

# АТОМ ВОДОРОДА В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ И ЭФФЕКТ ЗЕЛЬДОВИЧА

*Б. М. Карнаков* \*

*Московский инженерно-физический институт  
115409, Москва, Россия*

*В. С. Попов* \*\*

*Институт теоретической и экспериментальной физики  
117218, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 апреля 2003 г.

Рассмотрена задача об атоме водорода в сверхсильном магнитном поле  $B \gg B_a = 2.35 \cdot 10^9$  Гс. Для состояний с различными квантовыми числами  $n_p$  и  $m$  получены аналитические формулы, описывающие энергетический спектр этого атома. Сравнение с имеющимися расчетами показывает их высокую точность в области  $B \gg B_a$ . Отмечается, что полученные формулы указывают на проявление эффекта Зельдовича, т. е. перестройки атомного спектра под влиянием сильного искажения кулоновского потенциала на малых расстояниях. Обсуждаются релятивистские поправки к энергии уровней, роль которых возрастает вместе с полем и становится существенной при  $B \gtrsim 10^{14}$  Гс. Предлагаются параметры, в терминах которых эффект Зельдовича имеет наиболее простой вид. Анализ результатов прецизионных численных расчетов энергетического спектра атома водорода в постоянном магнитном поле показывает, что в области сверхсильных полей  $B \gtrsim 5 \cdot 10^{11}$  Гс в спектре атомных уровней наблюдается эффект Зельдовича. Поля такой величины существуют в нейтронных звездах и, возможно, в магнитных белых карликах. Установлены нижние границы полей  $B_{min}$ , необходимых для проявления этого эффекта. Обсуждаются некоторые свойства атомных состояний в сверхсильном магнитном поле, в том числе их средний радиус и квадрупольный момент. Вычислены вероятности электрических дипольных переходов между нечетными атомными уровнями и глубоким основным уровнем.

PACS: 03.65.-w, 32.30.-r

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В системах, для которых потенциал взаимодействия разбивается на две части с сильно несоизмеримыми радиусами, при определенных условиях возникает своеобразный эффект перестройки энергетического спектра, впервые отмеченный в работе [1] и получивший в дальнейшем название эффекта Зельдовича. В настоящей работе показано, что этот эффект проявляется в спектре уровней атома водорода, находящегося в экстремально сильном магнитном поле напряженностью  $B \gg B_a = 2.35 \cdot 10^9$  Гс. Данная задача представляет большой интерес для астрофизики, физики твердого тела и атомной фи-

зики и рассматривалась многими авторами, начиная с пионерской работы Шиффа и Снайдера [2]. Поля такой величины характерны для нейтронных звезд [3, 4] и магнитных белых карликов. Опубликованы десятки работ, в которых энергетический спектр такого атома рассчитывался различными численными методами (см., например, [5–14] и указанные там ссылки).

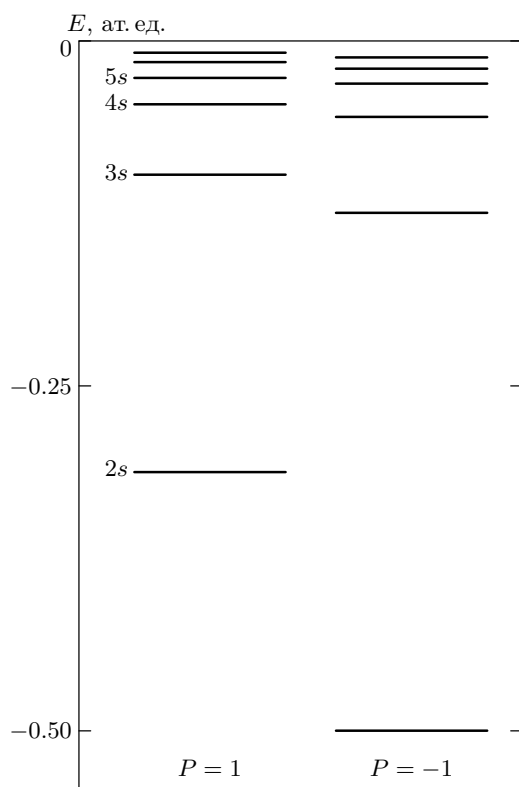
Тем не менее, насколько известно авторам, в литературе отсутствуют корректные аналитические выражения для энергетического спектра атома водорода в сильном магнитном поле. Известная формула для энергии связи основного состояния,

$$\varepsilon_0(B) \equiv \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m_e} = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \ln^2 \frac{B}{B_a} \quad (1.1)$$

[15, § 112], даже при значениях  $B \sim 10^{13}$  Гс, т. е. на

\*E-mail: karnak@theor.mephi.ru

\*\*E-mail: markina@heron.itep.ru



**Рис. 1.** Вид энергетического спектра атома водорода при  $\mathcal{H} = 3120$ , или  $B \approx 0.73 \cdot 10^{13}$  Гс. Показаны серии четных и нечетных уровней,  $P = \pm 1$ . Уровень  $2s$  находится посередине между нечетными уровнями с  $n = 1$  и  $2$ , энергия связи основного уровня  $1s$  равна  $6.98$  ат. ед.  $\approx 190$  эВ

границе применимости нерелятивистского приближения, лишь по порядку величины определяет значения  $\epsilon_0$ , которые в три раза превосходят результат точного численного расчета. Более того, обратная к (1.1) зависимость

$$B(\lambda) = B_a \exp(\lambda a_B), \tag{1.2}$$

представляющая особый интерес для астрофизических приложений, вообще является неудовлетворительной, так как дает на два порядка заниженные значения  $B(\lambda)$ . Исключением является работа Хасегавы и Ховарда [16], в которой для основного состояния атома водорода получено выражение, асимптотически точное в пределе  $B \rightarrow \infty$ . Однако и эта формула имеет невысокую точность при  $B \lesssim 10^{15}$  Гс (см. ниже табл. 1) и неприменима для возбужденных состояний.

Такое несоответствие связано с тем, что как вывод формулы (1.1), так и некоторые замечания о свойствах спектра возбужденных состояний атома

водорода, приведенные в [15], требуют существенных уточнений. В частности, оказывается, что четные и нечетные (по отношению к отражению координаты электрона вдоль магнитного поля) уровни описываются совершенно разными выражениями и сильно сдвинуты относительно друг друга, что хорошо видно на рис. 1. При этом в четных состояниях возникает перестройка спектра атома водорода,  $E_n^{(0)} = -m_e e^4 / 2\hbar^2 n^2$ , под влиянием искажения кулоновского потенциала на малых расстояниях  $r \lesssim r_0 \ll a_B$ . Возможность проявления этого эффекта ставит довольно жесткие условия к характеру искажения кулоновского потенциала: для медленных частиц оно должно иметь резонансный характер [1].

Кратко опишем содержание работы. В разд. 2 получены формулы, описывающие энергетический спектр нерелятивистского атома водорода, находящегося в сверхсильном магнитном поле. Сравнение их с имеющимися численными расчетами для состояний с различными значениями магнитного квантового числа, проведенное в разд. 3, показывает высокую точность этих асимптотических формул в области полей  $B \gg B_a$ . В разд. 4 обсуждаются релятивистские поправки к спектру уровней.

В разд. 5 рассмотрены общие свойства эффекта Зельдовича и указаны переменные, в терминах которых он имеет наиболее естественный вид. Анализ численных расчетов энергетического спектра атома водорода в магнитном поле выполнен в разд. 6. Пересчет полученных в работах [9–11] энергий связи нижних уровней на квантовые дефекты  $\delta_{nl}$  однозначно свидетельствует о том, что в полях  $B \gtrsim 5 \cdot 10^{11}$  Гс в спектре атомных уровней присутствует эффект Зельдовича (который фактически содержится в результатах численных расчетов, но не был замечен их авторами). Установлена нижняя граница полей  $B_{min}$ , необходимых для возникновения этого эффекта. В разд. 7 вычислены средние радиусы  $ns$ -состояний, квадрупольный момент основного уровня и вероятности электрических дипольных переходов на основной уровень  $1s$  при условии  $B \gg B_{min}$ . В заключительном разд. 8 обсуждаются особенности эффекта Зельдовича в сверхсильном магнитном поле и в трехмерном потенциале, связь между уравнениями (2.13) и (5.1), и др. В Приложении вынесены подробности вычислений, обсуждение асимптотики энергии основного состояния при  $\mathcal{H} \rightarrow \infty$  и специфики одномерного атома водорода, а также некоторые формулы, связанные с функцией Уиттекера.

В статье используются следующие обозначения:  $\epsilon = \hbar^2 \lambda^2 / 2m_e$  — энергия связи уровня,  $a_B =$

$= \hbar^2/m_e e^2$  — радиус Бора,  $B_a = e^3 m_e^2 c / \hbar^3$  — атомная единица магнитного поля,  $\mathcal{H} = B/B_a$  — приведенное поле,  $B_{cr} = m_e^2 c^3 / e \hbar = \alpha^{-2} B_a = 4.414 \cdot 10^{13}$  Гс — «критическое», или швингеровское поле [17],  $m = 0, \pm 1, \dots$  — магнитное квантовое число,  $\omega_L = eB/m_e c$  — циклотронная, или ларморовская, частота,  $a_H = \sqrt{\hbar/m_e \omega_L} = \sqrt{\hbar c / e B}$  — магнитная длина, или радиус Ландау, и далее, как правило,  $\hbar = m_e = e = 1$  (атомные единицы Хартри, в которых  $c = \alpha^{-1} = 137$  — скорость света).

Излагаемые ниже результаты частично анонсированы в [18, 19].

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА АТОМА ВОДОРОДА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Выбирая векторный потенциал внешнего магнитного поля в виде  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{B} \times \mathbf{r}]$  и направляя ось  $z$  вдоль  $\mathbf{B}$ , имеем гамильтониан рассматриваемой системы в нерелятивистском приближении:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\Delta_{\perp} + \frac{1}{8}\mathcal{H}^2 \rho^2 + \frac{1}{2}\mathcal{H}(\hat{l}_z + \hat{\sigma}_z) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \quad (2.1)$$

В случае сверхсильного магнитного поля, когда  $a_H \ll a_B$ , для решения уравнения Шредингера может быть использовано адиабатическое приближение [2, 15]. При этом решения записываются в виде

$$\Psi_{n n_{\rho} m \sigma_z}(\mathbf{r}, \sigma) = R_{n_{\rho} m}(\rho) \chi_n(z) \varphi_{\sigma_z}(\sigma). \quad (2.2)$$

Здесь  $R_{n_{\rho} m}(\rho)$  — известные функции поперечного движения электрона в чисто магнитном поле [15],  $\chi_n(z)$  — волновая функция продольного движения электрона, а  $\varphi_{\sigma_z}(\sigma)$  — спиновая часть волновой функции. Спектр связанных состояний гамильтониана представляется в виде

$$E_{n n_{\rho} m \sigma_z} = \left( n_{\rho} + \frac{1}{2}(|m| + m + \sigma_z + 1) \right) \mathcal{H} - \frac{1}{2} \lambda_{n|m|n_{\rho}}^2, \quad (2.3)$$

где  $\sigma_z = \pm 1$  — удвоенная проекция спина электрона на направление магнитного поля,  $n$  — квантовое число для продольного движения, а последнее слагаемое определяет сдвиг соответствующего уровня Ландау, обязанный действию кулоновского потенциала притяжения; для основного уровня  $n_{\rho} = m = 0$ ,

$\sigma_z = -1$  и  $E_0 = -\lambda^2/2$ . Этот сдвиг находится из уравнения Шредингера для продольной части волновой функции,

$$\left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + U_{eff}(|z|) + \frac{\lambda^2}{2} \right\} \chi_n(z) = 0, \quad (2.4)$$

в котором эффективная (усредненная по быстрому поперечному движению электрона) потенциальная энергия дается выражением [2, 15]

$$U_{eff}(|z|) = - \iint \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} |R_{n_{\rho} m}(\rho)|^2 d^2 \rho. \quad (2.5)$$

Отметим следующие свойства эффективного потенциала (конкретные выражения для него зависят от квантовых чисел  $n_{\rho}$  и  $|m|$  поперечного движения).

1) В области  $|z| \lesssim a_H \ll a_B$  по порядку величины  $U_{eff}(|z|) \sim 1/a_H$ . При этом  $U_{eff} a_H^2 \sim a_H \ll 1$ , так что на таких расстояниях эффективный потенциал представляет собой «мелкую» одномерную потенциальную яму.

2) При  $|z| \gg a_H$  эффективный потенциал имеет уже кулоновский вид.

3) Отметим также, что  $U_{eff}(|z|) + 1/|z| > 0$ , т. е. кривая эффективной потенциальной энергии расположена выше кулоновской.

Приведем эффективный потенциал для состояний с  $m = n_{\rho} = 0$ ,

$$U_{eff}(|z|) = -\frac{\sqrt{2}}{a_H} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|z|x}{a_H} - x^2\right) dx = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_H^{-1} \operatorname{erfc}\left(\frac{|z|}{\sqrt{2} a_H}\right) \exp\left(\frac{z^2}{2 a_H^2}\right), \quad (2.6)$$

и его предельные выражения,

$$U_{eff}(|z|) = \begin{cases} -\sqrt{\pi/2} a_H^{-1} + |z|/a_H^2, & z \ll a_H, \\ -1/|z| + a_H^2/|z|^3, & z \gg a_H. \end{cases} \quad (2.6')$$

Решения уравнения (2.4) имеют определенную четность  $P = \pm 1$  относительно отражения  $z \rightarrow -z$ . Начнем со случая четных состояний, для которых  $\chi'(0) = 0$ .

### 2.1. Спектр четных уровней

Поскольку эффективный потенциал в уравнении (2.4) на расстояниях  $|z| \lesssim a_H \ll 1$  представляет собой мелкую одномерную потенциальную яму, волновые функции четных состояний на таких расстояниях почти не изменяются, и в нулевом приближении,

рассматривая слагаемые с  $U_{eff}$  и  $\lambda^2$  как возмущение, имеем  $\chi(z) = 1, \chi'(z) = 0$ . Более точное значение  $\chi'(z)$  может быть получено из (2.4), если опустить член с энергией связи, заменить  $\chi(z)$  единицей в слагаемом с эффективным потенциалом и проинтегрировать получающееся уравнение по  $z$ . В результате имеем

$$\chi'(z) = 2 \int_0^z U_{eff}(|z|) dz. \quad (2.7)$$

Для дальнейшего нам потребуются значения  $\chi'(z)$  на расстояниях  $a_H \ll z \ll a_B$ , где эффективный потенциал является уже кулоновским. Принимая во внимание зависимость функций  $R_{n\rho m}(\rho)$  от  $\rho$  (полиномы по переменной  $\rho^2$ , умноженные на  $\rho^{|m|} \exp(-\rho^2/4a_H^2)$ ) и используя значение интеграла

$$\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \ln x dx = \Gamma'(s) = \Gamma(s)\psi(s), \quad (2.8)$$

где  $\psi(z)$  — логарифмическая производная гамма-функции, замечаем, что производная  $\chi'(z)$  на указанных выше расстояниях имеет вид<sup>1)</sup>

$$\chi'(z) \approx -2 \ln \frac{z}{a_H} + A_{|m|n\rho}, \quad (2.9)$$

причем слагаемое  $A_{|m|n\rho}$  не зависит от  $B$ . В частности, используя выражение для волновых функций безузельных в поперечном направлении состояний (с  $n_\rho = 0$ ),

$$R_{0m}(\rho) = \left\{ \pi (2a_H^2)^{(1+|m|)} (|m|!) \right\}^{-1/2} \rho^{|m|} \times \exp\left(im\varphi - \frac{\rho^2}{4a_H^2}\right), \quad (2.10)$$

получаем

$$A_{|m|0} = -\ln 2 + \psi(1 + |m|). \quad (2.11)$$

Напомним, что  $\psi(1) = -\gamma$ , где  $\gamma = 0.5772\dots$  — постоянная Эйлера, и  $\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n 1/k$  для  $n = 1, 2, 3, \dots$  [20].

С другой стороны, экспоненциально убывающее на больших расстояниях,  $|z| \rightarrow \infty$ , решение уравнения (2.4) с чисто кулоновским потенциалом описывается функцией Уиттекера:

$$\chi(z) = \text{const} \cdot W_{\nu, 1/2}(2|z|/\nu), \quad \nu = 1/\lambda, \quad (2.12)$$

<sup>1)</sup> Сначала следует проинтегрировать  $1/\sqrt{z^2 + \rho^2}$  в эффективном потенциале (2.5) по  $z$  и перейти к пределу  $|z| \rightarrow \infty$ , опуская убывающие члены разложения. После этого интеграл с  $\ln z$  вычисляется элементарно, а не зависящий от  $z$  интеграл с  $\ln \rho$  выражается через интегралы вида (2.8). Заметим также, что хотя в (2.9)  $\chi'(z) \gg 1$ , тем не менее по-прежнему  $\chi(z) \approx 1$  и  $|a_H \chi'(z)| \ll 1$ .

см. Приложение А. На малых расстояниях,  $|z| \ll 1$ , это решение имеет вид (А.3) с  $x = 2\lambda|z|$ . Сшивая формулы (2.9) и (2.12) с учетом (А.4), получаем уравнение для спектра четных состояний:

$$\ln \mathcal{H} = \lambda + 2 \left[ \ln \lambda + \psi \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) + 2\gamma + \ln 2 \right] + A_{|m|n\rho}. \quad (2.13)$$

Подчеркнем, что это уравнение непосредственно определяет зависимость магнитного поля от  $\lambda$  для четных уровней, причем выражение  $\exp\{-A_{|m|n\rho}\} \mathcal{H}(\lambda_{n|m|n\rho})$  является универсальной функцией (для данного  $n$ ), одинаковой для состояний с различными квантовыми числами  $|m|$  и  $n_\rho$ .

