

РЕЗОНАНСНОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ ЧЕРЕЗ ДВУМЕРНУЮ НАНОСТРУКТУРУ С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ ПРОВОДНИКАМИ

В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, М. А. Пятаев*

*Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева
430000, Саранск, Россия*

Поступила в редакцию 21 апреля 2003 г.

Рассмотрен баллистический электронный транспорт через двухтерминальное наноустройство. Найдена явная формула для коэффициента прохождения электрона как функции его энергии. Получено уравнение, определяющее параметры резонансов Брейта–Вигнера и Фано. Найдены условия, при которых наблюдается коллапс резонансов Фано. Исследовано влияние параметров контактов и их взаимного расположения на транспортные свойства системы.

PACS: 73.23.Ad, 03.65.Nk, 73.40.Gk

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие изучение резонансного туннелирования электронов в квантовых наноструктурах вызывает постоянный интерес. Изучению резонансов и провалов в прозрачности посвящен ряд теоретических и экспериментальных работ. Электронный транспорт через кольцо Ааронова–Бома рассматривается в работах [1–4]. Туннелирование электронов через квантовые точки, различным образом присоединенные к проводникам, теоретически исследуется в [5–7]. Транспортные свойства кольцевого баллистического интерферометра изучаются в работах [8–10]. В ряде исследований [11–15] рассмотрено туннелирование в квазиодномерных и двумерных каналах, содержащих примеси, и показано, что в таких системах возможны два типа резонансов в прозрачности: обычные резонансы Брейта–Вигнера и асимметричные резонансы Фано. В трехмерных каналах и сужениях аналогичные резонансы также имеют место [16, 17].

Резонансы Фано обусловлены интерференцией локализованных состояний дискретного спектра с распространяющимися электронными волнами. В последнее время интерференционные явления, тесно связанные с резонансами Фано, активно изучаются как теоретически, так и экспериментально. Эти резонансы имеют универсальную природу и наблю-

дались в различных системах: при фотоионизации атомов, электронном и ионном рассеянии, рамановском рассеянии, фотоабсорбции в квантовых ямах и сверхрешетках. Экспериментально резонансы Фано в проводимости наблюдались в [18–20]. Повышенное внимание к данной проблеме обусловлено тем, что резонансные состояния ответственны за функционирование таких квантовых электронных приборов, как резонансный туннельный диод и резонансный транзистор. Недавние успехи в области нанотехнологий сделали возможным создание искривленных двумерных проводящих наноструктур различной геометрии. К ним относятся, в первую очередь, фуллерены и фуллереноподобные структуры с металлическим типом химической связи, а также металлические наносферы. В связи с этим ряд работ посвящен изучению транспортных свойств двумерного электронного газа на искривленных поверхностях [21, 22]. При этом особый интерес вызывает изучение туннелирования через наноструктуры, в которых движение частиц финитно, поскольку именно такие структуры способны стать основой для электронных устройств нового поколения.

До недавнего времени теоретическое исследование подобных наноструктур касалось в основном одномерных квантовых колец, что связано с трудностями, возникающими при моделировании контакта между системами различной размерности. Частные результаты в этом направлении были получены в

*E-mail: theorphysics@mrsu.ru

работах [23–25]. Общий подход к моделированию таких контактов разработан в [26]. В настоящей работе с использованием этого подхода исследуется баллистический электронный транспорт через двухтерминальное наноустройство, состоящее из наноструктуры \mathbf{S} конечного размера с присоединенными к ней двумя проводниками \mathbf{R}_1^+ и \mathbf{R}_2^+ . Проводники считаются одномерными и описываются полупрямыми $x \geq 0$. Что же касается наноструктуры \mathbf{S} , то используемый в работе общий метод получения коэффициента прохождения не требует каких-либо ограничений на ее геометрию. В частности, это может быть область трехмерного или двумерного пространства (квантовая точка), поверхность (квантовая сфера, квантовый тор и др.), а также одномерное квантовое кольцо. Оператор Шредингера, описывающий движение электрона в наноструктуре, может быть свободным гамильтонианом, а также может содержать потенциалы, в том числе векторный потенциал внешнего магнитного поля. В настоящей работе подробно рассмотрен достаточно общий случай, когда наноструктура \mathbf{S} представляет собой произвольную двумерную поверхность конечного размера. Важно подчеркнуть, что основные результаты статьи соответствуют случаю наноструктур произвольной геометрии.

