

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Э. В. Завитаев, А. А. Юшканов*, Ю. И. Яламов

Московский государственный областной университет
107005, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 февраля 2003 г.

Рассчитано сечение магнитного поглощения металлической частицы цилиндрической формы конечной длины. Рассмотрен общий случай, когда отношение поперечного размера частицы к ее длине может принимать произвольные значения. В качестве граничных условий задачи принято условие диффузного отражения электронов от внутренней поверхности частицы. Рассмотрены предельные случаи и проведено обсуждение полученных результатов.

PACS: 41.20.Jb

1. ВВЕДЕНИЕ

При взаимодействии с электромагнитным излучением малые металлические частицы проявляют свойства, отличные от свойств «массивных» образцов металла [1]. Это объясняется тем, что их линейный размер R сравним с длиной свободного пробега электронов Λ или меньше ее: $R < \Lambda$. Следовательно, отражение электронов от границы частицы начинает оказывать заметное влияние на их отклик на внешнее электромагнитное поле. Поэтому, когда выполняется условие $R < \Lambda$, одна из основных оптических характеристик — сечение поглощения — обнаруживает нетривиальную зависимость от отношения R/Λ . При комнатной температуре для чистых металлов с хорошей проводимостью (алюминий, медь, серебро и др.) значения Λ варьируются от 10 до 100 нм. Экспериментально исследуются частицы размером в несколько нанометров, так что ситуация $R < \Lambda$ достаточно часто реализуется.

Уравнения макроскопической электродинамики справедливы лишь в случае частиц большого размера: $R \gg \Lambda$. Теория Ми, описывающая взаимодействие электромагнитной волны с металлическими телами в рамках макроскопической электродинамики, в силу сказанного выше непригодна для выявления свойств малых металлических частиц.

В качестве аппарата, способного описывать от-

клик электронов на внешнее электромагнитное поле, может быть использована стандартная кинетическая теория электронов проводимости в металле [2]. В этом случае ограничения на соотношение между длиной свободного пробега электронов и размером образца не накладываются.

В работах [3, 4] была построена теория взаимодействия электромагнитного излучения со сферической частицей. В предельном случае, $R \ll \Lambda$, на низких частотах (дальний ИК-диапазон) этот результат совпадает с результатом, полученным в работах [5, 6]. В упомянутых работах применяется подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана для электронов проводимости в металле. Альтернативный подход к проблеме предложен и развивается в работах [7, 8] и др. В последнее время возрос интерес к проблеме взаимодействия электромагнитного излучения с несферическими частицами [9]. Отметим также работы, в которых предпринята попытка учета квантовомеханических эффектов в данной проблеме, что особенно существенно при низких температурах [10–12].

Ряд работ [13, 14] был посвящен описанию взаимодействия электромагнитного излучения с цилиндрической частицей. Но в этих работах рассматривались только сильно вытянутые частицы (длина частицы во много раз превышала ее радиус). Вопрос о поглощении цилиндра произвольной длины не поднимался.

*E-mail: yushkanov@mtu-net.ru

Целью настоящей работы является обобщение расчетов на случай, когда отношение радиуса цилиндрической частицы к ее длине может быть любым. В работе кинетическим методом получена функция распределения, описывающая линейный отклик электронов проводимости в металлическом цилиндре на переменное магнитное поле плоской электромагнитной волны. По найденной функции распределения проведен расчет сечения поглощения энергии магнитного поля волны.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается цилиндрическая частица немагнитного металла радиусом R и длиной L в поле плоской электромагнитной волны частоты ω , которая ограничена сверху частотами ближнего ИК-диапазона ($\omega < 2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$). Принимается, что направление магнитного поля в электромагнитной волне совпадает с осью цилиндра. Неоднородность внешнего поля волны и скин-эффект не учитываются (предполагается, что $R < \delta$, где δ — глубина скин-слоя). В рассматриваемом диапазоне частот вклад токов дипольной электрической поляризации в сечение поглощения будет мал по сравнению с вкладом вихревых токов, которые индуцируются внешним магнитным полем волны [3]. Поэтому действие внешнего электрического поля волны не учитывается.

Также используются общепринятые физические допущения: электроны проводимости рассматриваются как вырожденный ферми-газ, и с помощью уравнения Больцмана в приближении времени релаксации описывается их отклик на внешнее переменное магнитное поле. В граничных условиях принято, что отражение электронов от внутренней поверхности цилиндра происходит диффузно (т.е. электрон может отразиться под любым углом от 0 до 90° с равной вероятностью).

Опираясь на перечисленные выше допущения, мы можем описать процесс поглощения энергии электромагнитной волны следующим образом: однородное периодическое по времени магнитное поле волны $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t)$ вызывает появление в частице вихревого электрического поля. Оно определяется из уравнения индукции Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \left(\frac{1}{c} \right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1)$$

и может быть представлено в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2c} \left[\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] = \frac{\omega}{2ic} [\mathbf{r} \times \mathbf{H}_0] \exp(-i\omega t), \quad (2)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор (начало координат выбирается на оси частицы). Вихревое электрическое поле воздействует на электроны проводимости в частице и вызывает отклонение f_1 их функции распределения f от равновесной фермиевской функции f_0 :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \varepsilon = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}, \quad (3)$$

где \mathbf{v} — скорость электрона.