Поясним вывод уравнения (2.13). Если потенциал  $U_{eff}(z)$  является мелкой короткодействующей ямой, то в формуле (2.7) на расстояниях  $r \gg a_H$  можно положить  $z = \infty$ , при этом

$$\chi'(z) \approx \text{const} = 2 \int_0^\infty U_{eff}(z) dz.$$

В этом случае решение (2.12) принимает вид  $\chi(z) = \exp(-\lambda|z|)$ , а сшивание решений приводит к известному уравнению

$$\lambda = -2 \int_0^\infty U_{eff}(z) dz,$$

определяющему положение единственного дискретного уровня, существующего в мелкой одномерной короткодействующей яме, см., например, [15, § 45]. Тот же прием использован в [15, § 112] в случае искаженного кулоновского потенциала. Однако в этом случае замены функции Уиттекера на  $\exp(-\lambda|z|)$  и  $z$  на  $a_B$  в (2.7) и (2.9) не оправданы, что и является причиной большой погрешности формулы (1.1) для основного состояния и неприменимости получающегося уравнения для всех возбужденных уровней.

Основные свойства спектра четных уровней легко понять, если заметить аналогию между уравнением (2.13) и уравнением, определяющим спектр  $s$ -состояний в трехмерном кулоновском потенциале притяжения  $U(r) = -e^2/r$ , искаженном на малых расстояниях  $r \ll a_B$  короткодействующим потенциалом  $V_s(r)$ , который сам может связать частицу (электрон). Это уравнение имеет вид (см. ниже разд. 5)

$$\lambda + 2 \ln \lambda + 2\psi \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{a_0}, \quad (2.14)$$

где  $a_0$  — перенормированная («ядерно-кулоновская») длина  $s$ -рассеяния в потенциале  $V_s$ . Сравнение (2.13) и (2.14) показывает, что аналогом обратной длины рассеяния является величина

$$\frac{1}{a_0(B)} \equiv \ln \mathcal{H} - 4\gamma - 2 \ln 2 - A_{|m|n_\rho}. \quad (2.15)$$

При этом в условиях применимости рассматриваемого подхода должно выполняться неравенство  $a_H \ll a_0(B)$ . Так, для  $\mathcal{H} = 10^4$  в случае  $m = n_\rho = 0$  имеем  $a_0(B) \approx 0.15$ , в то время как  $a_H = 0.01$ .

Имея в виду эту аналогию, отметим следующие свойства спектра четных уровней.

1) Для каждой пары квантовых чисел  $|m|$  и  $n_\rho$  уравнение (2.13) имеет бесконечное число корней  $\lambda_{n|m|n_\rho}^{(+)} > 0$ . Нижний ( $n = 1$ ) из них, для которого  $\lambda_{1|m|n_\rho}^{(+)} \gg 1$ , соответствует глубокому (в атомном масштабе) уровню.

2) Остальные корни ( $n \geq 2$ ) отвечают возбужденным состояниям. Соответствующие энергетические уровни расположены между соседними несмещенными кулоновскими  $n'$ -уровнями с главными квантовыми числами  $n'$ , равными  $(n - 1)$  и  $n$ .

Заметим, что в работе [16] для нижнего (глубокого) уровня  $1^+$  было получено уравнение, аналогичное (2.13), в котором вместо функции  $\psi(1 - 1/\lambda)$  фигурирует  $\psi(1) = -\gamma$ . Такое уравнение заведомо неприменимо для возбужденных четных состояний, но является асимптотически точным для основного уровня. Указанная замена приводит к заметной потере точности при больших, но конечных значениях  $\mathcal{H}$ . Однако уже учет следующего члена разложения  $\psi(1 - 1/\lambda)$  по  $\lambda^{-1}$  дает уравнение

$$\ln \mathcal{H} = \lambda + 2 \ln \lambda + 2\gamma + 2 \ln 2 + A_{|m|n_\rho} - \frac{\pi^2}{3\lambda}, \quad (2.16)$$

которое имеет процентную точность для значений  $\mathcal{H} \geq 10^5$ , см. ниже табл. 1.

Уравнения (2.13) и (2.16) задают в явном виде зависимость поля  $\mathcal{H}$  от  $\lambda$  и неявно — обратную функцию  $\lambda = \lambda(\mathcal{H})$ . Нетрудно получить и асимптотику энергии связи основного уровня  $\varepsilon_0(\mathcal{H})$  в пределе  $\mathcal{H} \rightarrow \infty$ . Однако, поскольку эта асимптотика устанавливается крайне медленно, мы выносим соответствующие формулы в Приложение В.

### 2.2. Спектр нечетных уровней

Обсудим теперь свойства нечетных состояний, следующие из уравнения (2.4). Как известно [21],

энергетический спектр  $E_{ns}$  для  $s$ -уровней в трехмерном потенциале  $U(r)$  совпадает со спектром нечетных уровней в симметричном одномерном потенциале  $U(|z|)$  такой же формы. Поэтому, принимая во внимание отмеченные выше свойства  $U_{eff}(|z|)$ , можно утверждать, что если в соответствующей трехмерной задаче записать потенциал в виде

$$U_{eff}(r) \equiv -\frac{1}{r} + \left( U_{eff}(r) + \frac{1}{r} \right),$$

то последнее слагаемое в нем можно рассматривать как малое искажение кулоновского потенциала и учесть его по теории возмущений. Это позволяет написать следующее выражение для энергии нечетных уровней:

$$E_{n|m|n_\rho}^{(-)} \equiv -\frac{1}{2} \left( \lambda_{n|m|n_\rho}^{(-)} \right)^2 = -\frac{1}{2n^2} + \int \left( U_{eff}(r) + \frac{1}{r} \right) \psi_{ns}^2(r) d^3r, \quad (2.17)$$

где  $\psi_{ns}(r)$  — невозмущенные волновые функции  $ns$ -состояний в кулоновском потенциале. При этом  $1/r = 1/n^2$  и уровни слегка сдвинуты вверх относительно кулоновских уровней, поскольку подынтегральное выражение в (2.17) — положительная величина.

Подставляя, в случае  $m = n_\rho = 0$ , в (2.17) выражение (2.5) для эффективного потенциала, записывая

$$\psi_{ns}^2(r) = \psi_{ns}^2(0) e^{-2\kappa r} \sum_{k=0}^{2(n-1)} c_n^{(k)} r^k,$$

$$\psi_{ns}^2(0) = \frac{1}{\pi n^3}, \quad \kappa = \frac{1}{n},$$

$$c_n^{(0)} = 1, \quad c_n^{(1)} = -\frac{2(n-1)}{n}, \dots$$

и выполняя интегрирование, получаем

$$\left( \lambda_{n00}^{(-)} \right)^2 = -2\bar{U}_{eff,n} - \frac{1}{n^2}, \quad (2.18)$$

где

$$\bar{U}_{eff,n} = -\frac{4\sqrt{2}}{a_H n^3} \sum_{k=0}^{2(n-1)} c_n^{(k)} \Gamma(k+3) \times \int_0^\infty e^{-x^2} \left( 2\kappa + \frac{\sqrt{2}x}{a_H} \right)^{-k-3} dx.$$

Отсюда интегрированием по частям можно получить следующее асимптотическое разложение для энергии связи при  $\mathcal{H} \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} (\lambda_{n00}^{(-)})^2 &= \\ &= \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3} \left\{ \frac{\ln \mathcal{H}}{\mathcal{H}} + \frac{a_n^{(0)}}{\mathcal{H}} + \frac{a_n^{(1)}}{\mathcal{H}^{3/2}} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

в котором коэффициенты разложения для нижних нечетных уровней равны<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} a_1^{(0)} &= -(2 + \ln 2 + \gamma) \approx -3.27036, \\ a_2^{(0)} &= -(3.5 - \ln 2 + \gamma) \approx -3.38407, \\ a_3^{(0)} &= -(13/3 - \ln 4.5 + \gamma) \approx -3.40647, \\ a_1^{(1)} &= 4\sqrt{2\pi} \approx 10.0265, \\ a_2^{(1)} &= 4\sqrt{2\pi} \approx 10.0265, \\ a_3^{(1)} &= \frac{16\sqrt{2\pi}}{3} \approx 13.3678. \end{aligned} \quad (2.20)$$

### 3. О ТОЧНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Обсудим теперь полученные результаты и сравним их с имеющимися численными расчетами. В работах [9–11, 14] с прецизионной точностью был рассчитан спектр атома водорода для ряда состояний с  $m = 0$  ниже основного уровня Ландау в широком интервале значений  $B$ . Таблица 1 иллюстрирует зависимость  $\mathcal{H}(\lambda)$  для основного состояния атома. В ней при указанных значениях  $\lambda^2$  сравниваются соответствующие величины напряженностей магнитного поля, взятые из [9, 14], а также вычисленные как по формулам (2.13), (2.16), так и согласно асимптотической формуле Хасегавы и Ховарда [16]; кроме того, приведены значения отношения  $a_H/a_B$ , малость которого требуется для применимости нами адиабатического приближения. Как и ожидалось, энергия связи для основного уровня в сильном магнитном поле велика в шкале обычных атомных энергий.

Отметим, что зависимость  $\lambda^2(\mathcal{H})$  дается уравнением (2.13) с гораздо большей точностью, чем обратная ей зависимость  $\mathcal{H}(\lambda)$ . На рис. 2 представлены значения погрешностей

$$\delta'(\lambda) = \frac{\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}}{\mathcal{H}}, \quad \delta''(\mathcal{H}) = \frac{\tilde{\lambda}^2 - \lambda^2}{\lambda^2}, \quad (3.1)$$

<sup>2)</sup> Здесь исправлена опечатка, допущенная [18] в формуле (17) в численном значении коэффициента  $a_1^{(1)}$ .

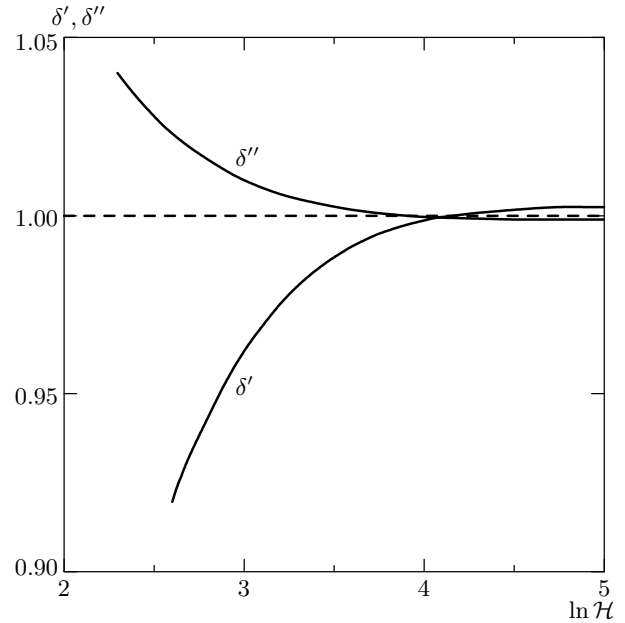


Рис. 2. Точность уравнения (2.13) в случае основного уровня. Величины  $\delta'$  и  $\delta''$  определяют погрешности соответствующих приближений, см. (3.1)

где  $\lambda^2$  и  $\mathcal{H}$  — точные значения, а тильдой обозначены величины, рассчитанные по уравнению (2.13). Такое различие связано с тем фактом, что зависимость  $\mathcal{H}(\lambda)$  имеет резкий экспоненциальный характер, и это обстоятельство является одной из причин несостоятельности формулы (1.2).

Выше, в связи с формулой (2.13) для спектра четных уровней, было отмечено своеобразное соотношение скейлинга для зависимости  $\mathcal{H}(\lambda_{n|m|n_\rho})$  при различных значениях магнитного квантового числа  $m$ :

$$\begin{aligned} \xi_m \equiv \ln \mathcal{H}(\lambda_{n|m|n_\rho}) - 4\gamma - 2 \ln 2 - A_{|m|n_\rho} &= \\ &= F(\lambda_{n|m|n_\rho}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

в котором

$$F(\lambda) = \lambda + 2[\ln \lambda + \psi(1 - 1/\lambda)] \quad (3.3)$$

— универсальная функция. Как видно из рис. 3, скейлинг (3.2) выполняется с хорошей точностью для состояний с различными  $m$  при  $\lambda^2 > 12$ . При  $\lambda^2 < 10$  наблюдается отклонение от соотношения (3.2), однако и в этой области точки  $\xi_m$  группируются вдоль плавной кривой, близкой к (3.3).

В табл. 2 представлены энергии связи для нижних возбужденных состояний атома с  $m = 0$  из работы [9] и вычисленные по асимптотическим формулам (2.13), (2.18) и (2.19) для состояний с

Таблица 1. Основной уровень атома водорода в сильном магнитном поле

$\lambda^2$	$\mathcal{H}$				$\frac{a_H}{a_B}$
	Числ.	Ур. (2.13)	[16]	Ур. (2.16)	
7.5796	100	80	>	128	0.10
9.4543	200	174	>	250	0.071
11.703	400	368	>	488	0.050
15.325	1000	962	>	1181	0.032
18.610	2000	1962	>	2.31(3)	0.022
22.408	4000	3966	>	4.53(3)	0.016
23.747	5000	4970	>	5.63(3)	0.014
28.282	1.0(4)	9991	>	1.11(4)	0.010
32.92	1.878(4)	1.880(4)	3.64(4)	2.05(4)	7.3(-3)
41.159	5.0(4)	5.014(4)	8.96(4)	5.37(4)	4.5(-3)
47.783	1.0(5)	1.003(5)	1.71(5)	1.06(5)	3.2(-3)
55.062	—	2.0(5)	3.27(5)	2.10(5)	2.2(-3)
65.805	—	5.0(5)	7.82(5)	5.21(5)	1.4(-3)
74.772	—	1.0(6)	1.52(6)	1.047(6)	1.0(-3)
98.740	—	5.0(6)	7.16(6)	5.146(6)	4.5(-4)
109.945	—	1.0(7)	1.40(7)	1.024(7)	3.2(-4)

Примечание.  $\lambda^2$  — энергия связи основного состояния  $1s(1^+)$  в ридбергах;  $\mathcal{H}$  — приведенное магнитное поле, значение  $\mathcal{H} = 18777$  соответствует  $B = B_{cr}$ ; во всех таблицах  $a(b) \equiv a \cdot 10^b$ ; во втором столбце приведены результаты численных расчетов. Знак «>» означает, что соответствующее значение имеет погрешность более 100%.

квантовыми числами  $n = 2^+, m = n_\rho = 0$  и  $n = 1^-, m = n_\rho = 0$  (в [9] они классифицируются соответственно как  $2s$ - и  $2p$ -состояния с  $m = 0$ ). Сделаем следующие замечания в отношении приведенных в табл. 2 результатов.

1) Сравнение с данными, приведенными в табл. 1, показывает, что для этих (возбужденных в продольном направлении движения) состояний рассматриваемый подход обеспечивает более высокую точность. Это обстоятельство имеет простое объяснение, поскольку для возбужденных состояний растет размер области локализации волновой функции в продольном направлении, что приводит к расширению области применимости адиабатического приближения на все меньшие значения магнитного поля.

2) Для нечетного состояния  $n = 1^-$  (или  $2p$ ) сдвиг уровня в магнитном поле  $\mathcal{H} \gtrsim 60$  мал и полностью подтверждает сделанные в п. 2.2 замечания.

3) Однако случай четного состояния  $n = 2^+(2s)$  гораздо более интересен. Как видно из табл. 2,

соответствующий уровень сильно сдвинут относительно невозмущенных кулоновских уровней,  $E_n = -1/2n^2$ , и в широком интервале полей  $\mathcal{H} = 2 \cdot 10^2 \div 2 \cdot 10^4$  расположен почти посередине между уровнями с главными квантовыми числами  $n = 1$  и  $n = 2$  (такому положению уровня соответствует значение  $\tilde{\lambda}_{12}^2 = 0.625$ ). Заметим, что подобная ситуация сохраняется и для более сильно возбужденных четных уровней. Так, для уровня  $n = 3^+$  при значениях  $\mathcal{H}$ , равных  $10^2$  и  $10^3$ , согласно формуле (12) соответственно имеем  $\lambda^2 = 0.17471$  и  $\lambda^2 = 0.18876$ , в то время как  $\tilde{\lambda}_{23}^2 = 0.18056$ . Эти свойства спектра четных состояний связаны с проявлением в них эффекта Зельдовича, см. ниже разд. 5.

#### 4. ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ СПЕКТРЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА

Полученные выше результаты для спектра гамильтониана (2.4) являются асимптотически точны-

Таблица 2. Энергии связи  $\lambda^2(\mathcal{H})$  для состояний  $2s$  и  $2p$

$\mathcal{H}$	$n = 2^+(2s)$		$n = 1^-(2p)$		
	[9]	Ур. (2.13)	[9]	Ур. (2.18)	Ур. (2.19)
10	0.41790	0.44291	0.76530	0.67081	—
20	0.44768	0.46440	0.82676	0.77299	0.6065
40	0.47640	0.48696	0.87748	0.84901	0.7996
60	0.49261	0.50046	0.90186	0.88287	0.8588
100	0.51236	0.51760	0.92723	0.91619	0.9065
140	0.52496	0.52888	0.94092	0.93330	0.9280
200	0.53794	0.54079	0.95306	0.94804	0.9453
400	0.56206	0.56342	0.97073	0.96856	0.9678
1000	0.59171	0.59207	0.98499	0.98433	0.98418
2000	0.61248	0.61250	0.99119	0.99093	0.99089
3000	—	0.62390	—	0.99348	0.99344
5000	—	0.63766	—	0.99570	0.99569
1.0(4)	—	0.65525	—	0.99759	0.99758
2.0(4)	—	0.67163	—	0.99866	0.99866
5.0(4)	—	0.69150	—	0.99939	0.99939
1.0(5)	—	0.70528	—	0.99967	0.99967

ми при  $B \rightarrow \infty$ . Однако при этом скорость поперечного движения электрона неограниченно возрастает, уравнение Шредингера становится неприменимым и следует использовать уравнение Дирака. Так, при  $B = 10^{13}$  Гс (или  $\mathcal{H} \approx 4000$ ) кинетическая энергия поперечного движения электрона по порядку величины составляет  $0.1m_e c^2$  (в этом разделе используются обычные единицы).