2. ГАМИЛЬТониАН СИСТЕМЫ И КОЭФФИЦИЕНТ ПРОХОЖДЕНИЯ

Движение электронов в одномерном проводнике \mathbf{R}_j^+ описывается свободным гамильтонианом

$$H_j = p_x^2/2m,$$

где m — электронная эффективная масса, p_x — оператор импульса электрона в проводнике, а $j = 1, 2$ — номер проводника. Точки присоединения проводников к наноструктуре обозначим \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 . Волновые функции электрона в наноструктуре \mathbf{S} и в проводниках \mathbf{R}_j^+ будем обозначать соответственно ψ_S и ψ_j .

Для получения гамильтониана H всей системы необходимо наложить линейные граничные условия на волновую функцию в точках склейки. Как обычно, в одномерных проводниках \mathbf{R}_j^+ роль граничных параметров играют величины $\psi_j(0)$ и $\psi_j'(0)$. Для получения граничных условий в точках \mathbf{q}_j на поверхности \mathbf{S} необходимо рассматривать функции, имеющие логарифмическую сингулярность в этих точках [26]:

$$\psi_S(\mathbf{x}) = -u_j(\psi_S) \frac{m}{\pi \hbar^2} \ln \rho(\mathbf{x}, \mathbf{q}_j) + v_j(\psi_S) + R(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Здесь $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{q}_j)$ — геодезическое расстояние между точками \mathbf{x} и \mathbf{q}_j на поверхности, $R(\mathbf{x})$ — остаточный член, который стремится к нулю при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{q}_j$, а $u_j(\psi_S)$ и $v_j(\psi_S)$ — комплексные коэффициенты, которые и играют роль граничных значений для ψ_S в точках \mathbf{q}_j на \mathbf{S} . Необходимость рассмотрения сингулярных волновых функций вытекает из наличия аналогичной особенности у функции Грина $G_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E)$ оператора H_S при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$.

Ясно, что граничные условия, которые должны быть наложены на волновую функцию в точках контакта, представляют собой линейные соотношения между $\psi_j(0)$, $\psi_j'(0)$ и коэффициентами $u_j(\psi_S)$, $v_j(\psi_S)$. Следуя [26], будем записывать эти соотношения в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_j(\psi_S) &= \sum_{k=1}^2 \left[B_{jk} u_k(\psi_S) - \frac{\hbar^2}{2m} A_{jk} \psi_k'(0) \right], \\ \psi_j(0) &= \sum_{k=1}^2 \left[A_{kj}^* u_k(\psi_S) - \frac{\hbar^2}{2m} C_{jk} \psi_k'(0) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$j = 1, 2.$

Здесь элементы A_{jk} , B_{jk} и C_{jk} образуют комплексные матрицы порядка 2×2 , причем условие самосопряженности оператора H приводит к требованию эрмитовости матриц B и C . Физический смысл элементов этих матриц легко выяснить, обратившись к теории потенциалов нулевого радиуса [27]. С точки зрения этой теории диагональные элементы матрицы B определяют величину точечных возмущений оператора H_S в точках \mathbf{q}_j наноструктуры \mathbf{S} . Недиagonalные элементы этой матрицы соответствуют туннельной связи между точками \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 , и поэтому, если эффективный размер контактов много меньше расстояния между ними, эти элементы следует положить равными нулю (подробнее см. [28]). Аналогично, матрицу C считаем диагональной, а ее элемент C_{jj} интерпретируем как интенсивность потенциала нулевого радиуса в точке $x = 0$ из \mathbf{R}_j^+ .

