(\mathbf{x})$. Очевидно, что для относительно гладких полей число пиков, находящихся выше некоторого уровня, асимптотически стремится к числу максимумов и экстремумов, величина которых больше этого уровня. Поэтому мы будем рассматривать свойства экстремумов поля $S(\mathbf{x})$. Полагая, что уравнение $\nabla S(\mathbf{x}) = 0$ имеет лишь один корень \mathbf{x}_r , можно написать следующее выражение для интеграла от многомерной δ -функции:

$$\int \delta(\nabla S(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \frac{1}{|J(\mathbf{x}_r)|}, \tag{68}$$

где J — якобиан преобразования:

$$J = J(a_{ij}) = \det(a_{ij}), \quad a_{ij} = \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{69}$$

Используя свойства δ -функции, можно получить для среднего числа $N(H) = \langle N_{ext}(H) \rangle$ экстремумов, находящихся в объеме V и превышающих значение H , выражение

$$N(H) = \left\langle \int_V \delta(\nabla S) |J(a_{ij})| E(S - H) d\mathbf{x} \right\rangle. \tag{70}$$

Здесь $E(S)$ — единичная функция.

Для статистически однородного поля пространственная плотность экстремумов $n(H) = N(H)/V = \langle N_{ext} \rangle / V$ определяется интегральной функцией плотности вероятности, зависящей от S , градиента $v_i = \partial S / \partial x_i$ и тензора $a_{ij} = \partial S / \partial x_i \partial x_j$. Для статистически однородного гауссова поля справедливо равенство

$$W_{S, v_i, a_{ij}} = W_v(v_i) W_{S, a_{ij}}(S, a_{ij}). \tag{71}$$

Из уравнений (70), (71) получаем

$$n(H) = W_v(0) \int_H^\infty \int dS J(a_{ij}) W_S(S, a_{ij}) da_{ij}. \tag{72}$$

Используя условную плотность вероятности

$$W_{con}(a_{ij}/S) = W_S(S, a_{ij}) / W_S(S),$$

получаем

$$n = W_v(0) \int_H^\infty dS W_S(S) \times \int J(a_{ij}) W_{con}(a_{ij}/S) da_{ij}. \tag{73}$$

Предположим, что функция корреляции поля $S(\mathbf{x})$ представима в виде

$$B_S(\rho) = \langle S(\mathbf{x}) S(\mathbf{x} + \rho) \rangle = \sigma_S^2 \prod_{i=1}^d R_i(\rho_i), \tag{74}$$

$$R_i(\rho_i) = 1 - \frac{\rho_i^2}{2! l_{0,i}^2} + \frac{\rho_i^4}{4! l_{1,i}^4} + \dots \tag{75}$$

Гауссово распределение в (72) в этом случае будет определяться набором констант

$$\begin{aligned} \langle a_{ij} \rangle_S &= \frac{S \langle a_{ij} S \rangle}{\sigma_S^2}, & \langle a_{ij} S \rangle &= -\frac{\delta_{ij} \sigma_S^2}{l_{0,i}}, \\ \langle a_{ij}^2 \rangle &= \frac{\sigma_S^2}{l_{0,i}^2 l_{0,j}^2}, & i \neq j, & \quad \langle a_{ii}^2 \rangle = \frac{\sigma_S^2}{l_{1,i}^4}, \\ W_v(0) &= \left(\frac{l_{0,eff}^2}{2\pi\sigma_\psi^2} \right)^{d/2}, & l_{0,eff}^d &= \prod_{i=1}^d l_{0,i}. \end{aligned} \tag{76}$$

Здесь мы ввели эффективную длину $l_{0,eff}$.