Обсудим обобщение полученных результатов на этот случай и прежде всего отметим следующее свойство связанных состояний в рассматриваемой задаче. Имеется широкая область сильных магнитных полей, в которой поперечное движение электрона является уже релятивистским (и даже может быть ультрарелятивистским), в то время как продольное движение сохраняет нерелятивистский характер и может быть исследовано в рамках подхода, изложенного в разд. 2. Особенно наглядно это видно на примере связанных состояний, возникающих из основного уровня Ландау поперечного движения электрона под действием кулоновского потенциала. Из уравнения Дирака для биспинора  $\Psi_E = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}) \\ \chi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$  имеем уравнения

$$c\sigma_{\perp} \cdot \left( \hat{\mathbf{p}}_{\perp} + \frac{e}{2c} [\mathbf{B} \times \boldsymbol{\rho}] \right) \chi + c\sigma_z \hat{p}_z \chi = \left( E - m_e c^2 + \frac{e^2}{r} \right) \varphi, \quad (4.1')$$

$$c\sigma_{\perp} \cdot \left( \hat{\mathbf{p}}_{\perp} + \frac{e}{2c} [\mathbf{B} \times \boldsymbol{\rho}] \right) \varphi + c\sigma_z \hat{p}_z \varphi = \left( E + m_e c^2 + \frac{e^2}{r} \right) \chi. \quad (4.1'')$$

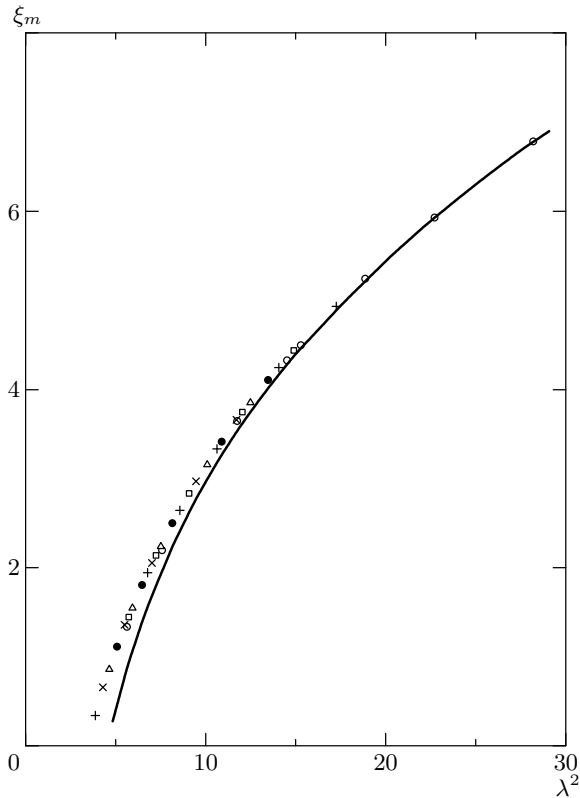
Рассматривая сначала только поперечное движение электрона (в пренебрежении кулоновским потенциалом), замечаем, что нижнему уровню Ландау отвечают (вырожденные по энергии) электронные состояния с квантовыми числами  $n_{\rho} = 0$ ,  $m = -|m| = 0, -1, -2, \dots$  и  $\sigma_z = -1$ . Для них

$$E_{n_{\rho} m \sigma_z}^{(0)} = m_e c^2, \quad \varphi^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) = R_{n_{\rho} m}(\boldsymbol{\rho}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\chi^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

при этом радиальные функции  $R_{n_{\rho} m}(\boldsymbol{\rho})$  имеют такой же вид, как и в нерелятивистском случае. Ис-





**Рис. 3.** Проверка соотношения скейлинга (3.2): сплошная линия — график функции  $F(\lambda)$ ;  $\circ$ ,  $+$ ,  $\square$ ,  $\bullet$ ,  $\triangle$  и  $\times$  — согласно численным расчетам [9, 10] соответственно для  $m = 0, -1, -2, -3, -4$  и  $-5$

пользуя адиабатическое приближение и предполагая при этом<sup>3)</sup>, что  $e^2/a_H \ll m_e c^2$  (или  $B \ll 10^{18}$  Гс), из уравнений (4.1) и (4.2) получаем

$$\varphi = \varphi^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \psi_l(z),$$

$$\chi \approx \frac{i\hbar}{2m_e c} \frac{\partial}{\partial z} \varphi = \frac{i\hbar}{2m_e c} R_{n_\rho m}(\boldsymbol{\rho}) \psi_l'(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

(при этом  $|\chi| \ll |\varphi|$ ) и уравнение для продольной части волновой функции  $\psi_l(z)$ , совпадающее с уравнением (2.4) нерелятивистского подхода. Соответственно теперь энергетический спектр принимает вид

$$E_{n_\rho=0, m, \sigma_z=-1} = m_e c^2 - \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m_e}, \quad (4.4)$$

где энергия связи дается прежним уравнением (2.13).

<sup>3)</sup> Выполнение этого неравенства обеспечивает применимость нерелятивистского приближения для описания продольного движения электрона.

Релятивистские поправки к формуле (4.4) рассматривались во многих работах, в частности, в [7, 8] на основе точного численного решения уравнения Дирака, а в [5] с использованием адиабатического приближения. Было показано, что релятивистские поправки очень малы. Так, для  $\mathcal{H} = 5 \cdot 10^3$ , согласно [5, 7], они составляют примерно  $3 \cdot 10^{-5}$  от нерелятивистского значения  $\lambda^2/2$ .

Однако в случае возбужденных состояний, связанных с более высокими уровнями Ландау, ситуация несколько иная. При  $B \sim B_{cr}$  энергия поперечного движения уже не равна  $m_e c^2$ , что, в свою очередь, сказывается на продольном движении. Мы проиллюстрируем это на простом примере уравнения Клейна–Гордона для скалярной частицы:

$$c^2 \left( \hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{2c} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}] \right)^2 \Psi_E + m_e^2 c^4 \Psi_E = \left( E + \frac{e^2}{r} \right)^2 \Psi_E. \quad (4.5)$$

Теперь в адиабатическом приближении

$$\Psi_E \equiv \Psi_{nmn_\rho}(\mathbf{r}) \approx R_{n_\rho m}(\boldsymbol{\rho}) \psi_l(z),$$

энергия поперечного движения

$$E_{n_\rho m}^{(0)} = \sqrt{m_e^2 c^4 + (2n_\rho + m + |m| + 1) \hbar \omega_L m_e c^2},$$

а уравнение для продольной части волновой функции принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \psi_l''(z) - \epsilon \left\langle \frac{e^2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right\rangle_{n_\rho m} \psi_l(z) = \epsilon \Delta E \psi_l(z), \quad (4.6)$$

где  $\epsilon = E_{n_\rho m}^{(0)}/m_e c^2$  и  $\Delta E = E - E_{n_\rho m}^{(0)}$ , а усредненные по поперечному движению значения  $-\langle e^2/\sqrt{\rho^2 + z^2} \rangle_{n_\rho m}$  совпадают с соответствующим эффективным потенциалом в (2.5). Отсюда видно, что релятивистский характер поперечного движения частицы в случае продольного движения приводит к перенормировке заряда:  $e^2 \rightarrow \epsilon e^2$ , что существенно отражается на спектрах как четных, так и нечетных состояний. Так, нечетные уровни в пренебрежении искажением «затравочного» кулоновского потенциала  $U_C = -e^2/|z|$  на малых расстояниях имеют вид

$$\Delta E_n^{(-)} = -\epsilon \frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2}. \quad (4.7)$$

Обобщение отмеченного подхода на случай уравнения Дирака требует отдельного рассмотрения.

### 5. ЭФФЕКТ ЗЕЛЬДОВИЧА В АТОМНЫХ СПЕКТРАХ

Специфические свойства дискретного спектра в кулоновском поле, искаженном на малых ( $0 < r < r_0$ ) расстояниях, впервые были рассмотрены в работе Зельдовича [1] в связи с вопросом об уровнях энергии электрона в примесном полупроводнике с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon \gg 1$ . Было показано, что в тот момент ( $g = g_0$ ), когда в короткодействующем потенциале  $V_s(r) = -gv(r)$  возникает связанный  $s$ -уровень или имеется резонанс в рассеянии частиц малой энергии (т.е. реальный или виртуальный уровень с энергией, близкой к нулю), атомный спектр перестраивается: кулоновский уровень  $E_{ns}$  быстро опускается на место  $E_{n-1,s}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , а основной уровень  $E_{1s}$  «проваливается» глубоко вниз. При этом относительная ширина области перестройки (по константе  $g$  сильного потенциала) составляет  $\Delta g/g_0 \sim r_0/a_B \ll 1$ .

Аналогичное поведение  $s$ - и  $p$ -уровней электронного спектра было обнаружено [22] в релятивистской кулоновской задаче с зарядом ядра  $Z > 137$ , когда уровень  $1s_{1/2}$  при критическом значении  $Z = Z_{cr}$  исчезает из дискретного спектра<sup>4)</sup>, уходя в нижний континуум  $E < -m_e c^2$  («море Дирака»). В работе [29] было указано, что этот эффект может проявиться в ядерных сдвигах уровней легчайших адронных атомов ( $\bar{p}p$ ,  $K^-p$  и др.). При этом особо отмечалось, что сдвиг уровня может быть положительным ( $\Delta E_{ns} > 0$ , т.е. уровень выталкивается вверх), хотя короткодействующий потенциал  $V_s$ , вызывающий эти сдвиги, является потенциалом притяжения.

В этих расчетах использовались конкретные модели потенциала  $V_s$ : прямоугольная яма  $v(r) = \theta(r_0 - r)$  [1, 29], параболический потенциал, отвечающий постоянной объемной плотности электрического заряда внутри ядра [22], сепарабельные потенциалы конечного ранга [29–33]. На общий характер данного явления, которое может происходить во всех системах, для которых потенциал взаимодействия разбивается на две части (коротко- и дальнедействующую) с сильно несоизмеримыми радиусами, и слабо зависит от конкретного ви-

да  $V_s(r)$ , было указано в [1] и более подробно в работах [32–34].

В работе [35] эффект Зельдовича был рассмотрен на основе безмодельного уравнения:

$$\lambda + 2[\ln \lambda r_0 + \psi(1 - \lambda^{-1}) + c_0] = a_B/a_s, \quad (5.1)$$

определяющего положение  $ns$ -уровней в том случае, когда дальнедействующая часть потенциала ( $r > r_0$ ) имеет кулоновский вид<sup>5)</sup>. Здесь  $c_0 = \ln 2 + 2\gamma = 1.848$ ,  $r_0$  — точка сшивания,  $a_s$  — длина  $s$ -рассеяния на «внутреннем» потенциале, действующем в области  $r < r_0$ , и в (5.1) опущены малые члены порядка  $r_0$  и  $r_0 \ln(\lambda r_0)$ . Условие применимости уравнения (5.1) является  $r_0 \ll a_B$ . В задаче, рассмотренной Зельдовичем [1], это условие обеспечивается тем, что  $a_B = \varepsilon m_e/m_{eff} \gg r_0 \sim 1$  (здесь  $m_e$  — масса электрона,  $m_{eff}$  — его эффективная масса в решетке,  $r_0$  — радиус иона). В случае адронных атомов имеем:  $a_B = 57.6$  Фм для  $\bar{p}p$ -атома,  $a_B = 83.5$  Фм для  $K^-p$ ,  $a_B = 51.4$  Фм для  $\Sigma^- p$  и т.д., а радиус сильного взаимодействия  $r_0 \approx 2-3$  Фм, поэтому здесь также имеется малый параметр  $r_0/a_B \approx 1/30-1/40$ .

Уравнение (5.1) показывает, что энергии  $ns$ -уровней жестко связаны между собой и могут быть выражены через энергию одного из них, не требуя решения уравнения Шредингера (см. [35, рис. 1]). Свойства уравнения (5.1) подробно исследовались [41] в связи с имевшимся тогда указанием [42] на большой сдвиг  $1s$ -уровня в протон-антипротонном атоме. При этом, согласно (5.1), в системе  $\bar{p}p$  могло бы существовать мелкое связанное состояние типа дейтрона, что представляло бы большой интерес для ядерной физики. В дальнейшем, однако, выяснилось, что результаты эксперимента [42] неверны, сдвиги уровней  $\bar{p}p$ -атома малы, и интерес к эффекту Зельдовича (по крайней мере, в области ядерной физики) резко упал. Обзор основных результатов, полученных в работах [35, 38–41] и других работах того периода, можно найти в [43].

Переходя к атому водорода в сверхсильном магнитном поле  $B \gg B_a$ , заметим, что такое поле сжимает атом, характерный размер которого в поперечном направлении равен радиусу Ландау. При этом

<sup>4)</sup> При этом необходимо ввести в рассмотрение конечные размеры ядра, т.е. обрезание кулоновского потенциала на малых расстояниях [23], без чего задача не является корректно поставленной из-за «падения на центр» [15, 24–26]. С учетом этого критический заряд  $Z_{cr} \approx 170$  для сферического сверхтяжелого ядра [27, 28].

<sup>5)</sup> См. также работы [36, 37]. Отметим, что название «эффект Зельдовича» предложено в [33]. Эффект Зельдовича для состояний с угловым моментом  $l \neq 0$  обладает некоторой спецификой [38–40] по сравнению со случаем  $s$ -состояний. В [40, 41] рассмотрены особенности этого эффекта при наличии в системе поглощения (что имеет место, например, в адронных атомах).

$a_H$  играет роль радиуса обрезания кулоновского потенциала, который при  $\mathcal{H} \gg 1$  мал по сравнению с боровским радиусом  $a_B$ :  $a_H/a_B = \sqrt{B_a/B} = 1/\sqrt{\mathcal{H}}$ . Поэтому неудивительно, что для энергетического спектра атома водорода в этом пределе получается уравнение (2.13), аналогичное (5.1), в котором конкретная связь между  $r_0$  и  $a_B$  зависит от квантовых чисел  $n_\rho$  и  $m$  для движения электрона в магнитном поле. В частности, для безузельных состояний с  $n_\rho = m = 0$  имеем

$$\frac{r_0}{a_B} = \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln 2 + \gamma)\right) \frac{a_H}{a_B} = \frac{0.5298}{\sqrt{\mathcal{H}}}, \quad (5.2)$$

и условие  $r_0 \ll a_B$  выполняется, если  $\mathcal{H} \gg 1$ .

Уравнение (2.13) определяет энергию уровней в заданном поле  $\mathcal{H}$  или величину магнитного поля по измеренному сдвигу уровня. Оно полностью аналогично соответствующему уравнению в теории  $\bar{p}p$ -атома, в котором параметр  $\xi$  равен

$$\xi \equiv \ln \mathcal{H} - (3\gamma + \ln 2) = a_B/a_{cs}, \quad (5.3)$$

где  $a_{cs}$  — ядерно-кулоновская длина низкоэнергетического  $\bar{p}p$ -рассеяния<sup>6)</sup>. Это показывает, что в спектре уровней атома водорода при  $\mathcal{H} \gg 1$  должен наблюдаться эффект Зельдовича. Физическая причина этого ясна: основной уровень  $1s$  атомного спектра, опустившийся глубоко вниз (его энергия связи при  $\mathcal{H} \gtrsim 500$  в десятки раз превышает потенциал ионизации атома водорода), играет роль квазиядерного состояния  $Qs$ , возмущающего кулоновский спектр — см. в этой связи [35, рис. 1].

Обсудим причину различного характера сдвигов четных и нечетных уровней в одномерном потенциале  $U_{eff}(|z|)$  и связь с эффектом Зельдовича. Как показано в [1], в трехмерной кулоновской задаче с короткодействием большие сдвиги  $ns$ -уровней возможны лишь для искажающего короткодействующего потенциала  $V_s(r)$ , в котором имеется собственный мелкий  $s$ -уровень, реальный или виртуальный. В остальных случаях сдвиги кулоновских уровней малы, даже если в потенциале  $V_s$  имеются свои уровни дискретного спектра, глубокие в атомном масштабе. В одномерном случае волновые функции четных и нечетных состояний удовлетворяют на полуоси  $r \equiv |z| > 0$  одному и тому же уравнению Шредингера (2.4), но разным граничным условиям в нуле:

<sup>6)</sup> Здесь мы используем приближение нулевого радиуса действия сил,  $r_s = r_{cs} = 0$ . Влияние эффективного радиуса на положение квазиядерного уровня в системе  $\bar{p}p$  детально исследовалось в [41]. Относительно длин рассеяния  $a_s$  и  $a_{cs}$  см. замечание 5) в разд. 8.

$\chi^{(-)}(0) = 0$  для нечетных и  $\chi^{(+)}(0) = 0$  для четных уровней, причем  $\chi^{(+)}(0) \neq 0$ . Выше уже отмечалось совпадение спектров нечетных уровней в симметричном одномерном потенциале и  $ns$ -уровней в соответствующем центрально-симметричном трехмерном потенциале. Волновые функции в этих случаях связаны соотношением  $\psi_{ns}(r) = \chi_n^{(-)}(r)/r$ , так что  $\psi_{ns}(0) < \infty$ , а малость сдвигов нечетных уровней относительно кулоновских объясняется слабостью искажения кулоновского потенциала<sup>7)</sup>.