Это приводит к возникновению вихревого тока

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f \frac{2d^3(m\mathbf{v})}{h^3} = 2e \left(\frac{m}{h} \right)^3 \int \mathbf{v} f_1 d^3\mathbf{v}, \quad (4)$$

(где h — постоянная Планка), а также к диссипации в объеме частицы энергии. Энергия \bar{Q} , диссипируемая в единицу времени, равна [15]

$$\bar{Q} = \int (\text{Re } \mathbf{E})(\text{Re } \mathbf{j}) d^3r = \frac{1}{2} \text{Re} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^* d^3r, \quad (5)$$

здесь чертой обозначено усреднение по времени, а звездочкой — комплексное сопряжение.

В формуле (4) используется стандартная нормировка функции распределения f , при которой плотность электронных состояний равна $2/h^3$. Для равновесной функции $f_0(\varepsilon)$ далее используется ступенчатая аппроксимация [16]:

$$f_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_f - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_f, \\ 0, & \varepsilon_f < \varepsilon, \end{cases} \quad (6)$$

где $\varepsilon_f = mv_f^2/2$ — энергия Ферми.

Задача сводится к отысканию отклонения f_1 функции распределения электронов от равновесной функции f_0 , возникающего под действием вихревого поля (2). В линейном приближении по внешнему полю функция f_1 удовлетворяет кинетическому уравнению [2, 16]

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}, \quad (7)$$

где интеграл столкновений взят в приближении времени релаксации τ :

$$\left(\frac{df_1}{dt} \right)_s = -\frac{f_1}{\tau}. \quad (8)$$

Для однозначного определения функции f_1 необходимо задать для нее граничное условие на цилиндрической поверхности частицы. В качестве такового примем условие диффузного отражения электронов от поверхности [2]:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} |r_\perp| = R, \\ \mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp < 0, \end{cases} \quad (9)$$

где \mathbf{r}_\perp и \mathbf{v}_\perp — проекции соответственно радиуса-вектора электрона \mathbf{r} и его скорости \mathbf{v} на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. Решая уравнение (7) методом характеристик [14], получаем

$$f_1 = A (\exp(-\nu t) - 1) / \nu, \quad t \geq 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{\tau} - i\omega, \quad A = e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = \\ &= \frac{e\omega}{2ic} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) [\mathbf{v} \times \mathbf{r}] \cdot \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t). \end{aligned} \quad (11)$$

При этом величины ν и A постоянны вдоль траектории (характеристики). Параметр t имеет смысл времени движения электрона вдоль траектории от границы до точки \mathbf{r} со скоростью \mathbf{v} и определяется по-разному, в зависимости от места отражения электрона внутри частицы. Если электрон отражается от боковой стороны, то

$$t = \frac{\mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp + [(\mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp)^2 + (R^2 - r_\perp^2) \mathbf{v}_\perp^2]^{1/2}}{\mathbf{v}_\perp^2}. \quad (12)$$

Это ясно из следующих геометрических соображений. Используя очевидное векторное равенство $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$, где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор электрона в момент отражения от границы частицы, и проецируя его на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра, получаем $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_{0\perp} + \mathbf{v}_\perp t$, где векторы \mathbf{r}_\perp , $\mathbf{r}_{0\perp}$ и \mathbf{v}_\perp — компоненты исходных векторов в плоскости проекции. Возведя обе части последнего равенства в квадрат и разрешив полученное уравнение относительно t , приходим к формуле (12).

Соотношениями (10)–(12) полностью определено решение f_1 уравнения (7) с граничным условием (9), что позволяет рассчитать ток (4) и диссипируемую мощность (5).

3. УСЛОВИЯ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ОТ БОКОВОЙ СТОРОНЫ И ТОРЦОВ

Одним из самых важных мест при решении поставленной задачи является учет отражения электронов не только от боковой стороны, как в работах [13, 14], но и от торцов цилиндра. Получим эти условия.

Введем вектор \mathbf{b} , переписав равенство $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_{0\perp} + \mathbf{v}_\perp t$ в виде $\mathbf{r}_{0\perp} = \mathbf{r}_\perp - \mathbf{b}$. Возводя обе части последнего равенства в квадрат, получаем квадратное уравнение $b^2 - 2r_\perp b \cos \varphi - (R^2 - r_\perp^2) = 0$. Решив это уравнение относительно b , получим $b = r_\perp \cos \varphi + \sqrt{r_\perp^2 \cos^2 \varphi + R^2 - r_\perp^2}$. Здесь мы учли,

что $|r_{0\perp}| = R$ и $\mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{b} = r_\perp b \cos \varphi$, где угол φ — цилиндрическая координата в пространстве координат (см. ниже).