Для асимптотики $n(H)$ для больших значений H справедливо приближение

$$\langle J(a_{ij}) \rangle_S \approx J(\langle a_{ij} \rangle_S) \approx \prod_{i=1}^d \langle a_{ii} \rangle_S = \frac{S^d}{l_{0,eff}^{2d}}. \tag{77}$$

Окончательно для плотности экстремумов из уравнений (73)–(77) получаем

$$\begin{aligned}
 n_{ext}(H) &= W_v(0) \int_H^\infty dS W_S(S) \frac{S^d}{l_{eff}^{2d}} = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{(d+1)/2} l_{eff}^d} \int_{H/\sigma_S}^\infty S^d e^{-S^2/2} dS \approx \\
 &\approx \left(\frac{H}{\sigma_S}\right)^{d-1} \frac{1}{(2\pi)^{(d+1)/2} l_{eff}^d} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_S^2}\right). \quad (78)
 \end{aligned}$$

Из последнего выражения следует, что среднее число экстремумов анизотропного поля $S(x)$ зависит от эффективного пространственного масштаба l_{eff} , являющегося геометрическим средним величин $l_{0,i}$ (см. (76)). Для относительно больших H плотность экстремумов (78) эквивалентна плотности событий, описывающих превышение случайным полем $S(\mathbf{x})$ значения H .

Плотность вероятности нахождения абсолютного максимума S в области V можно найти методом, аналогичным для одномерного случая [7]. Для фиксированного объема V и больших значений H можно пренебречь возможностью более одного превышения $S(\mathbf{x})$ над H и считать подобный экстремум единственным в заданной области. Таким образом, можно получить для среднего числа $\langle N(H, V) \rangle$ превышений полем $S(\mathbf{x})$ значения H или среднего числа экстремумов $\langle N_{ext}(H, V) \rangle$, больших H , следующее выражение:

$$\langle N(H, V) \rangle \approx \langle N_{ext}(H, V) \rangle \approx P(1; H, V), \quad (79)$$

где $P(M; H, V)$ — вероятность того, что число событий $S > H$ в объеме V равно M .

Полагая $V \gg l_{st}^d$, где l_{st}^d — характерное расстояние, на котором значения $S(\mathbf{x})$ являются статистически независимыми, можно разбить объем V на физически малые объемы dV_k ($l_{st}^d \approx dV_k$). Вероятность того, что в данном объеме dV_k функция $S(\mathbf{x})$ не превысит величины H , можно выразить как

$$dP_k = 1 - P(1; H, dV_k) = 1 - \langle N(H, dV_k) \rangle, \quad (80)$$

где $\langle N(H, dV_k) \rangle \ll 1$. При условии $l_{st}^d \approx dV_k$ события в каждом интервале dV_k являются статистически независимыми. Следовательно, для интеграль-

ной функции распределения абсолютного максимума функции $S(\mathbf{x})$ в объеме V получаем

$$\begin{aligned}
 Q(H, V) &= P(S(\mathbf{x}) < H, \mathbf{x} \in V) = \\
 &= \prod_k dP_k = \prod_k (1 - \langle N(H, dV_k) \rangle) = \\
 &= \exp(-N(H, V)). \quad (81)
 \end{aligned}$$

Функция $Q(H, V)$ эквивалентна вероятности того, что в данном объеме V нет превышений $S(x) > H$ и для больших H не существует экстремумов, больших H . Выражение (81) отражает известный факт из теории экстремумов о пуассоновском распределении максимумов [35]. При больших H для статистически однородного поля имеем $N(H, V) = Vn(H)$, где n описывается уравнением (78). Для неоднородных полей, даже в одномерном случае, выражение для N намного сложнее. Но если предположить, что неравномерность поля связана со сдвигом среднего значения $\Phi_\alpha(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) - \alpha(\mathbf{x})$ или с изменением дисперсии $\Phi_M(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x})M(\mathbf{x})$, и что $\alpha(\mathbf{x})$, $M(\mathbf{x})$ достаточно гладкие функции (в масштабах $S(\mathbf{x})$), то можно воспользоваться квазистатистическим приближением. В частности, для среднего числа $N(H, V)$ событий $\Phi_M(\mathbf{x}) > H$ в объеме V имеем следующее уравнение:

$$N(H, V) = \int_V n_{ext}\left(\frac{H}{M(\mathbf{x})}\right) dV, \quad (82)$$

где n определяется выражением (78) и является плотностью экстремумов равномерной функции $S(\mathbf{x})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. M. Burgers, Kon. Ned. Akad. Wet. Verh. **17**, 1 (1939).
2. J. M. Burgers, *The Nonlinear Diffusion Equation*, D. Reidel, Dordrecht, (1974).
3. U. Frisch, *Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
4. R. Kraichnan, Phys. Fluids Mech. **11**, 265 (1968).
5. G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York (1974).
6. О. В. Руденко, С. И. Солуян, *Нелинейная акустика*, Наука, Москва, (1975).
7. С. Н. Гурбатов, А. Н. Малахов, А. И. Саичев, *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии*, Наука, Москва (1990).

8. W. A. Woyczynski, *Burgers-KPZ Turbulence. Göttingen Lectures*, Springer-Verlag, Berlin (1998).
9. A. Cheklov and V. Yakhot, *Phys. Rev. E* **52**, 5681 (1995).
10. A. M. Polyakov, *Phys. Rev. E* **52**, 6183 (1995).
11. W. E. Khanin, A. Mazel, and Ya. G. Sinai, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1904 (1997).
12. S. A. Boldyrev, *Phys. Rev. E* **59**, 2971 (1999).
13. J. Davoudi, A. A. Masoudi, M. R. Tabar, A. R. Rastegar, and F. Shahbazi, *Phys. Rev. E* **63**, 6308 (2001).
14. С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, *Изв. ВУЗов, радиофизика* **27**, 4 (1984).
15. S. N. Gurbatov, A. I. Saichev, and S. F. Shandarin, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **236**, 385 (1989).
16. S. F. Shandarin and Ya. B. Zeldovich, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 185 (1989).
17. M. Vergassola, B. Dubrulle, U. Frisch, and A. Noullez, *Astron. Astrophys.* **289**, 325 (1994).
18. A.-L. Barabási and H.E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
19. M. Kardar, G. Parisi and Y. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889 (1986).
20. J.-P. Bouchaud, M. Mézard, and G. Parisi, *Phys. Rev. E* **52**, 3656 (1995).
21. E. Hopf, *Comm. Pure Appl. Mech.* **3**, 201 (1950).
22. J. D. Cole, *Quart. Appl. Math.* **9**, 225 (1951).
23. L. Frachebourg and Ph. A. Martin, *J. Fluid Mech.* **417**, 323 (2000).
24. S. Kida, *J. Fluid Mech.* **93**, 337 (1979).
25. С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, *ЖЭТФ* **80**, 689 (1981).
26. J. D. Fournier and U. Frisch, *J. Méc. Théor. Appl. (France)* **2**, 699 (1983).
27. S. A. Molchanov, D. Surgailis, and W. A. Woyczynski, *Comm. Math. Phys.* **168**, 209 (1995).
28. E. A. Kuznetsov and S. S. Minaev, *Phys. Lett. A* **221**, 187 (1996).
29. S. Albeverio, A. A. Molchanov, and D. Surgailis, *Prob. Theory Relat. Fields* **100**, 457 (1994).
30. S. N. Gurbatov, *Phys. Rev. E* **61**, 2595 (2000).
31. S. N. Gurbatov, B. O. Enflo, and G. V. Pasmanik, *Acta Acustica* **85**, 181 (1999); **87**, 16 (2001).
32. Z. S. She, E. Aurell, and U. Frisch, *Comm. Math. Phys.* **148**, 623 (1992).
33. С. Н. Гурбатов, Г. В. Пасманик, *ЖЭТФ* **115**, 564 (1999).
34. S. N. Gurbatov, S. I. Simdyankin, E. Aurel, U. Frisch, and G. T. Tóth, *J. Fluid Mech.* **344**, 339 (1997).
35. M. R. Leadbetter, G. Lindgren, and H. Rootzen, *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer, Berlin (1983).
36. J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser, and A. S. Szalay, *Astrophys. J.* **304**, 15 (1986).