Для четных состояний подобная аналогия не проходит, поскольку теперь  $\psi_{ns}(r) = \chi_n^{(+)}(r)/r \propto 1/r \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ , а сингулярные решения уравнения Шредингера обычно исключаются из рассмотрения, кроме случая трехмерного потенциала нулевого радиуса ( $\delta$ -потенциал), который определяется граничным условием (см. [44, стр. 27])

$$\left. \frac{d \ln \chi(r)}{dr} \right|_{r=0} = -\kappa_0, \quad (5.4)$$

или

$$\psi(r) \approx \text{const} \cdot \left( \frac{1}{r} - \kappa_0 + O(r) \right), \quad r \rightarrow 0, \quad (5.4')$$

где параметр  $\kappa_0$  определяет энергию  $E_0 = -\hbar^2 \kappa_0^2 / 2m$  реального (при  $\kappa_0 > 0$ ) или виртуального ( $\kappa_0 < 0$ )  $s$ -уровня. Отметим, что с четными решениями  $\chi_n^{(+)}(z)$  уравнения Шредингера для симметричного одномерного потенциала  $U(|z|)$  однозначно связаны решения  $\psi_{ns}(r) = \chi^{(+)}(r)/r$  трехмерного уравнения Шредингера для  $s$ -состояний с тем же потенциалом  $U(r)$ , причем

$$\int \psi_{ns}^2(r) d^3 r = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [\chi_n^{(+)}(|z|)]^2 dz \quad (5.5)$$

и выполняется граничное условие (5.4) с  $\chi^{(+)}(0) = -\kappa_0 = 0$ . Это значит, что сферически-симметричный потенциал является суперпозицией потенциала  $U(r) \equiv U_{eff}(r)$  и потенциала нулевого радиуса, локализованного в точке  $r = 0$ , для которого  $\kappa_0 = 0$ .

Остается заметить, что случай  $\kappa_0 = 0$  означает, что потенциал нулевого радиуса моделирует короткодействующий потенциал  $V_s(r)$  в момент возникновения в нем связанного состояния, при этом (неперенормированная эффективный потенциалом) длина рассеяния  $a_0 = \kappa_0^{-1} = \infty$ . Но именно такое

<sup>7)</sup> Как уже отмечалось,  $U_{eff}(|z|) + 1/|z| > 0$ , так что искажающий потенциал является отталкивательным и потому не может носить резонансный характер.

**Таблица 3.** Величины  $\delta_n$  и  $\rho_n$  для атома водорода в магнитном поле

$n$	$\mathcal{H} = 11.3(\xi = 0)$			$\mathcal{H} = 1000$		$\mathcal{H} = 3120$		$\mathcal{H} = 10^5$	
	$\delta_n$	$\delta_n/\delta_\infty$	$\rho_n$	$\delta_n$	$\rho_n$	$\delta_n$	$\rho_n$	$\delta_n$	$\rho_n$
1	0.4695	0.9391	—	0.2541	—	0.2179	—	0.1447	—
2	0.4964	0.9927	0.738	0.2996	0.544	0.2649	0.500	0.1907	0.393
3	0.4987	0.9973	0.641	0.3017	0.441	0.2668	0.399	0.1920	0.302
4	0.4993	0.9986	0.606	0.3022	0.399	0.2672	0.359	0.1923	0.267
5	0.4996	0.9992	0.583	0.3024	0.377	0.2674	0.337	0.1924	0.249
10	0.4999	0.9998	0.539	0.3026	0.337	0.2676	0.300	0.1925	0.218
$n \rightarrow \infty$	0.5000	1.0000	0.500	0.3027	0.303	0.2677	0.271	0.1926	0.193
$\delta_1/\delta_\infty$	0.939			0.839		0.814		0.751	

*Примечание.* Приведены квантовые дефекты  $\delta_n$  для  $ns$ -уровней атома водорода (при  $n_\rho = m = 0$ ) и относительные сдвиги (6.4) этих уровней.

свойство короткодействующего потенциала и требуется [1] для наиболее четкого проявления эффекта Зельдовича, чему соответствует  $\xi = 0$  в табл. 3.

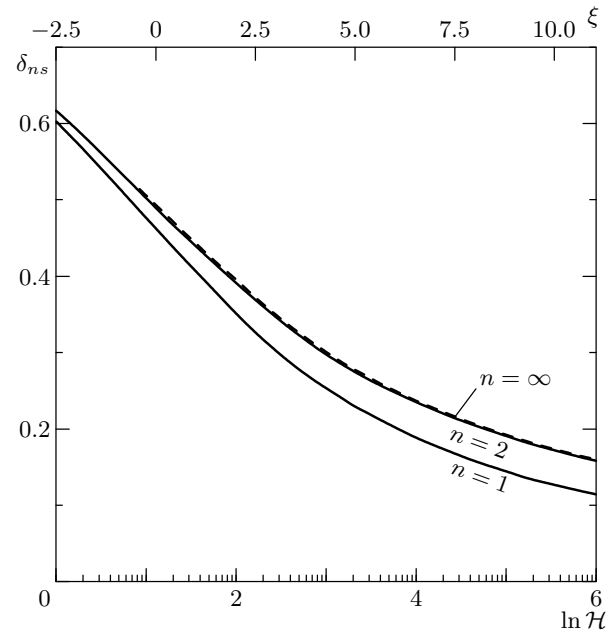
### 6. ЭФФЕКТ ЗЕЛЬДОВИЧА В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Возникает вопрос, что можно сказать об эффекте Зельдовича на основании имеющихся экспериментальных данных. Магнитные поля  $B \gg B_a$  встречаются в астрофизике (магнитные белые карлики, нейтронные звезды), но здесь требуется дополнительное рассмотрение. Однако имеются многочисленные работы, в которых уравнение Шредингера для атома водорода в однородном магнитном поле решалось на компьютере с высокой точностью (вплоть до 10–12 знаков!) различными численными методами при  $\mathcal{H} \lesssim 10^5$ , или  $B \lesssim 2 \cdot 10^{14}$  Гс. Результаты этих расчетов полностью согласуются между собой [6–14]. Эти данные мы и будем использовать, рассматривая их как результаты численного эксперимента. Сначала, однако, следует сказать несколько слов об отличительных свойствах эффекта Зельдовича.

Ранее уже отмечалось [35], что наиболее подходящей переменной для описания этого эффекта является не энергия  $E$  или  $\lambda = \sqrt{-2E}$ , а безразмерный параметр

$$\nu = \frac{Z}{\lambda} = \sqrt{\frac{Z^2 m_e e^4}{2\hbar^2 |E|}} \quad (6.1)$$

(если потенциал  $V(r) = -Z/r$  при  $r > r_0$ , для ато-



**Рис. 4.** Квантовые дефекты для  $ns$ -уровней в зависимости от  $\xi = a_B/a_{cs}$ , или от приведенного магнитного поля. Сплошные кривые относятся к нижним уровням с  $n = 1$  и  $2$ , штриховая кривая — к состояниям с  $n \gg 1$

ма водорода  $Z = 1$ ). В атомной физике эта переменная называется эффективным главным квантовым числом и обычно обозначается  $n^*$  [45]. Характерным свойством эффекта Зельдовича является то, что значения  $\nu_n$  для всей серии сдвинутых атомных  $ns$ -уровней обладают (с высокой точностью)

периодичностью по  $n$ . Это видно из табл. 3, в которой приведены значения «квантовых дефектов»  $\delta_n = \nu_n - (n - 1)$  для  $ns$ -состояний. Изменение  $\delta_n$  от  $n = 2$  до  $n = \infty$  (при данном  $\mathcal{H}$ ) не превышает 1%, что характеризует степень периодичности  $\nu_n$  в области атомного спектра (т. е. при  $\nu > 1$ ) и наглядно видно на рис. 4. С другой стороны, для нижнего уровня  $1s$ , который с ростом  $\mathcal{H}$  опускается сколь угодно глубоко [21, 46], это изменение более заметно (см., в частности, первый столбец в табл. 3, относящийся к случаю точного резонанса:  $a_{cs} = \infty$ ,  $\xi = 0$  (момент возникновения уровня с учетом кулоновского взаимодействия)). При  $n \rightarrow \infty$  в этом случае  $\nu_n = n - 1/2$  и  $\delta_n = 1/2$ . В табл. 3 приведены также значения  $\delta_n$  и  $\rho_n$  для того случая, когда  $\rho_2 = 1/2$ , т. е. уровень  $2s$  имеет энергию связи

$$\varepsilon_{2s} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{1s}^{(0)} + \varepsilon_{2s}^{(0)}) = \frac{5}{16} \text{ ат. ед.} = 8.5 \text{ эВ.}$$

Отношение  $\delta_1/\delta_\infty$  меняется более заметно, чем  $\delta_2/\delta_\infty$ , а именно, в пределах от 0.95 до 0.75 при изменении  $\mathcal{H}$  от 100 до  $10^5$ .

Объяснение свойства периодичности  $\nu_n$  нетрудно получить, если, используя тождество [20]  $\psi(1 - z) = \pi \operatorname{ctg}(\pi z) + \psi(z)$ , записать (2.13) в виде ( $n_\rho = m = 0$ )

$$\operatorname{ctg}(\pi\nu) - d(\nu) = \xi = \frac{1}{2\pi}(\ln \mathcal{H} - 3\gamma - \ln 2). \quad (6.2)$$

Функция  $d(\nu)$  численно мала в области атомного спектра:

$$d(\nu) = \frac{1}{\pi} \left[ \ln \nu - \psi(\nu) - \frac{1}{2\nu} \right] = \begin{cases} 0.0246, & \nu = 1, \\ 0.0065, & \nu = 2, \\ 1/12\pi\nu^2, & \nu \rightarrow \infty, \end{cases}$$

откуда при  $n \gg 1$

$$\begin{aligned} \delta_n &= \delta_\infty - \frac{\sin^2 \pi \delta_\infty}{12\pi n^2}, \\ \delta_\infty &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \xi, \quad 0 < \delta_\infty < 1, \end{aligned} \quad (6.3)$$

что и указывает на периодичность значений  $\nu_n$  при больших  $n$ , которая, как видно из табл. 3, затягивается вплоть до  $n = 2$ .

Иногда высказывается мнение, что явление перестройки атомного спектра наиболее ярко проявляется в сдвигах уровней. Это верно с качественной стороны, но в количественном отношении сдвиги атомных уровней не подчиняются столь простой законо-

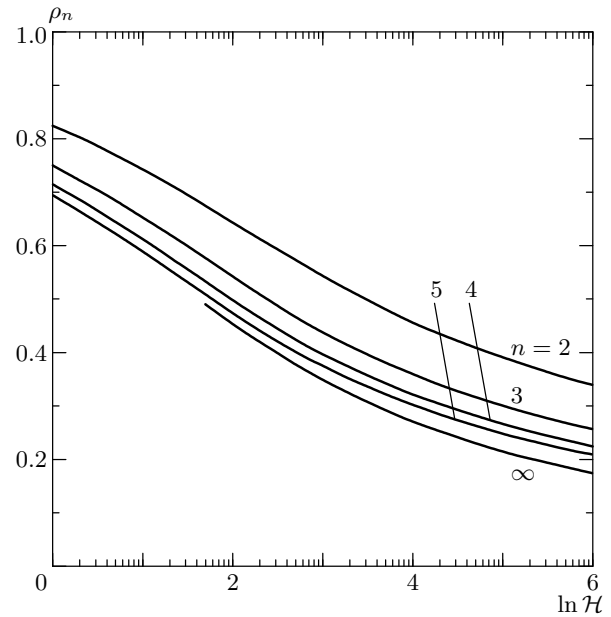


Рис. 5. Относительные сдвиги  $ns$ -уровней (6.4) в зависимости от магнитного поля

мерности, как величины  $\nu_n$  и  $\delta_n$ . Действительно, рассмотрим относительный сдвиг  $ns$ -уровня:

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{E_{ns} - E_{n-1}^{(0)}}{E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)}} = \\ &= \frac{n^2(2n - 2 + \delta_n)}{(2n - 1)(n - 1 + \delta_n)^2} \delta_n, \quad n \geq 2 \quad (6.4) \end{aligned}$$

( $E_n^{(0)} = -Z^2/2n^2$  — кулоновский спектр). В отличие от  $\delta_n$ , зависимость  $\rho_n$  от номера уровня является существенной, что видно на рис. 5. Аналогично, если  $\rho_n = 1/2$ , т. е.  $ns$ -уровень находится в точности посередине между соседними кулоновскими уровнями, то квантовый дефект  $\delta_n$  для него отнюдь не равен 0.5:

$$\begin{aligned} \delta_n &= (n - 1) \left[ n \sqrt{\frac{2}{2n^2 - 2n + 1}} - 1 \right] = \\ &= \begin{cases} 0.265, & n = 2, \\ 0.353, & n = 3, \end{cases} \end{aligned}$$

и  $\delta_n = 1/2 - 3/8n + \dots$  при  $n \gg 1$ . Только для высоковозбужденных ( $n \gg 1$ ) состояний величины  $\rho_n$  и  $\delta_n$  близки друг к другу:

$$\begin{aligned} \rho_n &= \delta_n + \frac{3\delta_n(1 - \delta_n)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ \delta_n &< \rho_n < 1, \end{aligned} \quad (6.5)$$

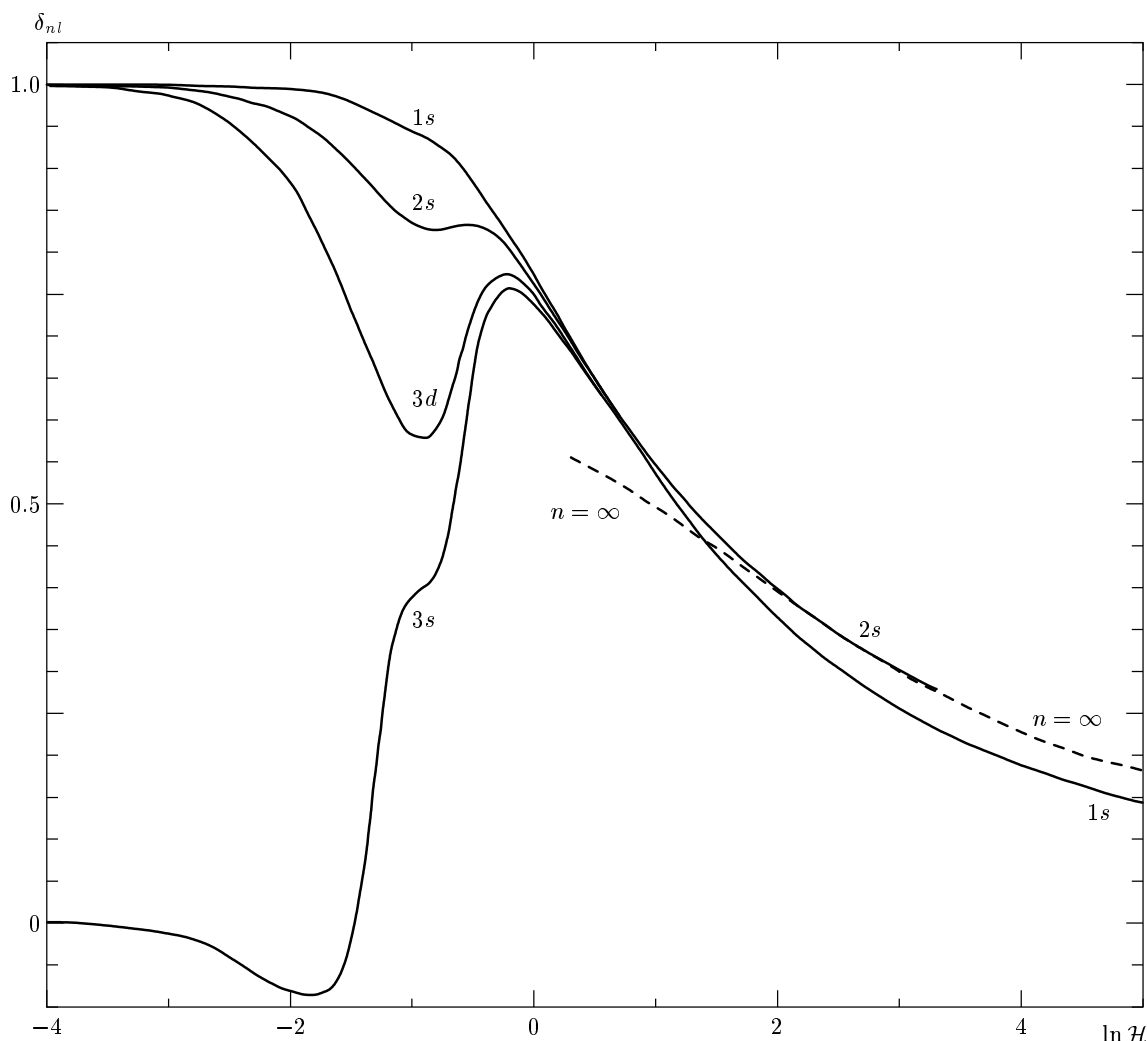


Рис. 6. Квантовые дефекты  $\delta_{nl}(\mathcal{H})$  для четных уровней согласно результатам численных расчетов [9]. У кривых указаны состояния атома водорода в соответствии с их классификацией [9] при выключенном магнитном поле. Штриховая кривая относится к состояниям  $ns$  при  $n \gg 1$

а также в случае сверхсильного поля, когда сами квантовые дефекты уже малы,

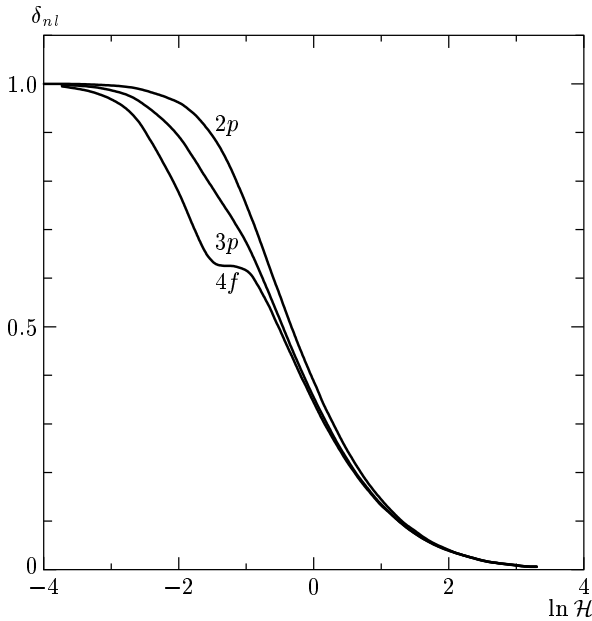
$$\rho_n = \frac{2n^2}{(2n-1)(n-1)}\delta_n + O(\delta_n^2). \quad (6.6)$$

Таким образом, именно постоянство квантовых дефектов  $\delta_n$  при  $2 \leq n < \infty$  является надежным индикатором присутствия эффекта Зельдовича в спектре атомных уровней (в кулоновском поле с короткодействием).