Электрон, находящийся на расстоянии z от одного из торцов, отражается от него, если время пролета электрона вдоль оси цилиндра $t_z = z/v_z$ будет меньше времени его пролета перпендикулярно оси цилиндра $t_\perp = b/v_\perp$, т. е. если

$$\frac{z}{v_z} < \frac{b}{v_\perp}. \quad (13)$$

Выражение (13) является одним из условий отражения электронов от торца. Другое условие определяется неравенством

$$\frac{-(L - z)}{v_z} < \frac{b}{v_\perp}. \quad (14)$$

Физически это означает, что электроны, находящиеся на расстоянии z от выбранного торца, но летящие в противоположную сторону, ударяются о другой торец. Знак «-» подчеркивает то обстоятельство, что проекция скорости электрона v_z в этом случае отрицательна.

Чтобы получить условия отражения электронов от боковой стороны, достаточно поменять знаки отношений в неравенствах (13) и (14).

4. СЕЧЕНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ

Сечение поглощения энергии внешнего магнитного поля определим, разделив среднюю диссипируемую мощность \bar{Q} (см. формулу (5)) на средний поток энергии в волне $cH_0^2/8\pi$:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{8\pi\bar{Q}}{cH_0^2} = \frac{8\pi}{cH_0^2} \frac{1}{2} \int \text{Re}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*) d^3r = \\ &= \frac{8\pi}{cH_0^2} \frac{1}{2} \text{Re} \int \left[e \int \mathbf{v} f_1 \frac{2d^3(mv)}{h^3} \right] \mathbf{E}^* d^3r. \end{aligned} \quad (15)$$

При вычислении интеграла (15) удобно перейти к цилиндрическим координатам как в пространстве координат (r_\perp , α , z ; полярная ось — ось z ; вектор \mathbf{H}_0 параллелен оси z), так и в пространстве скоростей (v_\perp , φ , v_z). Ось цилиндра совпадает с осью z . Поле (2) в цилиндрических координатах имеет лишь φ -компоненту:

$$\mathbf{E} = E_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad E_\varphi = \frac{i\omega}{2c} r_\perp H_0 \exp(-i\omega t). \quad (16)$$

Соответственно, и ток (4) обладает лишь φ -компонентой (линии тока являются замкнутыми окружностями с центрами на оси z в плоскостях, перпендикулярных оси z).

Тогда сечение поглощения

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \frac{8\pi}{cH_0^2} \operatorname{Re} \int \left[e \int v_\varphi \frac{e(\mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{v}_\varphi)}{\nu} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \times \right. \\ &\quad \times (\exp(-\nu t) - 1) \left. \frac{2d^3(mv)}{h^3} \right] E_\varphi^* d^3r = \\ &= \frac{1}{2} \frac{8\pi}{cH_0^2} 2e^2 \frac{m^3}{h^3} \operatorname{Re} \int \left[E_\varphi \int v_\varphi^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_f) \times \right. \\ &\quad \times (1 - \exp(-\nu t)) d^3v \left. \right] E_\varphi^* d^3r = \\ &= \frac{2\pi e^2 m^3 \omega^2}{c^3 \nu h^3} \operatorname{Re} \int \left[\int v_\varphi^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_f) \times \right. \\ &\quad \times (1 - \exp(-\nu t)) d^3v \left. \right] r_\perp^2 dr_\perp. \quad (17) \end{aligned}$$

Из-за того что в зависимости от места отражения электрона (торец или боковая сторона) параметр t выражается различным образом, а также различны пределы интегрирования по переменным z и v_\perp , сложное выражение (17) удобно разбить на две части: σ_1 и σ_2 , первая из которых учитывает вклад в поглощение при отражении электронов от боковой стороны, а вторая — вклад при их отражении от торцов цилиндра.

Для упрощения операции интегрирования и анализа результатов примем следующие обозначения:

$$\Gamma = R/L, \quad \xi = r_\perp/R, \quad (18)$$

$$\eta = \xi \cos \varphi + \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \varphi},$$

$$z(x, y) = \frac{\nu R}{v_f} = \frac{R}{\tau v_f} - i \frac{R\omega}{v_f} = \frac{R}{\Lambda} - i \frac{R\omega}{v_f} = x - iy. \quad (19)$$

Легко заметить, что

$$b = R\eta. \quad (20)$$

Далее приведем подробное вычисление каждой части выражения (17).

4.1. Вклад от боковой стороны

Пусть σ_1 — вклад в сечение поглощения при отражении электронов от боковой стороны.

Воспользовавшись свойствами δ -функции Дирака, получаем

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon - \varepsilon_f) &= \frac{2}{m} \delta(v_z^2 + v_\perp^2 - v_f^2) = \frac{2}{m} \delta[v_z^2 - (v_f^2 - v_\perp^2)] = \\ &= \frac{2}{m} \delta \left[\left(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2} \right) \left(v_z + \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{m \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}} \left[\delta \left(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta \left(v_z + \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

В силу симметрии задачи интегрирование по всему диапазону скоростей v_z заменяется интегрированием по положительному диапазону и результат удваивается.