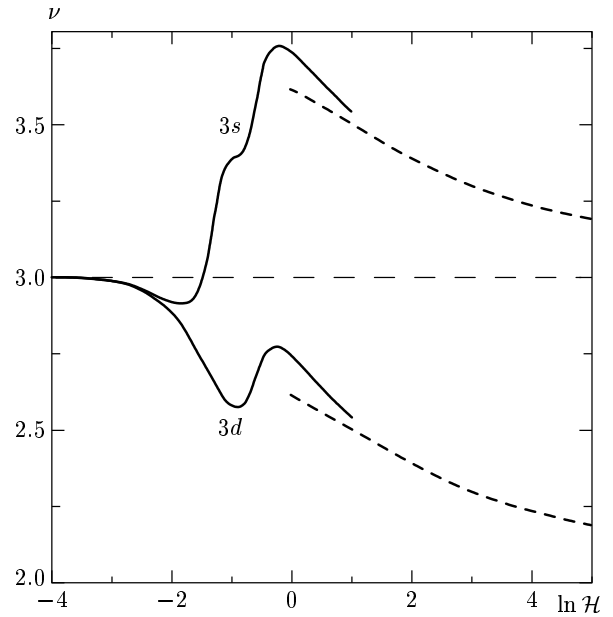
Заметим еще, что наше определение квантового дефекта несколько отличается от принятого в атомной физике [15, 46], где обычно полагают  $\nu_n = n - \Delta_{nl}$  (причем поправка Ридберга  $\Delta_{nl}$  практически не зависит от главного квантового числа  $n$ ).

В нашем случае удобно отсчитывать  $\delta_{nl}$  не от начального уровня  $n$  в свободном ( $\mathcal{H} = 0$ ) атоме, а от предельного значения  $n_f$ , к которому стремится параметр  $\nu$  при  $\mathcal{H} \rightarrow \infty$  в уравнении Шредингера (поскольку  $a_H \rightarrow 0$ , это отвечает движению в одномерном кулоновском потенциале).

Квантовые дефекты  $\delta_{nl}$  нетрудно рассчитать, используя энергии связи  $\varepsilon_{nl} = \lambda_{nl}^2$  (в ридбергах) из [9–11]. При классификации состояний будем, следуя работам [9, 11], нумеровать их квантовыми числами  $n, l$  для свободного атома водорода. При  $\mathcal{H} \gg 1$  «хорошими» квантовыми числами становятся  $n_\rho, m, n_f$  и  $P$ , где  $n_\rho$  и  $m$  описывают быстрое движение вокруг магнитного поля [15],  $n_f$  — номер уровня в одномерном кулоновском потенциале (медленное движение



**Рис. 7.** То же, что на предыдущем рисунке, для нечетных уровней  $2p, 3p$  и  $4f$ , соответствующих состояниям  $1^-, 2^-$  и  $3^-$  одномерного атома водорода. При построении кривой  $2p$ -уровня использованы также результаты работы [11]



**Рис. 8.** Зависимость  $\nu = Z/\lambda$  от магнитного поля для состояний  $3s$  и  $3d$ : сплошные кривые пересчитаны из данных работы [9], штриховые — по асимптотическому уравнению (2.13)

электрона вдоль  $\mathcal{H}$ )<sup>8)</sup>, а  $P = \pm 1$  — четность волновой функции относительно отражения  $z \rightarrow -z$ . Укажем соответствие между квантовыми числами  $(n, l)$  и  $n_f^P$  для случая  $n_p = m = 0$ , поскольку в [9] рассчитаны энергии только таких состояний. С ростом магнитного поля для четных состояний  $P = +1$  имеем

$$1s \rightarrow 1^+, 2s \rightarrow 2^+, 3d \rightarrow 3^+, 3s \rightarrow 4^+ \dots, \quad (6.7)$$

а для нечетных состояний  $P = -1$  —

$$2p \rightarrow 1^-, 3p \rightarrow 2^-, 4f \rightarrow 3^- \dots \quad (6.7')$$

Значения  $\delta_{nl}$  для них приведены на рис. 6 и 7. Для четных состояний эффект Зельдовича устанавливается при  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_{min} \sim 100$ , а для нечетных — начиная с  $\mathcal{H}_{min} \approx 1$ . Штрихами на рис. 6 показана предельная кривая ( $n \rightarrow \infty$ ), построенная по уравнению (6.3). Различие между ней и кривой для  $2s$ -уровня вполне соответствует рис. 4. В то же время при  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_{min}$  даже порядок расположения кривых  $\delta_{nl}(\mathcal{H})$  резко отличается от характерного для эффекта Зельдовича. Для  $ns$ -уровней

<sup>8)</sup> Заметим, что  $n_f$  совпадает с квантовым числом  $n$  в уравнении (2.4) (но не с главным квантовым числом  $n$  в кулоновской задаче).

$\delta_n \propto 1/\ln(\mathcal{H}/\ln^2 \mathcal{H})$  при  $\mathcal{H} \rightarrow \infty$ , т. е.  $\delta_{ns} \rightarrow 0$  довольно медленно. Благодаря этому область магнитных полей, в которой проявляется эффект Зельдовича, для четных состояний весьма значительна и охватывает значения  $B = 10^{12} - 10^{14}$  Гс, характерные для нейтронных звезд.

Некоторый комментарий требуется по поводу взаимного расположения состояний  $3s$  и  $3d$ . При отсутствии магнитного поля главному квантовому числу  $n = 3$  соответствуют три вырожденных состояния<sup>9)</sup>,  $3s, 3p$  и  $3d$ , из которых  $3p$  имеет отрицательную четность и не взаимодействует с двумя другими, а  $3s$  и  $3d$  — состояния с одинаковой симметрией. Эти термы с ростом  $\mathcal{H}$  взаимно расталкиваются (рис. 8), поскольку их пересечение противоречило бы теореме Вигнера–Неймана<sup>10)</sup>. Как видно на рис. 8, численные расчеты, доведенные в данном случае только до  $\mathcal{H} = 10$  [9], удовлетворительно согласуются с асимптотическим уравнением (2.13). Уровень  $3d$  расположен ниже, чем  $3s$ , что качественно можно объяснить тем, что его радиальная волновая

<sup>9)</sup> Это так называемое «случайное» вырождение, обязанное группе скрытой симметрии кулоновского поля [47, 48].

<sup>10)</sup> См. [15, § 79]. Аналогичным образом можно ожидать, что будут «взаимодействовать между собой» уровни  $4s, 4d$  (четные) и  $4p, 4f$  (нечетные). Действительно, на рис. 7 заметна некоторая нерегулярность в ходе кривой  $\delta_{4f}(\mathcal{H})$ .

функция не имеет узлов<sup>11)</sup>. Разумеется, для полной ясности хотелось бы продолжить численные расчеты энергий  $\varepsilon_{3s}$  и  $\varepsilon_{sd}$  хотя бы до  $\mathcal{H} \sim 50$ .

Квантовый дефект  $\delta_{1s}$  для основного уровня заметно отличается от  $\delta_{ns}$ ,  $n \geq 2$ . Эту величину также можно использовать как своего рода тест на эффект Зельдовича, рассматривая отношение

$$R_{12} = \delta_1/\delta_2 = \left( \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2} - \sqrt{2\varepsilon_1} \right)^{-1}, \quad (6.8)$$

где  $\varepsilon_{1,2}$  — энергии связи двух нижних уровней  $1s$  и  $2s$ , выраженные в атомных единицах  $m_e e^4/\hbar^2 = 27.21$  эВ. На рис. 4 в [19] одна кривая пересчитана из данных численных расчетов [9], а другая (кривая 2) отвечает решению уравнения (2.13). Эти кривые сближаются при  $\mathcal{H} \gtrsim 200$ , когда в задаче появляется малый параметр  $r_0/a_B < 1/20$ . В этой области сдвиг атомного уровня  $2s$  связан с положением нижнего уровня  $1s$  соотношением, специфическим для эффекта Зельдовича.

Приведенные на рис. 7 кривые  $\delta_{nl}(\mathcal{H})$  для трех нечетных состояний указывают на возможность существования для них аналога эффекта Зельдовича в интервале  $1 \lesssim \mathcal{H} \lesssim 10^3$ , хотя в этом случае в системе отсутствует глубокий уровень типа квазиядерного (или  $1s$ , как в случае четных состояний). В указанном выше интервале  $\mathcal{H}$  квантовые дефекты для состояний  $2p, 3d$  и  $4f$  близки друг к другу, что приводит к характерной периодичности значений  $\nu_{nl}$ . Однако в области  $\mathcal{H} \gtrsim 1000$ , где наблюдается эффект Зельдовича для четных состояний, сдвиги нечетных уровней уже очень малы. Так, для уровня  $2p$  при  $\mathcal{H} = 2000$  имеем  $\varepsilon_{2p} = 0.991189\dots$  (в атомных единицах, см. [9, табл. III]) и  $\delta_{2p} = \varepsilon_{2p}^{-1/2} - 1 = 0.00443$ . Сдвиг  $2p$ -уровня составляет, согласно (6.6), лишь 1.2% от расстояния между невозмущенными уровнями  $E_n^{(0)}$  с  $n = 1$  и  $2$ , а при  $\mathcal{H} \gtrsim 10^4$  он еще меньше.

Переходя к состояниям с магнитным квантовым числом  $m \neq 0$ , получим прежде всего простую оценку для радиуса обрезания  $r_0$  кулоновского поля. В адиабатическом приближении эффективный потенциал для движения электрона вдоль поля дается выражением (2.5). Для безузельных в поперечном на-

правлении состояний ( $n_p = 0, m < 0$ ) имеем

$$U_{eff}(z) = -\frac{1}{|m|!a_H} e^\xi \sum_{j=0}^{|m|} \frac{|m|!}{j!(|m|-j)!} (-\xi)^j \times \Gamma\left(|m|-j+\frac{1}{2}, \xi\right), \quad (6.9)$$

где  $\xi = z^2/2a_H^2$ , а  $\Gamma(\alpha, \xi)$  — неполная гамма-функция. Отсюда при  $|z| \ll a_H$  получаем (2.6') в случае  $m = 0$  и

$$U_{eff}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}a_H} \left\{ \frac{\Gamma(|m|+1/2)}{|m|!} - \frac{\Gamma(|m|-1/2)}{4(|m|!)} \left(\frac{z}{a_H}\right)^2 + \dots \right\}, \quad |m| \geq 1, \quad (6.10)$$

а при  $|z| \gg a_H$  эффективный потенциал имеет уже кулоновский вид:

$$U_{eff}(z) = -\frac{1}{|z|} \left\{ 1 - (|m|+1) \left(\frac{a_H}{z}\right)^2 + \dots \right\}. \quad (6.11)$$

Сшивая эти выражения, видим что радиус обрезания по порядку величины равен

$$r_0 \approx [ |m|!/\Gamma(|m|+1/2) ] a_H. \quad (6.12)$$

При  $m = 0$  эта оценка дает  $r_0 \approx 0.564a_B$ , что близко к точному значению (5.2). При  $|m| \gg 1$  отношение  $r_0/a_B$  возрастает как  $\sqrt{|m|}$ , в силу чего точность уравнения (2.13) уменьшается (при фиксированном  $\mathcal{H}$ ), что подтверждается и численным расчетом (рис. 9).

Заметим, что уравнение (2.13) для спектра уровней при  $m \neq 0$  полностью совпадает с уравнением (5.1), если положить

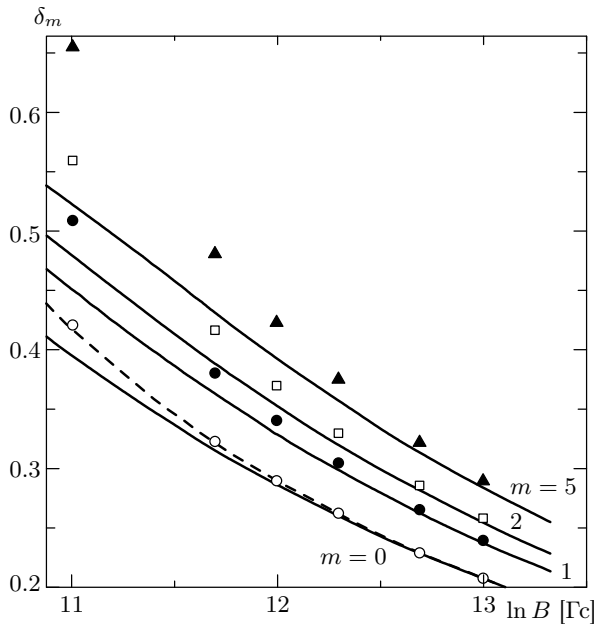
$$r_0 = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[ -(\ln 2 + \gamma) + \sum_{k=1}^{|m|} \frac{1}{k} \right] \right\} a_H, \quad (6.13)$$

т. е.  $r_0/a_H = 0.530, 0.874, 1.12, 1.32, \dots$  для  $m = 0, 1, 2, 3$ .

Энергии состояний с  $n_p = 0$  и  $m = 0, 1, \dots, 5$  в интервале магнитных полей  $B = 10^{11}-10^{13}$  Гс были рассчитаны в работе [10], на основе которой построен рис. 9. Из него видно, что с ростом магнитного квантового числа  $|m|$  область применимости уравнения (2.13) отодвигается в сторону все больших полей и для  $m = 5$  она начинается лишь с  $B \gtrsim 3 \cdot 10^{12}$  Гс.

<sup>11)</sup> Отметим также, что из формулы для диамагнитного сдвига уровня в слабом поле [15] следует, что  $\nu_{nl} = n + [A_n - B_n l(l+1)]\mathcal{H}^2 + \dots$ , причем  $B_n > 0$ . Поэтому значения  $\nu_{nl}$  тем меньше, чем больше орбитальный момент  $l$  (при фиксированном  $n$ ), а в силу теоремы Вигнера-Неймана это сохраняется и при конечных значениях поля  $\mathcal{H}$ .





**Рис. 9.** Квантовые дефекты  $\delta_m$  для состояний с  $n_\rho = 0$  в сверхсильном магнитном поле. Сплошные кривые построены по уравнению (2.13); значения  $\delta_m$ , извлеченные из результатов численного счета [9], обозначены как  $\circ$  ( $m = 0$ ),  $\bullet$  ( $m = 1$ ),  $\square$  ( $m = 2$ ) и  $\triangle$  ( $m = 5$ )

### 7. СРЕДНИЙ РАДИУС АТОМА, КВАДРУПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ И ВЕРОЯТНОСТИ РАДИАЦИОННЫХ ПЕРЕХОДОВ

При  $\mathcal{H} \gg 1$  размер атома водорода в поперечном к полю направлении равен радиусу Ландау  $a_H$ , а в продольном направлении волновая функция выражается через функцию Уиттекера (см. Приложение А):

$$\chi_\lambda(z) = \text{const} \cdot \sigma W_{\nu, 1/2}(2\lambda|z|), \quad -\infty < z < \infty, \quad (7.1)$$

где  $\nu = 1/\lambda$ ,  $\sigma = 1$  для четных и  $\sigma = \text{sign } z$  для нечетных состояний. Эта функция является решением уравнения Шредингера для одномерного «атома водорода», к которому сводится движение электрона вдоль магнитного поля (ось  $z$ ) при условии  $r_0 \sim a_H \ll a_B$ . Интегралы, входящие в нормировку и в выражение для среднеквадратичного радиуса

$$a_{\parallel} = \langle z^2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{2\lambda} \times \left\{ \int_0^\infty W_{\nu, 1/2}^2(x) x^2 dx / \int_0^\infty W_{\nu, 1/2}^2(x) dx \right\}^{1/2} \quad (7.2)$$

**Таблица 4.** Характерные размеры атома водорода в сверхсильном магнитном поле

$\mathcal{H}$	$\frac{a_H}{a_B}$	$a_{\parallel}/a_B$		$\beta$	
		1s	2s	1s	2s
0	—	1.000	3.74	—	—
100	0.100	0.353	3.25	3.53	32.5
213	6.85(−2)	0.303	3.10	4.42	45.2
425	4.85(−2)	0.264	2.97	5.44	61.2
851	3.43(−2)	0.232	2.86	6.76	83.4
1000	3.16(−2)	0.225	2.83	7.12	89.6
2000	2.24(−2)	0.200	2.74	8.93	122
2130	2.17(−2)	0.198	2.73	9.12	126
4255	1.53(−2)	0.178	2.66	11.6	174
5000	1.41(−2)	0.173	2.64	12.3	187
1.0(4)	1.00(−2)	0.157	2.57	15.7	257
5.0(4)	4.47(−3)	0.126	2.44	28.2	546
1.0(5)	3.16(−3)	0.116	2.40	36.7	759

*Примечание.* Параметр  $\beta = a_{\parallel}/a_H$  характеризует степень вытянутости электронного облака вдоль поля.

вычислены в [41], что позволяет получить для  $a_{\parallel}$  аналитическую формулу, которую мы приводим в Приложении С. Введем отношение  $\beta = a_{\parallel}/a_H$ , характеризующее форму атома (т. е. область локализации электрона). Значения  $a_H$ ,  $a_{\parallel}$  и  $\beta$  даны в табл. 4, из которой видно, что атом имеет сигарообразную (в случае 1s при  $\mathcal{H} \lesssim 1000$ ) или даже игольчатую (для состояний  $ns, n \geq 2$ ) форму [49]. Его продольный размер также сокращается с ростом  $\mathcal{H}$ , особенно в случае 1s-уровня: асимптотически при  $\mathcal{H} \rightarrow \infty$

$$\beta = \frac{a_{\parallel}}{a_H} \propto \frac{\sqrt{\mathcal{H}}}{\ln(\mathcal{H}/\ln^2 \mathcal{H})}, \quad n = 1. \quad (7.3)$$

Для возбужденных ( $n \geq 2$ ) состояний  $a_{\parallel} \propto n^2 a_B$  остается порядка радиуса Бора, хотя тоже уменьшается с ростом  $\mathcal{H}$ .

Деформация электронного облака магнитным полем приводит к возникновению квадрупольного момента атома, что сказывается на межатомном взаимодействии. В сильно замагниченной водородной плазме наряду с обычным ван-дер-ваальсовским притяжением может стать существенным также и квадруполь-квадрупольное взаимодействие атомов [50]. Недавно был выполнен численный расчет квадрупольного момента  $Q$  для основного состояния атома водорода [14]. При этом использовались

а) вариационный метод и б) решение дифференциальных уравнений, вытекающих из разложения волновой функции в ряд по орбитальям Ландау. Мы приведем простую асимптотическую формулу для  $Q$ , относящуюся к области  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_{min}$ .

В силу аксиальной симметрии тензор квадрупольного момента имеет вид

$$\begin{aligned} Q_{xx} = Q_{yy} &= \frac{1}{2}Q, & Q_{zz} &= -Q, \\ Q_{\alpha\beta} &= 0, & \alpha &\neq \beta, \\ Q &= 2\langle z^2 \rangle - \langle \rho^2 \rangle \end{aligned} \quad (7.4)$$

( $Q_{zz} < 0$ , поскольку заряд электрона  $e < 0$ ). Учитывая формулу (С.2), находим

$$Q = 2 \left\{ a_{\parallel}^2(\mathcal{H}) - \frac{1 + |m|}{\mathcal{H}} \right\}, \quad n_{\rho} = 0, \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} a_{\parallel}^2 &= \frac{18\nu^2}{(2-\nu)^2(3-\nu)^2} \times \\ &\times \frac{{}_3F_2(-\nu, -\nu, 3; 4-\nu, 4-\nu; 1)}{{}_3F_2(-\nu, -\nu, 1; 2-\nu, 2-\nu; 1)} \end{aligned} \quad (7.6)$$

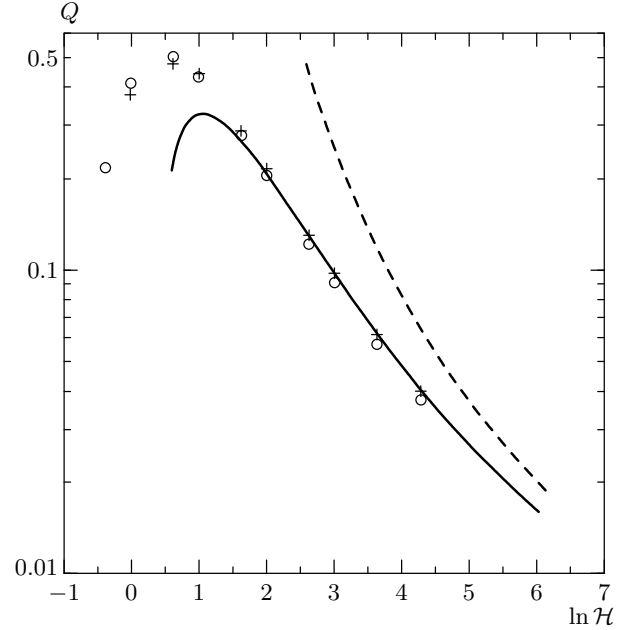
(здесь  $0 < \nu = \lambda^{-1} < 1$ , а  $\lambda = \lambda(\mathcal{H})$  определяется из уравнения (2.13)). В итоге получаем для  $Q(\mathcal{H})$  сплошную кривую на рис. 10, которая в области  $\mathcal{H} \geq 50$  хорошо согласуется с численным расчетом, особенно для метода б), который, как отмечается в [14], имеет более высокую точность. Уменьшение  $Q$  с ростом  $\mathcal{H}$  (при  $\mathcal{H} \geq 10$ ) связано с тем, что сверхсильное магнитное поле сжимает атом не только в поперечном к  $\mathbf{B}$  направлении, но и в продольном. Из формул (7.5), (7.6) легко следует также асимптотика  $Q(\mathcal{H})$  при  $\mathcal{H} \rightarrow \infty$ , которую мы приведем в Приложении Б.

Измерение спектра линий, испускаемых при переходе между уровнями атома, может дать полезную информацию. Рассмотрим  $E1$ -переходы из возбужденных нечетных состояний электрона с  $m = 0$  в нижней зоне Ландау,  $n_{\rho} = 0$ , на основной  $1s$ -уровень в области  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_{min}$ , когда  $a_H \ll a_{\parallel} \ll a_B$  и имеет место эффект Зельдовича. В вероятности распада

$$w(n, P = -1 \rightarrow 1s) = \frac{4\omega^3}{3c^3} |\mathbf{d}_{fi}|^2$$

отличен от нуля лишь матричный элемент компоненты дипольного момента вдоль поля, т.е. в одномерном атоме водорода. Считая энергию связи  $\varepsilon_{1s} = 1/2\nu^2 \gg 1$  (т.е.  $\nu = \delta_{1s} \ll 1$ ), заменим функцию Уиттекера (7.1) на более простую функцию (А.7). Для начального состояния

$$E_n^- = -\frac{1}{2n^2},$$



**Рис. 10.** Квадрупольный момент основного состояния атома водорода. Сплошная кривая построена по формуле (7.5), результаты численного расчета [14] обозначены как  $\circ$  и  $+$  (расчет соответственно методами а) и б), см. текст). Штриховая кривая соответствует асимптотике (B.5)

$$\psi_n^-(z) = \sqrt{\frac{2}{n^3}} z \exp\left(-\frac{|z|}{n}\right) {}_1F_1\left(1-n, 2; \frac{2|z|}{n}\right)$$

(как отмечалось, спектр этих уровней совпадает со спектром  $s$ -уровней в центральном кулоновском поле). Поскольку функция (7.1) обрезает матричный элемент на расстояниях  $|z| \sim \nu \ll 1$ , достаточно взять асимптотику  $\psi_n^-(z)$  в нуле:  $\psi_n^- = \sqrt{2/n^3} (z - z^2 + \dots)$ . В итоге получаем

$$\begin{aligned} \langle n^- | \hat{d}_z | 1s \rangle &= - \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\lambda}(z) z \psi_n^-(z) dz = \\ &= -(2\nu)^{5/2} n^{-3/2} + \dots, \\ w(n, P = -1 \rightarrow 1s) &= \frac{16}{3} \frac{\alpha^3}{n^3 \nu} (1 - c_1 \nu + \dots), \end{aligned} \quad (7.7)$$

где  $\alpha = 1/137$ ,  $c_1 = 3 - 2 \ln 2 \approx 1.61$  (см. (А.7) и (А.13)), вероятность перехода измеряется здесь в единицах  $m_e e^4 / \hbar^3 = 4.13 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ , а  $n \equiv n_f^- = 1, 2, 3, \dots$  — квантовое число начального состояния с четностью  $P = -1$ . С углублением основного уровня вероятность (7.7) растет, тогда как

в случае  $\bar{p}p$ -атома, наоборот, падает<sup>12)</sup>:

$$w(np \rightarrow \nu s) = \frac{16\alpha^3}{9n^3} \nu \left[ 1 - \frac{2}{3}\nu + O(\nu^2) \right]. \quad (7.7')$$

Это различие объясняется тем, что в одномерном атоме водорода  $\psi_n^-(z) \propto z$  на малых расстояниях, а в трехмерном атоме водорода  $\chi_{np}(r) \propto r^2$ , поэтому вероятность нахождения электрона в области локализации волновой функции конечного состояния  $1s$  во втором случае значительно меньше.

Сравним (7.7) с вероятностью спонтанного  $E1$ -перехода  $2p \rightarrow 1s$  при выключенном магнитном поле:

$$\frac{w(1^- \rightarrow 1s)}{w_H(2p \rightarrow 1s)} = \frac{2187}{16\nu} \approx 140 \nu^{-1}, \quad (7.8)$$

где [51]  $w_H(2p \rightarrow 1s) = (2/3)^8 \alpha^3 = 6.27 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$  (в обоих случаях рассматривается переход с уровня, ближайшего к основному). Итак, вероятность  $E1$ -переходов на глубокий  $s$ -уровень в сверхсильном магнитном поле значительно больше, чем в свободном ( $\mathcal{H} = 0$ ) атоме водорода. При  $B \sim 10^{13} \text{ Гс}$  имеем оценки:  $\varepsilon_{1s} \sim 300 \text{ эВ}$  и  $\nu \sim 0.2$ , откуда  $w \propto 10^{12} \text{ с}^{-1}$ . Точные значения вероятностей радиационных переходов могут быть получены при численном счете, при проведении которого можно воспользоваться аналитическими выражениями для интегралов с функцией Уиттекера и вырожденной гипергеометрической функцией, вычисленными в связи с теорией  $\bar{p}p$ -атома [41].

В заключение этого раздела заметим, что дипольное приближение применимо при условии  $kR \ll 1$ , где  $k = \omega/c$  — импульс фотона, а  $R$  — характерный размер излучателя. В нашем случае

$$a_H \ll a_{\parallel}, \quad \omega = E_i - E_f = \frac{1}{2\nu^2} \left( 1 - \frac{\nu^2}{n^2} \right) \approx \frac{1}{2\delta^2}$$

и безразмерный параметр  $kR \sim a_{\parallel}/2c\delta^2$  меняется в пределах от 0.013 при  $\mathcal{H} = 10^3$  до 0.02 при  $\mathcal{H} = 10^5$  (здесь  $\delta \equiv \delta_{1s}$  — квантовый дефект  $1s$ -уровня, см. табл. 3). Поэтому дипольное приближение имеет хорошую точность, а угловое распределение фотонов имеет вид

$$w(\theta) \propto [\mathbf{n} \times \mathbf{d}_{fi}]^2 \propto \sin^2 \theta, \quad (7.9)$$

где  $\mathbf{n} = c\mathbf{k}/\omega$  и  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}$ ; в частности, вдоль поля  $\mathbf{B}$  фотоны не вылетают.

<sup>12)</sup> Сравнение с численным расчетом [41] показывает, что в области  $\nu \leq 0.3$  можно ограничиться двумя членами этого разложения.

Заметим еще<sup>13)</sup>, что эти фотоны имеют 100-процентную линейную поляризацию в плоскости  $(\mathbf{B}, \mathbf{k})$ . Матричный элемент, отвечающий излучению фотона,  $M \propto \mathbf{B} \cdot \mathbf{e} \propto z_i e_i$ , где  $\mathbf{e}$  — вектор поляризации фотона, а  $\mathbf{z}$  — единичный вектор вдоль поля  $\mathbf{B}$ . Трехмерная матрица плотности фотона имеет вид (см. [51, стр. 44])

$$\begin{aligned} \rho_{ik} = & \frac{1}{2} \left( e_i^{(1)} e_k^{(1)} + e_i^{(2)} e_k^{(2)} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \xi_1 \left( e_i^{(1)} e_k^{(2)} + e_i^{(2)} e_k^{(1)} \right) - \\ & - \frac{i}{2} \xi_2 \left( e_i^{(1)} e_k^{(2)} - e_i^{(2)} e_k^{(1)} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \xi_3 \left( e_i^{(1)} e_k^{(1)} - e_i^{(2)} e_k^{(2)} \right), \quad (7.10) \end{aligned}$$

где  $\xi_i$  — параметры Стокса, а орты  $\mathbf{e}^{(1)}$  и  $\mathbf{e}^{(2)}$  выбраны следующим образом:

$$\mathbf{e}^{(1)} = \frac{1}{\sin \theta} [\mathbf{z} \times \mathbf{k}], \quad \mathbf{e}^{(2)} = [\mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{n}].$$

Подставляя это в выражение для  $|M|^2 \propto z_i z_k \rho_{ik}$ , получаем

$$|M|^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{e}^{(2)} \cdot \mathbf{z})^2 [1 - \xi^{(3)}], \quad (7.11)$$

где первый множитель определяет угловое распределение (7.9), а второй — поляризацию фотонов. С другой стороны,  $|M|^2 \propto 1 + \xi_f \xi_d$ , где  $\xi_d$  и  $\xi_f$  — параметры Стокса, характеризующие детектор и поляризацию излучаемого фотона [51]. Из (7.11) имеем  $\xi_f = (0, 0, -1)$ , откуда

$$\rho_{ik} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

а это и означает, что фотон имеет линейную поляризацию вдоль орта  $\mathbf{e}^{(2)}$ , т. е. в плоскости  $(\mathbf{B}, \mathbf{k})$ .

## 8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1) В работе Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчука и К. А. Тер-Мартirosяна «Взаимодействие и аннигиляция антинуклонов с нуклонами», выполненной в 1957 г., но не опубликованной, содержится исследование вопроса о спектре атомных уровней в кулоновском поле, искаженном на малых расстояниях из-за сильного взаимодействия. При этом, как и в [35], использовались сшивание внутренней и внешней волновых функций в точке  $r = r_0 \ll a_B$ , где сильный

<sup>13)</sup> Это замечание, равно как и излагаемые ниже соображения, принадлежат М. И. Высоцкому.

и кулоновский потенциалы сравниваются по величине. Для энергии уровней было получено уравнение, по существу совпадающее с уравнением (5.1), и качественно проанализировано влияние сильного взаимодействия между  $p$  и  $\bar{p}$  на сдвиги уровней в  $p\bar{p}$ -атоме.

Один из авторов (В. П.) весьма признателен К. А. Тер-Мартirosяну за информацию об этой работе и предоставленную возможность ознакомиться с ней в рукописи. Заметим, однако, что в период выполнения работ [35, 41] она была авторам неизвестна.

2) В табл. 5 приведены энергии связи первых двух  $s$ -уровней, их квантовые дефекты и предельное значение  $\delta_\infty$  для высоковозбужденных уровней. Значения  $\varepsilon_1$  взяты из [9], а  $\varepsilon_2$  рассчитаны по уравнению (2.13) — процедура, обратная по отношению к ранее использованной в теории  $p\bar{p}$ -атома [35]. Отметим, что относительный сдвиг  $2s$ -уровня (6.4) меняется от  $\rho_2 = 0.584$  ( $\mathcal{H} = 400$ ) до 0.393 при  $\mathcal{H} = 10^5$ . При  $\varepsilon_2 = 8.5$  эВ ( $\mathcal{H} \approx 3100$ ) этот уровень расположен точно посередине между несмещенными кулоновскими уровнями  $E_n^{(0)}$  с  $n = 1$  и 2.

Из табл. 5 видно, что при  $\mathcal{H} \lesssim 200$  выполняется неравенство  $\delta_\infty < \delta_2$ , обратное к тому, что характерно для эффекта Зельдовича. Поэтому нижняя граница полей, необходимых для проявления этого эффекта в спектре атомных уровней, составляет (для четных состояний)  $\mathcal{H}_{min} \sim 200$ , или  $B \sim B_{min} \sim 5 \cdot 10^{11}$  Гс, что следует также из рис. 5. С другой стороны, для нечетных состояний ( $1^-$ ,  $2^-$  и т. д.) значение  $\mathcal{H}_{min} \sim 1$  (см. рис. 6).

3) Имеется существенное различие в эффекте Зельдовича для трехмерных локальных потенциалов и в задаче с магнитным полем. В первом случае с ростом константы связи  $g$  перестройка может повториться несколько раз: так, для прямоугольной ямы это происходит [1] при  $g \approx g_N = (2N + 1)^2 \pi^2 \hbar^2 / 8r_0^2$ ,  $N = 0, 1, 2 \dots$ . Во втором случае только основной уровень  $1s$  может с ростом  $\mathcal{H}$  стать глубоким, а остальные уровни лежат в области  $\nu > 1$  (что является характерным свойством одномерного кулоновского потенциала, см. Приложение D). Поэтому в магнитном поле происходит только один цикл перестройки спектра (однако свой для каждой пары квантовых чисел  $n_p$  и  $|m|$ ).