Перепишем условие отражения от боковой стороны ($v_z > 0$) как $v_z < (z/b)v_\perp$ или $\sqrt{v_f^2 - v_\perp^2} < z/b$ (согласно определению δ -функции Дирака $\delta(v_z - \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}) = 0$, когда $v_z \neq \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2}$). Таким образом,

$$\frac{b}{v_\perp} \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2} < z. \quad (21)$$

Введем безразмерную скорость

$$\rho = v_\perp/v_f. \quad (22)$$

Из (21) следует, что $b\sqrt{1 - \rho^2}/\rho < z$, т. е. условием отражения электронов от боковой стороны будет условие

$$b\sqrt{1 - \rho^2}/\rho < z < L. \quad (23)$$

Чтобы пределы интегрирования удовлетворяли требованиям поставленной задачи, запишем дополнительное неравенство для нижнего предела интегрирования l_N по координате z :

$$l_N = \begin{cases} b\sqrt{1 - \rho^2}/\rho, & b\sqrt{1 - \rho^2}/\rho < L, \\ L, & b\sqrt{1 - \rho^2}/\rho > L. \end{cases} \quad (24)$$

Следовательно, нужно наложить дополнительное условие и при интегрировании по переменной ρ :

$$\begin{cases} \rho > \kappa, & b\sqrt{1 - \rho^2}/\rho < L, \\ \rho < \kappa, & b\sqrt{1 - \rho^2}/\rho > L, \end{cases} \quad (25)$$

где

$$\kappa = \frac{b}{\sqrt{b^2 + L^2}} = \frac{\eta\Gamma}{\sqrt{\eta^2\Gamma^2 + 1}}. \quad (26)$$

Учитывая обозначения (18), (19) и (22), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{3\pi n e^2 R^3 v_f}{m c^3} \operatorname{Re} \frac{y^2}{z(x, y)} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \times \\ &\quad \times \int_\kappa^1 \int_{b\sqrt{1 - \rho^2}/\rho}^L \left(1 - \exp \left(-\frac{\eta z(x, y)}{\rho} \right) \right) \times \\ &\quad \times \frac{\rho^3}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho dz, \quad (27) \end{aligned}$$

где $n = 2(m/h)^3 4\pi v_f^3/3$ — концентрация электронов проводимости в металлах. Здесь мы сразу проинтегрировали по углу α , пользуясь тем, что подынтегральная функция от него не зависит, и по переменной v_z с учетом правила интегрирования выражений, содержащих δ -функцию Дирака.

Заметим, что, строго говоря, выражение (27) должно содержать два слагаемых, но с учетом (24) второе слагаемое суммы равно нулю (так как интеграл по переменной z берется в симметричных пределах).

Проинтегрировав по координате z , получаем $\sigma_1 = \sigma_0 F_1(x, y, \Gamma)$, где

$$\sigma_0 = \frac{3\pi n e^2 R^3 v_f L}{m c^3},$$

$$F_1(x, y, \Gamma) = \operatorname{Re} \frac{y^2}{z(x, y)} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \times$$

$$\times \int_{\kappa}^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 - \exp\left(-\frac{\eta z(x, y)}{\rho}\right) \right) d\rho +$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{y^2 \Gamma}{z(x, y)} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \times$$

$$\times \int_{\kappa}^1 \eta \rho^2 \left(\exp\left(-\frac{\eta z(x, y)}{\rho}\right) - 1 \right) d\rho. \quad (28)$$

4.2. Вклад от торцов

Обозначим вклад в сечение поглощения при отражении электронов от торцов через σ_2 .

Условие отражения электронов от одного из торцов ($v_z > 0$) имеет вид

$$0 < z < b\sqrt{1-\rho^2}/\rho. \quad (29)$$

Чтобы пределы интегрирования удовлетворяли требованиям поставленной задачи, запишем дополнительное неравенство для верхнего предела интегрирования l_V по координате z :

$$l_v = \begin{cases} b\sqrt{1-\rho^2}/\rho, & b\sqrt{1-\rho^2}/\rho < L, \\ L, & b\sqrt{1-\rho^2}/\rho > L. \end{cases} \quad (30)$$

Следовательно, снова приходим к дополнительному условию при интегрировании по переменной ρ :

$$\begin{cases} \rho > \kappa, & b\sqrt{1-\rho^2}/\rho < L, \\ \rho < \kappa, & b\sqrt{1-\rho^2}/\rho > L. \end{cases} \quad (31)$$

Учитывая обозначения (18), (19) и (22), получаем

$$\sigma_2 = \frac{3\pi n e^2 R^3 v_f}{m c^3} \left[\operatorname{Re} \frac{y^2}{z(x, y)} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \times \right.$$

$$\times \int_{\kappa}^1 \int_0^{b\sqrt{1-\rho^2}/\rho} \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\times \left(1 - \exp\left(-\frac{\nu z}{v_f \sqrt{1-\rho^2}}\right) \right) d\rho dz +$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{y^2}{z(x, y)} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \times$$

$$\times \int_0^{\kappa} \int_0^L \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\times \left(1 - \exp\left(-\frac{\nu z}{v_f \sqrt{1-\rho^2}}\right) \right) d\rho dz \Big]. \quad (32)$$

Здесь мы снова сразу проинтегрировали по углу α , пользуясь тем, что подынтегральная функция от него не зависит, и по переменной v_z с учетом правила интегрирования выражений, содержащих δ -функцию Дирака (напомним, что время пролета электрона до одного из торцов определяется по формуле $t = z/v_z$).