4) Характерными значениями магнитного поля являются  $B_a$  и  $B_{cr} = \alpha^{-2} B_a$ , при которых расстояние между соседними уровнями Ландау равно

$$\hbar\omega_H = \frac{\hbar e B}{m_e c} = \begin{cases} m_e e^4 / \hbar^2, & B = B_a, \\ m_e c^2, & B = B_{cr}. \end{cases} \quad (8.1)$$

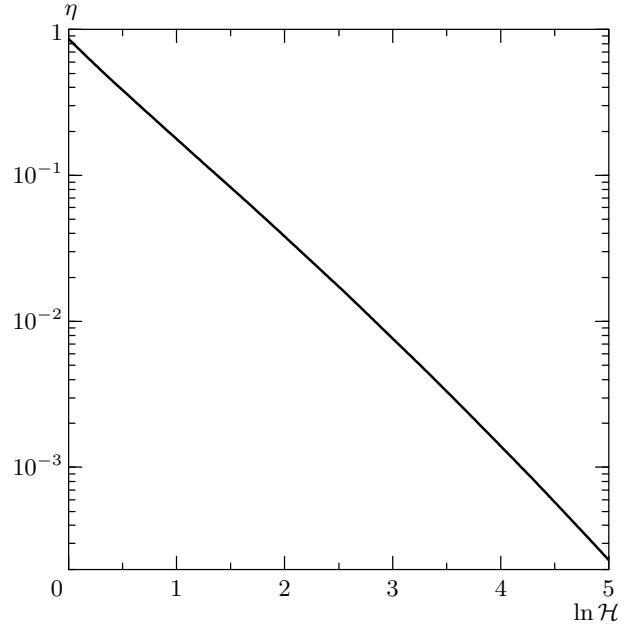


Рис. 11. Отношение энергии связи  $\varepsilon_0$  основного уровня к энергии Ландау  $\hbar\omega_H$

Отношение  $\eta = \varepsilon_0(\mathcal{H}) / \hbar\omega_H$  уменьшается с ростом поля (рис. 11); в частности,  $\eta = 0.831$  при  $B = B_a$  и  $\eta = 8.77 \cdot 10^{-3}$  при  $B = B_{cr}$ . Таким образом, в сверхсильном магнитном поле область энергий атомного спектра, включая и глубокий  $1s$ -уровень, составляет лишь малую долю от  $\hbar\omega_H$ .

Заметим, что  $\hbar\omega_H / m_e c^2 = B / B_{cr}$ . При  $B \geq B_{cr}$  поперечное движение электрона становится полностью релятивистским, однако в случае основного состояния это почти не сказывается на энергетическом спектре (см. [5, 7] и разд. 4 статьи). Областью применимости развитого выше подхода, в том числе уравнения (2.13), является

$$\alpha B_{cr} \leq B \leq \alpha^{-1} B_{cr}, \quad \alpha = e^2 / \hbar c = 1/137. \quad (8.2)$$

Для еще более интенсивных полей необходимо учитывать влияние внешнего поля на свойства вакуума и аномальный магнитный момент электрона.

5) Поясним связь между уравнениями (5.1) и (2.13). В них входят «сильная» длина рассеяния  $a_s$  и ядерно-кулоновская длина  $a_0 = a_{cs}$  (Coulomb-modified scattering length) в состоянии с  $l = 0$ . При переходе от (5.1) к (2.13) «большой» логарифм  $\ln(r_0/a_B)$  «уходит» в кулоновскую перенормировку длины рассеяния:  $1/a_s \rightarrow 1/a_{cs}$ , которая может быть значительной, если в системе существует уровень (реальный или виртуальный) с малой энергией. В то же время эффективный

Таблица 5

$B$ , Гс	$\mathcal{H}$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_\infty$
0	0	13.6	3.40	1.0	1.0	1
2.35(11)	100	103.1	6.90	0.3632	0.397	0.3937
4.7(11)	200	128.6	7.31	0.3252	0.363	0.3635
9.4(11)	400	159.2	7.64	0.2923	0.334	0.3357
1.0(12)	425	161.5	7.65	0.2902	0.332	0.3334
2.0(12)	851	198.5	7.96	0.2618	0.307	0.3082
2.35(12)	1000	208.4	8.05	0.2554	0.300	0.3027
4.70(12)	2000	253.2	8.33	0.2318	0.278	0.2807
5.0(12)	2130	257.1	8.35	0.2300	0.276	0.2788
1.0(13)	4255	309.6	8.61	0.2096	0.257	0.2592
1.18(13)	5000	323.1	8.67	0.2052	0.252	0.2549
2.53(13)	1.0(4)	384.8	8.91	0.1880	0.235	0.2378
$B_{cr}$	1.878(4)	447.9	9.11	0.1743	0.222	0.2237
1.18(14)	5.0(4)	560.0	9.41	0.1559	0.203	0.2045
2.35(14)	1.0(5)	650.1	9.59	0.1447	0.191	0.1926
5.0(14)	2.13(5)	759	9.81	0.1339	0.177	0.1782
1.0(15)	4.3(5)	868	9.97	0.1252	0.168	0.1688
5.0(15)	2.13(6)	1.16(3)	10.3	0.1082	0.149	0.1501
1.0(16)	4.3(6)	1.31(3)	10.4	0.1021	0.144	0.1431

*Примечание.*  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — энергии связи (в эВ) уровней  $1s$  и  $2s$  в магнитном поле,  $\delta_{1(2)}$  — их квантовые дефекты,  $\delta_\infty$  — квантовый дефект для высоковозбужденных уровней,  $B_{cr} = 4.414 \cdot 10^{13}$  Гс — швингеровское поле в КЭД [17].

радиус слабо меняется при включении кулоновского взаимодействия. Проиллюстрируем это на примере  $NN$ -рассеяния в состоянии  $^1S_0$ , где [52]

$$a_s = -23.748 \pm 0.010 \text{ Фм}, \quad r_s = 2.75 \pm 0.05 \text{ Фм},$$

$$a_{cs} = -7.8098 \pm 0.0023 \text{ Фм}, \quad r_{cs} = 2.767 \pm 0.010 \text{ Фм},$$

а индексы « $s$ » и « $cs$ » относятся к системам  $np$  и  $pp$ . Большому значению  $a_s$  отвечает виртуальный уровень  $|\epsilon| = 0.067$  МэВ («синглетный дейтрон»).

Определение величин  $a_{cs}$  и  $r_{cs}$  в случае произвольного потенциала  $V_s(r)$  можно найти, например, в [53–55].

6) Изложение вопроса об уровнях энергии атома водорода при  $\mathcal{H} \gg 1$ , данное в [15, § 112], требует некоторых уточнений.

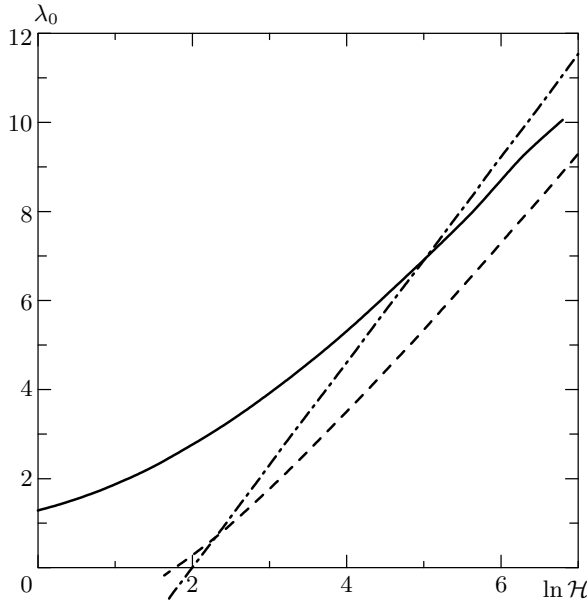
Во-первых, полученная в [15, стр. 559] формула (1.1) не совпадает с асимптотикой энергии связи основного уровня  $\varepsilon_0(\mathcal{H})$  при  $\mathcal{H} \rightarrow \infty$ . Сравнение формул (1.1) и (В.3) показывает, что правильная асимптотика для  $\varepsilon_0(\mathcal{H})$  не имеет вида  $\varepsilon_0 \approx \frac{1}{2} \ln^2 \tilde{c}\mathcal{H}$  с

некоторой константой  $\tilde{c}$ , а содержит дополнительно  $1/\ln^2 \mathcal{H}$  под знаком логарифма. При этом, как уже отмечалось выше, у формулы (1.1) фактически отсутствует область применимости<sup>14)</sup>.

Далее, вряд ли справедливо утверждение [15, 56] о том, что в сверхсильном магнитном поле все уровни дискретного спектра, кроме основного, двукратно вырождены (по четности  $P = \pm 1$ ) и описываются формулой Бальмера<sup>15)</sup>. Последнее верно в отно-

<sup>14)</sup> В [15] формула (1.1) приписывается Эллиотту и Лоудону, однако в работе последних [56] она вообще не содержится (эти авторы находили энергию  $\varepsilon_0(\mathcal{H})$  численным методом). Отметим еще, что согласно [13]  $\lambda \approx \ln(0.01\mathcal{H})$ , однако эта формула не совпадает с правильной асимптотикой (В.3), см. также рис. 12.

<sup>15)</sup> Эта ошибка связана, по-видимому, с использованием модели одномерного атома водорода [46, 56]. Такое приближение справедливо в пределе  $B \rightarrow \infty$ , однако в области магнитных полей  $B \sim 10^{11}$ – $10^{14}$  Гс оно имеет еще недостаточную точность (при вычислении энергии четных уровней), что хорошо видно на рис. 1, 4–6.



**Рис. 12.** Зависимость  $\lambda(\mathcal{H})$  для основного уровня. Сплошная кривая при  $\mathcal{H} < 10^5$  построена по результатам численного счета [9], а при  $\mathcal{H} > 10^5$  — по уравнению (2.13). Штриховая кривая соответствует асимптотике (В.3), штрихпунктирная — работе [13]

шении нечетных уровней (см. рис. 7), однако четные уровни в полях  $B \sim 10^{11} - 10^{14}$  Гс, характерных для нейтронных звезд, сильно смещены относительно  $E_n^{(0)}$ , что видно из рис. 5 и особенно наглядно из рис. 1. Соответствующие квантовые дефекты  $\delta_n^+ \sim [\ln(\mathcal{H}/\ln^2 \mathcal{H})]^{-1} < 0.05$  только при  $\mathcal{H} > 10^{11}$ , или  $B > 10^{20}$  Гс, причем даже и в этом случае смещения четных уровней относительно нечетных не очень малы ( $\rho_2 \approx 1/8$ , см. (6.6)). Подобные магнитные поля, если и существовали в ранней Вселенной [57], то при этом, очевидно, атомов водорода еще не было.

7) Таким образом, данные по квантовым дефектам  $ns$ -уровней, извлеченные из результатов выполненных ранее [6–11] численных расчетов, указывают на то, что эффект Зельдовича проявляется в энергетическом спектре атома водорода в области экстремально сильных магнитных полей  $B \gtrsim 10^{12}$  Гс. Такие поля характерны для нейтронных звезд и, возможно, магнитных белых карликов [3, 4]. Процесс установления этого эффекта с ростом  $\mathcal{H}$  наглядно виден на рис. 5–8, которые показывают, что по существу он уже наблюдается (в численном эксперименте). Подтверждение этого вывода с помощью прямых астрофизических на-

блюдений представляло бы большой интерес.

Пользуясь случаем, авторы хотели бы поблагодарить М. Б. Волошина, М. И. Высоцкого, В. Д. Мура, А. И. Никишова, И. Д. Новикова, Л. Б. Окуня, Ю. А. Симонова и К. А. Тер-Мартirosяна за обсуждение полученных результатов и полезные замечания, которые помогли устранить ряд неточностей и улучшить изложение, С. Г. Позднякова за помощь в численных расчетах, В. М. Вайнберга за указание на работы [12, 13], а также М. Н. Маркину за помощь при оформлении рукописи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 01-02-16850).

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Уравнение Шредингера в кулоновском поле  $U(r) = -Z/r$  имеет решение, убывающее на бесконечности:

$$\chi_l(r) = W_{\nu, l+1/2}(x) = e^{-x/2} x^\nu \left[ 1 + \frac{(l+\nu)(l+1-\nu)}{x} + O(x^{-2}) \right], \quad (\text{A.1})$$

где  $\nu = Z/\lambda$ ,  $\lambda = \sqrt{-2E}$ ,  $x = 2\lambda r$ ,  $l$  — орбитальный момент и  $W$  — функция Уиттекера. Эта функция имеет, вообще говоря, особенность в нуле:

$$W_{\nu, l+1/2}(x) = \frac{\Gamma(2l+1)}{\Gamma(l+1-\nu)} x^{-l} + \dots, \quad x \rightarrow 0. \quad (\text{A.2})$$

В частности, для  $s$ -состояний

$$W_{\nu, 1/2}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \times [1 - c_1 x \ln x - c_2 x + c_3 x^2 \ln x + O(x^2)], \quad (\text{A.3})$$

где  $c_1 = \nu$ ,  $c_2 = 1/2 + \nu[\psi(1-\nu) - 1 + 2\gamma]$ ,  $c_3 = \frac{1}{2}\nu^2$ , и т. д.

Отсюда при  $r \rightarrow 0$  имеем

$$\frac{d}{dr} \ln W_{\nu, 1/2}(2\lambda r) = -\{\lambda + 2[\ln \lambda r + \psi(1-\lambda^{-1}) + c_0] + O(r \ln \lambda r)\}, \quad (\text{A.4})$$

где  $\nu = 1/\lambda$ ,  $c_0 = 2\gamma + \ln 2$  и  $Z = 1$ . Использование этого разложения при сшивании с волновой функцией из внутренней области  $r < r_0$  непосредственно приводит к уравнениям (5.1) и (2.13).

Сингулярность вида (A.2) исчезает при целых  $\nu = n \geq l + 1$ , когда решение (A.1) лишь числен-

ным множителем отличается от волновой функции дискретного спектра атома водорода:

$$\begin{aligned} \chi_{nl}(r) &= \frac{(-1)^{n-l-1}}{n\sqrt{(n+l)!(n-l-1)!}} \times \\ &\times W_{n,l+1/2}\left(\frac{2r}{n}\right) = \frac{2^{l+1}\xi_{nl}}{(2l+1)!n^{3/2}} r^{l+1} \times \\ &\times \left[1 - \frac{r}{l+1} + \frac{2n^2+l+1}{(2l+2)(2l+3)n^2} r^2 + \dots\right], \end{aligned} \quad (A.5)$$

$r \rightarrow 0,$

где

$$\begin{aligned} \xi_{nl} &= \sqrt{\left(1 - \frac{1^2}{n^2}\right) \dots \left(l - \frac{l^2}{n^2}\right)}, \quad \xi_{n0} \equiv 1, \\ \int_0^\infty \chi_{nl}^2 dr &= 1. \end{aligned}$$

При  $\nu \rightarrow n$  с учетом тождества

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\psi(1-\nu)}{\Gamma(1-\nu)} = (-1)^n (n-1)!, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

разложение (A.3) переходит в (A.5) для случая  $l = 0$ .

Найдем теперь вид функции (A.1) для глубокого  $s$ -уровня. Из интегрального представления [20]

$$W_{\nu,1/2}(x) = \frac{e^{-x/2}}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^\infty e^{-t} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^\nu dt \quad (A.6)$$

при  $\nu \rightarrow 0$  получаем

$$W_{\nu,1/2}(x) = e^{-x/2} [1 + \nu u(x) + O(\nu^2)], \quad (A.7)$$

где

$$u(x) = \int_0^\infty e^{-t} \ln(t+x) dt = \ln x - e^x \text{Ei}(-x), \quad (A.8)$$

а  $\text{Ei}(z)$  — интегральная экспонента (см. 4.837.1 и 6.223 в [58]), причем  $u(0) = -\gamma$ ,  $u(x) = \ln x + O(x^{-1})$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $u(x) = 0$  при  $x = x_0 = 0.28501\dots$ . Учитывая значение интегралов

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{b-1} \ln x dx = \Gamma(b) \lambda^{-b} [\psi(b) - \ln \lambda], \quad (A.9)$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{b-1} u(x) dx = \Gamma(b) \psi(b+1), \quad b > 0, \quad (A.10)$$

нетрудно видеть, что нормированная (с точностью до  $\nu^2$ ) волновая функция равна

$$\begin{aligned} \chi_\nu(z) &= c_\nu e^{-\lambda|z|} [1 + \nu u(2\lambda|z|) + O(\nu^2)], \\ c_\nu &= \nu^{-1/2} [1 - (1-\gamma)\nu + \dots], \end{aligned} \quad (A.11)$$

откуда легко следует формула (B.4). В пределе  $\nu \rightarrow 0$  (глубокий уровень) получаем функцию

$$\chi_\lambda(z) = \sqrt{\lambda} \exp(-\lambda|z|), \quad \lambda = 1/\nu, \quad (A.12)$$

отвечающую одномерному  $\delta$ -потенциалу.

В разд. 7 статьи при вычислении матричного элемента дипольных переходов встречается интеграл

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-x} u(2x) x^k dx = \\ &= \psi(k+1) + \ln 2 + F_k(1/2) \end{aligned} \quad (A.13)$$

при целых  $k = 2, 3, \dots$ . Вводя параметр  $\mu$  и обозначая

$$\begin{aligned} F_k(\mu) &= -\frac{1}{2^{k+1}k!} \int_0^\infty e^{\mu x} x^k \text{Ei}(-x) dx, \\ \mu &< 1, \end{aligned} \quad (A.14)$$

получаем

$$\begin{aligned} F_0(\mu) &= -\frac{1}{2\mu} \ln(1-\mu), \\ F_1(\mu) &= \frac{1}{4\mu^2} \left[ \frac{\mu}{1-\mu} + \ln(1-\mu) \right], \end{aligned} \quad (A.15)$$

$$F_k(\mu) = \frac{1}{2k} \frac{d}{d\mu} F_{k-1}(\mu), \quad (A.16)$$

(см. 6.224.1 в [58]), откуда при  $\mu = 1/2$  имеем

$$J_0 = 2 \ln 2 - \gamma, \quad J_1 = 2 - \gamma,$$

$$J_2 = 2 \ln 2 + 1 - \gamma = 1.809, \quad J_3 = 2.089$$

и т. д., что дает коэффициент  $c_1$  в (7.7).

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Здесь мы рассмотрим вопрос об асимптотике энергии нижнего уровня в пределе  $\mathcal{H} \rightarrow \infty$ .

В сверхсильном магнитном поле этот уровень может опуститься, в принципе, сколь угодно глубоко [46, 56]. Считая  $\lambda \gg 1$  и учитывая, что [20]  $\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n+1} n! \zeta(n+1)$ , запишем (2.13) в виде

$$\mathcal{H} = \exp \left\{ \lambda + 2 \ln \lambda + k_0 - \sum_{n=1}^\infty k_n \lambda^{-n} \right\}, \quad (B.1)$$

где  $k_0 = \gamma + \ln 2$ ,  $k_n = 2\zeta(n + 1)$  и  $\zeta(s)$  — дзета-функция Римана:  $k_1 = \pi^2/3$ ,  $k_2 = 2.404$ ,  $k_3 = \pi^4/45$  и т.д. Первый член этого разложения совпадает с формулой (1.2), а первые три члена соответствуют уравнению (4.25) в статье Хасегавы и Ховарда [16]. Относительная погрешность этого приближения составляет

$$\delta_3 \equiv \frac{|\Delta\mathcal{H}|}{\mathcal{H}} \approx \frac{\pi^2}{3\lambda} = \frac{2.33}{\sqrt{\epsilon}} \quad (\text{B.2})$$

и довольно медленно уменьшается с ростом энергии связи  $\epsilon_0$  уровня (здесь  $\epsilon_0$  — в атомных единицах). Если в (B.1) удержать четыре члена разложения, включая  $-\pi^2/3\lambda$ , то погрешность составит  $\delta_4 \approx 1.2\epsilon_0^{-1}$ . Например, при  $\mathcal{H} = 10^5$  имеем  $\delta_3 = 0.71$  и  $\delta_4 = 0.06$ , при  $\mathcal{H} = 10^6$  уже  $\delta_3 = 0.52$ ,  $\delta_4 = 0.037$ , а при  $\mathcal{H} = 10^8$  получаем  $\delta_3 = 0.33$ ,  $\delta_4 = 0.017$ . Таким образом, уравнение (2.16), содержащее только элементарные функции, определяет зависимость  $\mathcal{H}(\lambda)$  при  $\mathcal{H} > 10^5$  с процентной точностью, что, по-видимому, достаточно для астрофизических приложений. В то же время в интервале  $100 < \mathcal{H} \lesssim 10^4$  только уравнение (2.13) определяет магнитное поле по энергии 1s-уровня с приемлемой точностью.

Из (B.1) методом итераций находим искомую асимптотику  $\epsilon_0(\mathcal{H}) = \lambda^2/2$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \ln \frac{\mathcal{H}}{\ln^2 \mathcal{H}} - (\gamma + \ln 2) + \dots = \\ &= \ln \frac{c_\infty \mathcal{H}}{\ln^2 \mathcal{H}} + O\left(\frac{\ln \ln \mathcal{H}}{\ln \mathcal{H}}\right), \quad \mathcal{H} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\epsilon_0(\mathcal{H}) \approx \frac{1}{2} \ln^2 \left( c_\infty \frac{\mathcal{H}}{\ln^2 \mathcal{H}} \right), \quad (\text{B.4})$$

где  $c_\infty = 0.2807$ . В серии четных уровней с произвольным магнитным квантовым числом  $m$  асимптотика глубокого уровня также определяется формулой (B.3), но с другой константой:

$$c_\infty \rightarrow c_\infty^{(m)} = \exp \left\{ - \left[ \gamma + \ln 2 + \sum_{k=1}^{|m|} \frac{1}{k} \right] \right\}$$

(с ростом  $|m|$  энергия связи этих уровней понижается).

Для квадрупольного момента основного состояния с учетом формул (B.3) и (C.4) получаем

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\lambda^2} + \frac{5}{3\lambda^3} + O(\lambda^{-4}) = \\ &= \Lambda^{-2} + \left[ 2(\gamma + \ln 2) + \frac{5}{3} \right] \Lambda^{-3} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\Lambda = \ln \frac{\mathcal{H}}{\ln^2 \mathcal{H}}$$

(ср. с разложением (4) из [14]). Однако асимптотики (B.3)–(B.5) устанавливаются чрезвычайно медленно: даже при  $\mathcal{H} = 10^5$  энергия связи основного уровня, вычисленная по (B.4), в 1.7 раза отличается от численного расчета [9], см. рис. 12.

Аналогичная ситуация имеет место и в ряде других задач квантовой механики, в том числе для эффекта Штарка в сильном поле [59, 60]. Если асимптотика содержит не только степени параметра разложения, но и логарифмы, то наступление ее «затягивается» и вычисление даже очень большого числа коэффициентов ряда теории возмущений не дает возможности восстановить функцию, представляемую этим рядом, на бесконечности (в этой связи см. [60]). Для этого необходимо выйти за рамки теории возмущений и исследовать точное решение.

### ПРИЛОЖЕНИЕ С

Продольный (вдоль магнитного поля) размер атома водорода характеризуют моменты распределения электронной плотности  $R_\alpha$ . При  $\mathcal{H} \gg 1$

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \langle |z|^\alpha \rangle = \\ &= (2\lambda)^{-\alpha} \int_0^\infty W_{\nu,1/2}^2(x) x^\alpha dx / \int_0^\infty W_{\nu,1/2}^2(x) dx, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

где  $\nu = 1/\lambda$  и мы использовали (7.1). Входящие сюда интегралы вычислены в [41], откуда

$$\begin{aligned} R_\alpha &= A(\alpha, \nu) \times \\ &\times \frac{{}_3F_2(-\nu, -\nu, \alpha + 1; \alpha + 2 - \nu, \alpha + 2 - \nu; 1)}{{}_3F_2(-\nu, -\nu, 1; 2 - \nu, 2 - \nu; 1)} a_B^\alpha, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$A(\alpha, \nu) = \Gamma(\alpha + 1) \left[ \frac{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(2 - \nu)}{\Gamma(\alpha + 2 - \nu)} \right]^2 \left( \frac{\nu}{2} \right)^\alpha, \quad (\text{C.3})$$

где  ${}_3F_2(\dots)$  — обобщенный гипергеометрический ряд, причем

$$\begin{aligned} A(0, \nu) &= 1, \quad A(1, \nu) = 2\nu/(2 - \nu)^2, \\ A(2, \nu) &= 18\nu^2[(2 - \nu)(3 - \nu)]^{-2}, \dots \end{aligned}$$

В случае глубокого уровня

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \Gamma(\alpha + 1) \left( \frac{\nu}{2} \right)^\alpha \times \\ &\times \{ 1 + 2[\psi(\alpha + 2) - \psi(2)]\nu + O(\nu^2) \}, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$a_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} \left[ 1 + \frac{5}{6\lambda} + O(\lambda^{-2}) \right], \quad \lambda \gg 1, \quad (\text{C.5})$$



где  $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ . Первый член этого разложения соответствует приближению  $\delta$ -потенциала (A.12).

Расчет по формуле (C.2) не встречает затруднений, поскольку степенные ряды для функций  ${}_3F_2$  сходятся, как  $\sum n^{-(\alpha+4)}$ , независимо от значения  $\nu$ . В итоге получаем среднеквадратичные радиусы  $a_{\parallel} = \sqrt{R_2} = \langle z^2 \rangle^{1/2}$ , приведенные в табл. 4. Поскольку в сверхсильном магнитном поле  $a_{\parallel} \gg a_H$ , размер атома водорода определяется именно величиной  $a_{\parallel}$ . Нужно отметить, что  $a_{\parallel}$  на порядок меньше радиуса Бора, т.е. в продольном по отношению к полю направлении размер атома водорода также значительно сокращается.

При выключении магнитного поля для  $ns$ -состояний [15]

$$a_{\parallel} = n\sqrt{(5n^2 + 1)/6} a_B, \quad (C.6)$$

в частности,  $a_{\parallel} = a_B$  для  $1s$ -уровня и  $a_{\parallel} = 3.742a_B$  для  $2s$ -уровня.

### ПРИЛОЖЕНИЕ D

Атом водорода в  $D$  измерениях описывается уравнением Шредингера

$$\Delta_D \psi + 2 \left( E + \frac{1}{r} \right) \psi = 0, \quad r = \left( \sum_{i=1}^D x_i^2 \right)^{1/2} \quad (D.1)$$

и имеет дискретный спектр энергий:

$$E_n = -\frac{1}{2[n + (D - 3)/2]^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (D.2)$$

При  $n > 1$  имеется «случайное» вырождение уровней, обязанное группе  $SO(D + 1)$  скрытой симметрии [47, 48, 61, 62] кулоновского потенциала, однако основное состояние остается невырожденным при любой размерности пространства  $D$ . Его энергия, средний радиус и волновая функция равны

$$E_{1s} = -\frac{2}{(D - 1)^2}, \quad \langle r \rangle = \frac{1}{4}(D^2 - D), \quad (D.3)$$

$$R_{1s}(r) = \frac{2^D}{[(D - 1)^D \Gamma(D)]^{1/2}} \exp\left(-\frac{2r}{D - 1}\right),$$

$$\int_0^{\infty} R_{1s}^2 r^{D-1} dr = 1,$$

в чем нетрудно убедиться прямой подстановкой в (D.1). Для произвольного показателя  $\alpha > -D$  имеем

$$\langle r^\alpha \rangle^{1/\alpha} = \frac{1}{4}(D - 1)[\Gamma(D + \alpha)/\Gamma(D)]^{1/\alpha}, \quad (D.4)$$

например,  $\langle r^2 \rangle^{1/2}/\langle r \rangle = \sqrt{1 + D^{-1}}$ , и для среднеквадратичного отклонения получаем  $\Delta r/\langle r \rangle = D^{-1/2}$ .

При  $D \rightarrow 1$  энергия  $E_{1s} \rightarrow -\infty$ , а средний радиус  $\langle r \rangle \rightarrow 0$ , что указывает на известное из квантовой механики [15] «падение на центр». Этот случай, описываемый гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{|z|}, \quad -\infty < z < \infty, \quad (D.5)$$

подробно рассмотрен в [21] (стр. 446 и далее), где показано, что гамильтониан (D.5) является эрмитовым, но не самосопряженным оператором (в соответствии с общей теорией сингулярных потенциалов в квантовой механике [24–26]), однако он допускает самосопряженное расширение. С физической точки зрения, введение дополнительного условия<sup>16)</sup> к гамильтониану (D.5) отвечает выбору того или иного способа обрезания потенциала  $U(z) = -1/|z|$  на малых расстояниях (в данном случае при  $|z| \lesssim a_H$ ). В качестве такого дополнительного условия можно задать положение нижнего уровня  $E_{1s}(H)$ , ср. со случаем потенциала [25]  $U(r) = -g^2/2r^2$  при  $g > l + 1/2$ .

Как видно из (D.2), при размерности  $D > 1$  спектр энергий ограничен снизу и падение на центр отсутствует.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович, ФТТ **1**, 1637 (1959); Я. Б. Зельдович, *Избранные труды. Частицы, ядра, Вселенная*, Наука, Москва (1985), с. 83.
2. L. I. Schiff and H. Snyder, Phys. Rev. **55**, 59 (1939).
3. R. H. Garstang, Rep. Progr. Phys. **40**, 105 (1977).
4. М. А. Либерман, Б. Йоханссон, УФН **165**, 121 (1995).
5. К. А. У. Lindgren and J. T. Virtamo, J. Phys. **B 12**, 3465 (1979); J. T. Virtamo and K. A. U. Lindgren, Phys. Lett. **71A**, 329 (1979).
6. G. Fonte, P. Falsaperla, G. Schiffrer, and D. Stanzial, Phys. Rev. A **41**, 5807 (1990).
7. S. P. Goldman and Z. Chen, Phys. Rev. Lett. **67**, 1403 (1991).
8. Z. Chen and S. P. Goldman, Phys. Rev. A **45**, 1722 (1992); **48**, 1107 (1993).

<sup>16)</sup> Необходимого для однозначного определения энергетического спектра.

9. Jang-Haur Wang and Chen-Shiung Hsue, Phys. Rev. A **52**, 4508 (1995).
10. D. Lai and E. E. Salpeter, Phys. Rev. A **53**, 152 (1996).
11. Yu. P. Kravchenko, M. A. Liberman, and B. Johansson, Phys. Rev. A **54**, 287 (1996).
12. В. М. Вайнберг, В. А. Гани, А. Е. Кудрявцев, ЖЭТФ **113**, 550 (1998).
13. V. A. Gani, A. E. Kudryavtsev, V. A. Lensky, and V. M. Weinberg, ЖЭТФ **123**, 457 (2003).
14. A. Y. Potekhin and A. V. Turbiner, Phys. Rev. A **63**, 065402 (2001).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Физматлит, Москва (2002).
16. H. Hasegawa and R. E. Howard, J. Phys. Chem. Sol. **21**, 179 (1961).
17. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
18. Б. М. Карнаков, Письма в ЖЭТФ **77**, 73 (2003).
19. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **77**, 79 (2003).
20. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York (1953).
21. В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган, *Задачи по квантовой механике*, Наука, Москва (1992).
22. В. С. Попов, ЖЭТФ **60**, 1228 (1971).
23. I. Pomeranchuk and Ya. Smorodinsky, J. Phys. USSR **9**, 97 (1945); И. Я. Померанчук, *Собрание научных трудов*, т. 2, Наука, Москва (1972), с. 21.
24. K. M. Case, Phys. Rev. **80**, 797 (1950).
25. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Vol. 2, McGraw-Hill, New York (1953) [перевод: Ф. М. Морс и Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, т. 2, Изд-во иностр. лит., Москва (1960), с. 616.
26. А. М. Переломов, В. С. Попов, ТМФ **4**, 48 (1970).
27. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **11**, 254 (1970); ЯФ **12**, 429 (1970).
28. Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, УФН **105**, 403 (1971).
29. А. Е. Кудрявцев, В. Е. Маркушин, И. С. Шапиро, ЖЭТФ **74**, 432 (1978).
30. H. van Haeringen, C. V. M. van der Mee, and R. van Wageningen, J. Math. Phys. **18**, 941 (1977).
31. H. van Haeringen and L. P. Kok, Phys. Rev. C **24**, 1827 (1981).
32. A. M. Badalyan, L. P. Kok, M. I. Polikarpov, and Yu. A. Simonov, Phys. Rep. **82**, 31 (1982).
33. L. P. Kok, J. W. de Maag, H. H. Brower, and H. van Haeringen, Phys. Rev. **26**, 2381 (1982).
34. Д. А. Киржниц, Ф. М. Пеньков, ЖЭТФ **82**, 657 (1982).
35. А. Е. Кудрявцев, В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **29**, 311 (1979).
36. Т. Л. Труeman, Nucl. Phys. **26**, 57(1961).
37. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **52**, 223 (1967).
38. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов, ДАН СССР **279**, 345 (1984).
39. В. М. Карнаков, А. Е. Кудрявцев, В. Д. Мур, and В. С. Попов, Nuovo Cim. B **98**, 63 (1987).
40. Б. М. Карнаков, А. Е. Кудрявцев, В. Д. Мур, В. С. Попов, ЖЭТФ **94**, 65 (1988).
41. В. С. Попов, А. Е. Кудрявцев, В. Д. Мур, ЖЭТФ **77**, 1727 (1979); **80**, 1271 (1981).
42. M. Izycki, G. Bakenstoss et al., Z. Phys. A **297**, 1 (1980).
43. V. S. Popov, in *Proc. Int. Conf. High Energy Nucl. Phys.*, Hungary (1987), p. 257; preprint ИТЕР №136, Moscow (1987).
44. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971).
45. D. R. Hartree, Proc. Camb. Phil. Soc. **24**, 89 (1927); *The calculation of Atomic Structures*, Wiley, New York (1957).
46. R. Loudon, Amer. J. Phys. **27**, 649 (1959).
47. V. A. Fock, Z. Phys. **98**, 145 (1935).
48. V. Bargmann, Z. Phys. **99**, 576 (1935).
49. Б. Б. Кадомцев, ЖЭТФ **58**, 1765 (1970).
50. Yu. E. Lozovik and A. V. Klyuchnik, Phys. Lett. **66A**, 282 (1978).
51. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Релятивистская квантовая теория*, т. 1, Наука, Москва (1968).
52. O. Dumbarris, R. Kock, J. J. de Swart, and P. Kroll, Nucl. Phys. B **216**, 277 (1983).

53. Н. А. Bethe, Phys. Rev. **76**, 38 (1949).
54. M. L. Goldberger and K. M. Watson, *Collision Theory*, Wiley, New York (1964) [перевод: М. Гольдбергер, К. Ватсон, *Теория столкновений*, Мир, Москва (1967)].
55. В. Д. Мур, А. Е. Кудрявцев, В. С. Попов, ЯФ **37**, 1417 (1983).
56. R. J. Elliott and R. Loudon, J. Phys. Chem. Sol. **15**, 196 (1960).
57. D. Grasso and H. Rubinstein, Phys. Rep. **348**, 163 (2001).
58. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).
59. L. Benassi, V. Grecchi, E. Harrell, and B. Simon, Phys. Rev. Lett. **42**, 704, 1430 (1979).
60. Д. И. Казаков, В. С. Попов, ЖЭТФ **122**, 675 (2002); Письма в ЖЭТФ **77**, 547 (2003).
61. С. П. Аллилуев, ЖЭТФ **33**, 200 (1957).
62. Г. Дьерди, Я. Реваи, ЖЭТФ **48**, 1445 (1965).