Проинтегрировав теперь по координате z , получим $\sigma_2 = \sigma_0 F_2(x, y, \Gamma)$, где

$$F_2(x, y, \Gamma) =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{y^2}{z(x, y)} \left[\frac{\Gamma}{z(x, y)} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \times \right.$$

$$\times \int_{\kappa}^1 \rho^3 \exp\left(-\frac{\eta z(x, y)}{\rho} - 1\right) d\rho \Big] +$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{y^2}{z(x, y)} \left[\frac{\Gamma}{z(x, y)} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \times \right.$$

$$\times \int_0^{\kappa} \rho^3 \left(\exp\left(-\frac{z(x, y)}{\Gamma \sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1 \right) d\rho \Big] +$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{y^2}{z(x, y)} \left[\Gamma \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_{\kappa}^1 \eta \rho^2 d\rho + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{\kappa} \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho \right]. \quad (33)$$

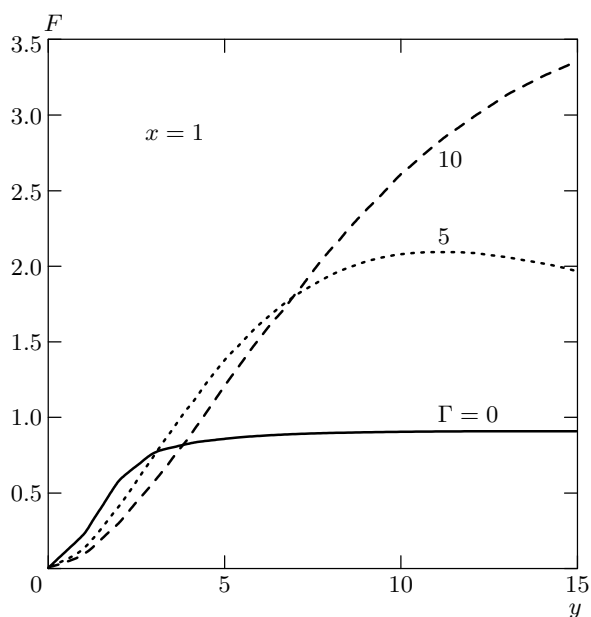


Рис. 1. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от безразмерной частоты y при фиксированном значении безразмерной обратной длины свободного пробега $x = 1$ и различных значениях отношения радиуса частицы к ее длине Γ

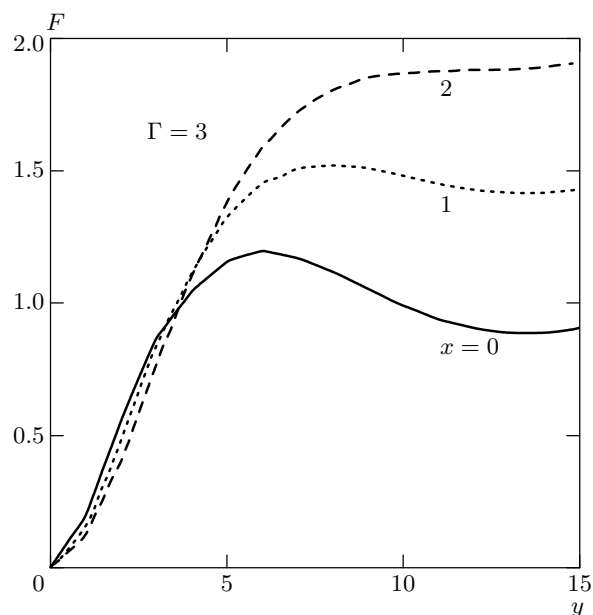


Рис. 2. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от безразмерной частоты y при фиксированном значении отношения радиуса частицы к ее длине $\Gamma = 3$ и различных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега x

Безразмерное сечение поглощения

$$F(x, y, \Gamma) = F_1(x, y, \Gamma) + F_2(x, y, \Gamma). \quad (34)$$

Численный расчет функции $F(x, y, \Gamma)$ представлен на рис. 1–5.

5. ПОГЛОЩЕНИЕ В НИЗКОЧАСТОТНОМ РЕЖИМЕ

Теперь остановимся подробно на случае, когда частота внешнего поля ω и частота столкновений электронов в объеме металла $1/\tau$ малы по сравнению с частотой столкновений электронов с поверхностью частицы. Другими словами, рассмотрим случай $|z| \ll 1$.

В этом приближении экспоненты, входящие в выражения $F_1(x, y, \Gamma)$ и $F_2(x, y, \Gamma)$, можно разложить по известной формуле Тейлора. После подстановки разложений экспонент в интегралы и алгебраических преобразований выясняем, что выражение для $F_2(x, y, \Gamma)$ имеет одно слагаемое, а интегралы, входя-

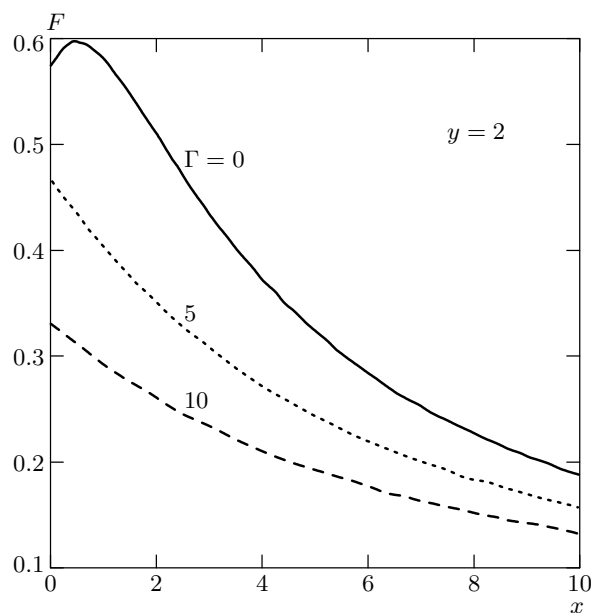


Рис. 3. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от безразмерной обратной длины свободного пробега x при фиксированном значении безразмерной частоты $y = 2$ и различных значениях отношения радиуса частицы к ее длине

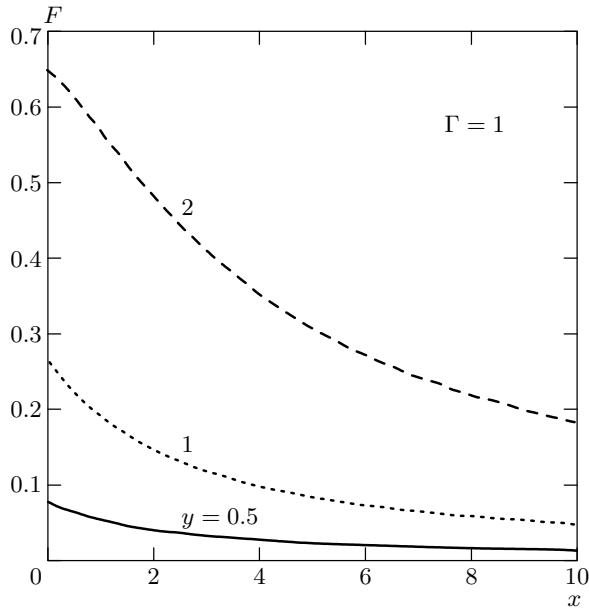


Рис. 4. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от безразмерной обратной длины свободного пробега x при фиксированном значении отношения радиуса частицы к ее длине $\Gamma = 1$ и различных значениях безразмерной частоты

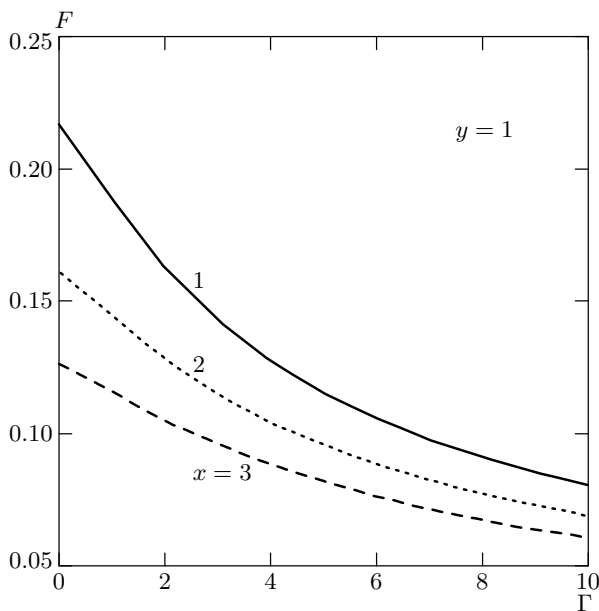


Рис. 5. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от отношения радиуса частицы к ее длине Γ при фиксированном значении безразмерной частоты $y = 1$ и различных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега x

щие в выражение $F_1(x, y, \Gamma)$, заметно упрощаются. Тогда

$$F_1(x, y, \Gamma) = y^2 \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_{\kappa}^1 \frac{\eta \rho^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho - y^2 \Gamma \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_{\kappa}^1 \eta^2 \rho d\rho, \quad (35)$$

$$F_2(x, y, \Gamma) = \frac{y^2}{2\Gamma} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{\kappa} \frac{\rho^3}{1 - \rho^2} d\rho. \quad (36)$$

После интегрирования по переменной ρ выражения (35) и (36) принимают следующий вид:

$$F_1(x, y, \Gamma) = \frac{y^2}{2} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \eta \sin^2 \varphi \times \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{\eta \Gamma}{\sqrt{\eta^2 \Gamma^2 + 1}} \right) \right] d\varphi, \quad (37)$$

$$F_2(x, y, \Gamma) = -\frac{y^2}{2\Gamma} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \times \left[\ln \left(\sqrt{1 - \kappa^2} \right) + \frac{\kappa^2}{2} \right] d\varphi. \quad (38)$$

Для сечения поглощения σ получаем

$$\sigma = \sigma_0 F(x, y, \Gamma) = \sigma_0 \frac{y^2}{2} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \eta \sin^2 \varphi d\varphi \times \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{\eta \Gamma}{\sqrt{\eta^2 \Gamma^2 + 1}} \right) \right] d\varphi - \frac{y^2}{2\Gamma} \times \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \left[\ln \left(\sqrt{1 - \kappa^2} \right) + \frac{\kappa^2}{2} \right] d\varphi. \quad (39)$$

Из этого выражения видно, что особенностью сечения поглощения в низкочастотном пределе является его квадратичная зависимость от безразмерной частоты внешнего поля y , см. [13]. Новым, по сравнению с ранее полученными результатами, является учет зависимости сечения поглощения от отношения радиуса цилиндра к продольному размеру (сечение поглощения зависит от Γ).

Рассмотрим теперь возможные предельные случаи.

а) В случае бесконечного цилиндра ($\Gamma \rightarrow 0$)

$$\sigma = \frac{2\pi^2 ne^2 R^3 v_f L}{5mc^3} y^2. \quad (40)$$

Поскольку реальные частицы имеют конечный радиус R , можно найти поправку к поглощению. Действительно, когда $\Gamma \ll 1$, $\kappa \approx \eta\Gamma$ и $\arcsin \kappa \approx \eta\Gamma$ (вклад второго интеграла, входящего в (39), пренебрежимо мал ввиду малости κ), тогда

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \frac{y^2}{2} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \eta \sin^2 \varphi d\varphi \left[\frac{\pi}{2} - \eta\Gamma \right] d\varphi = \\ &= \frac{2}{15} \pi \sigma_0 y^2 \left(1 - \frac{5}{8} \Gamma \right). \end{aligned} \quad (41)$$

б) Найдем поправку к поглощению в случае диска, когда $\Gamma \gg 1$. При этом

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{\eta\Gamma}{\sqrt{\eta^2\Gamma^2 + 1}} \right) &= \\ = \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{\eta^2\Gamma^2 + 1}} \right) &\approx \arcsin \left(\frac{1}{\eta\Gamma} \right) \approx \frac{1}{\eta\Gamma}, \end{aligned}$$

$$\sqrt{1 - \kappa^2} = \frac{\kappa}{\eta\Gamma} \approx \frac{1}{\eta\Gamma}.$$

Следовательно, проведя интегрирование, получим

$$\sigma = \sigma_0 \frac{y^2}{2\Gamma} \left[\frac{\pi}{8} + \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \ln(\eta\Gamma) d\varphi \right]. \quad (42)$$

Доминирующим в этом выражении является член, содержащий $\ln \Gamma$ ($\Gamma \gg 1$), поэтому

$$\sigma \approx \sigma_0 \frac{y^2}{8} \pi \frac{\ln \Gamma}{\Gamma}. \quad (43)$$

Логарифмическая особенность в формуле для сечения поглощения (43) непосредственно связана с известной логарифмической особенностью проводимости тонкого слоя металла [2].

6. ПОГЛОЩЕНИЕ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ПРЕДЕЛЕ

В случае, когда $|z| \gg 1$ и $|z|/\Gamma \gg 1$, существует асимптотика выражения (34). Пренебрегая членами с экспонентами ввиду их быстрого затухания и выполнив алгебраические преобразования, приходим к

следующему выражению для безразмерного сечения поглощения $F(z)$:

$$\begin{aligned} F(z) &= \operatorname{Re} \frac{y^2}{z(x, y)} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \times \\ &\times \int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho - \operatorname{Re} \frac{y^2}{z(x, y)} \frac{\Gamma}{z(x, y)} \times \\ &\times \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho. \end{aligned} \quad (44)$$

Это выражение легко интегрируется:

$$F(z) = \operatorname{Re} \frac{y^2}{z(x, y)} \frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{3}{8} \frac{\Gamma}{z(x, y)} \right). \quad (45)$$

В результате проведенных преобразований получаем следующее выражение для сечения поглощения:

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \sigma_0 \operatorname{Re} \left(\frac{y^2}{z(x, y)} \frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{3}{8} \frac{\Gamma}{z(x, y)} \right) \right) = \\ &= \sigma_0 \frac{\pi}{6} y^2 \left[\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{3}{8} \frac{\Gamma(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Первое слагаемое в этом выражении соответствует классическому результату (формула Друде) [16], который справедлив при любых Γ , если выполняется условие $|z|/\Gamma \gg 1$.

Рассмотрим случай $y \gg x$. Тогда из анализа формулы (46) следует, что если $x \gg \Gamma$, то в поглощении доминирует первый член. В противном случае, когда $\Gamma \gg x$, доминирует второй член. Аналогичная ситуация возникает и в случае, когда $x \gg y$.

В работе [9] с использованием ряда упрощений получено выражение, описывающее сечение поглощения сильно вытянутого эллипсоида вращения (фактически бесконечного цилиндра) в высокочастотном пределе (при значениях $x \ll 1$):

$$\sigma_{el} = \frac{27}{128} \frac{\pi^2 e^2 n v_f R V}{2 m c^3}, \quad (47)$$

где V — объем эллипсоида. При этом авторы работы [9] не учитывают объемные столкновения электронов внутри частицы, ограничиваясь рассмотрением лишь поверхностных столкновений.

Найдем отношение удельных (на единицу объема) сечений поглощения (46) и (47) в высокочастотном пределе (вторым членом в (46) можно пренебречь). Имеем

$$\frac{\sigma(z)}{\sigma_{el}} = 1.13. \quad (48)$$

Таким образом, точный кинетический расчет дает поправку к результату работы [9], равную 13%.

7. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Формула (34) позволяет рассчитать безразмерное сечение поглощения $F(x, y, \Gamma)$ цилиндрической частицы и сечение поглощения электромагнитного излучения

$$\sigma = \sigma_0 F(x, y). \quad (49)$$

Варьируя значения Γ , получаем поглощение цилиндра различной степени вытянутости.

Когда $\Gamma \rightarrow 0$ ($\kappa \rightarrow 0$), из (34) следует, что

$$F(x, y) = y^2 \operatorname{Re} \int_0^1 \xi^3 d\xi \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times \frac{1}{z} \left(1 - \exp\left(-\frac{z\eta}{\rho}\right) \right) \sin^2 \varphi d\rho d\varphi. \quad (50)$$

Это выражение совпадает с результатом, полученным в работе [14] для бесконечного цилиндра.

Безразмерное сечение поглощения F сложным образом зависит от комбинации трех безразмерных величин: x, y, Γ .

На рис. 1 и 2 представлены зависимости безразмерного сечения поглощения F от безразмерной частоты внешнего поля y при заданном радиусе частицы и постоянном отношении его к длине частицы. Учет того обстоятельства, что длина частицы конечна, приводит к результатам, отличающимся от результатов, полученных в работе [14]. Амплитуда и период частотной зависимости безразмерного сечения поглощения F значительно возрастают. Это связано с тем, что кроме отражения электронов от боковой поверхности частицы в данной работе рассмотрено их отражение от торцов. Из-за этого возникает дополнительный вклад в поглощение частицей энергии внешнего электромагнитного поля. С увеличением радиуса частицы осцилляции сечения поглощения сглаживаются. Увеличение радиуса частицы (рис. 1), а также увеличение отношения радиуса к длине (рис. 2) приводят к увеличению сечения поглощения.

На рис. 3 и 4 приведены графики зависимости безразмерного сечения поглощения F от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x . При данной частоте поглощение больше у более вытянутой частицы (рис. 3). Увеличение частоты, в свою очередь, приводит к увеличению сечения поглощения. При дальнейшем возрастании радиуса частицы поглощение уменьшается на всех частотах и достигает своего асимптотического значения. При этом все три кривые сливаются в одну. Если отношение радиуса частицы к ее длине постоянно (рис. 4), то поглощение уменьшается с уменьшением частоты

внешнего поля. С ростом Γ поглощение при тех же частотах становится несколько меньше.

В данной работе, кроме зависимости безразмерного сечения поглощения F от x и y , добавляется его зависимость от отношения радиуса частицы к ее длине, Γ (рис. 5). С увеличением радиуса частицы (при постоянной частоте y) сечение поглощения уменьшается, так как решающую роль в поглощении имеет взаимодействие электронов с торцами цилиндра, а вклад от боковой стороны невелик. При более высокой частоте y (радиус частицы при этом не меняется) сечение поглощения больше, так как с возрастанием частоты напряженность электрического поля тоже возрастает (напряженность вихревого электрического поля прямо пропорциональна частоте внешнего поля).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Петров, *Физика малых частиц*, Наука, Москва (1984), гл. 7.
2. Дж. Займан, *Электроны и фононы*, Москва (1962), гл. 11.
3. А. Г. Лесскис, В. Е. Пастернак, А. А. Юшканов, *ЖЭТФ* **83**, 310 (1982).
4. А. Г. Лесскис, А. А. Юшканов, Ю. И. Яламов, *Поверхность* № 11, 115 (1987).
5. Н. J. Trodahl, *Phys. Rev. B* **19**, 1316 (1979).
6. Н. J. Trodahl, *J. Phys. C: Sol. St. Phys.* **15**, 7245 (1982).
7. Е. А. Бондарь, *Опт. и спектр.* **75**, 837 (1993).
8. Е. А. Бондарь, *Опт. и спектр.* **80**, 89 (1996).
9. П. М. Томчук, Б. П. Томчук, *ЖЭТФ* **112**, 661 (1997).
10. Л. П. Горьков, Г. М. Элиашберг, *ЖЭТФ* **48**, 1407 (1955).
11. Э. А. Маныкин, П. П. Полуэктов, Ю. Г. Рубежный, *ЖЭТФ* **70**, 2117 (1976).
12. А. А. Лушников, В. В. Максименко, А. Я. Симонов, в сб.: *Диспергирующие металлические пленки*, изд-во АН УССР, Киев (1976), с. 72.
13. Э. В. Завитаев, А. А. Юшканов, Ю. И. Яламов, *ЖТФ* **71**, 114 (2001).
14. Э. В. Завитаев, А. А. Юшканов, Ю. И. Яламов, *Опт. и спектр.* **92**, 851 (2002).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992), с. 664.
16. У. Харрисон, *Теория твердого тела*, Мир, Москва (1972).