Теперь рассмотрим матрицу A . Как видно из формулы (2), она отвечает за связь проводников с двумерной наноструктурой \mathbf{S} . Действительно, если $A = 0$, то граничные условия (2) распадаются на четыре независимых уравнения, два из которых содержат только волновую функцию на \mathbf{S} , а каждое из оставшихся — волновую функцию в одном из проводников, т. е. связь между проводниками и наноструктурой отсутствует. Если $A_{jk} \neq 0$ для $j \neq k$, то существуют нетривиальные граничные условия, связывающие проводник \mathbf{R}_j^+ с точкой \mathbf{q}_k , что соответствует туннельному перебросу электронов из одно-

го проводника в другой, минуя \mathbf{S} . Поэтому в случае одномерных проводников матрица A также должна быть диагональной. С учетом сказанного выше граничные условия для волновой функции выбраны в виде ($j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} v_j(\psi_S) &= B_{jj}u_j(\psi_S) - \frac{\hbar^2}{2m}A_{jj}\psi'_j(0), \\ \psi_j(0) &= A_{jj}^*u_j(\psi_S) - \frac{\hbar^2}{2m}C_{jj}\psi'_j(0). \end{aligned} \quad (3)$$

В соответствии с теорией рассеяния на потенциалах нулевого радиуса элементы матрицы B , описывающие точечные возмущения в точках \mathbf{q}_j на \mathbf{S} , и элементы матрицы C , описывающие точечные возмущения в точках $x = 0$ в проводниках, могут быть выражены через длины рассеяния λ_j^B и λ_j^C на этих возмущениях:

$$B_{jj} = -\frac{m \ln \lambda_j^B}{\pi \hbar^2}, \quad C_{jj} = -\frac{m \lambda_j^C}{2 \hbar^2}.$$

Чтобы придать удобную форму дальнейшим выкладкам, введем длины рассеяния λ_j^A для параметров A_{jj} по формуле

$$A_{jj} = \frac{m}{\hbar^2} \sqrt{\lambda_j^A} e^{i\phi_j},$$

где ϕ_j — аргумент комплексного числа A_{jj} .

При энергиях, не совпадающих с собственными числами E_n гамильтониана H_S , решение уравнения Шредингера, нормированное на падающую волну единичной амплитуды в \mathbf{R}_1^+ , имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_S(\mathbf{x}) &= \xi_1(E)G_S(\mathbf{x}, \mathbf{q}_1; E) + \\ &\quad + \xi_2(E)G_S(\mathbf{x}, \mathbf{q}_2; E), \\ \psi_1(x) &= e^{-ikx} + r_{11}(E)e^{ikx}, \\ \psi_2(x) &= t_{12}(E)e^{ikx}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ — волновой вектор электрона, $\xi_1(E)$ и $\xi_2(E)$ — комплексные числа, а $r_{11}(E)$ и $t_{12}(E)$ — амплитудные коэффициенты соответственно отражения и прохождения электрона. Рассматривая в окрестности точек \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 асимптотику (1) для волновой функции $\psi_S(\mathbf{x})$ из (4), найдем

$$u_j = \xi_j(E), \quad v_j = Q_{jj}(E)\xi_j(E) + Q_{ji}(E)\xi_i(E).$$

Здесь $Q(E)$ — матрица порядка 2×2 , элементы кото-

рой выражаются через функцию Грина $G_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E)$ по формуле

$$Q_{ij}(E) = \begin{cases} G_S(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j; E), & i \neq j, \\ \lim_{\mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{q}_j} \left[G_S(\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_i; E) + \frac{m}{\pi \hbar^2} \ln \rho(\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_i) \right], & i = j. \end{cases} \quad (5)$$

Подставляя решение вида (4) в граничные условия (3), получим систему уравнений для коэффициентов r_{11} , t_{12} , ξ_1 , ξ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{ik\hbar^2 A_{11}}{2m} r_{11} + (Q_{11}(E) - B_{11}) \xi_1 + Q_{12}(E) \xi_2 &= \frac{ik\hbar^2 A_{11}}{2m}, \\ \frac{ik\hbar^2 A_{22}}{2m} t_{12} + Q_{21}(E) \xi_1 + (Q_{22}(E) - B_{22}) \xi_2 &= 0, \\ \left(1 + \frac{ik\hbar^2 C_{11}}{2m} \right) r_{11} - A_{11}^* \xi_1 &= \frac{ik\hbar^2 C_{11}}{2m} - 1, \\ \left(1 + \frac{ik\hbar^2 C_{22}}{2m} \right) t_{12} - A_{22}^* \xi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем для удобства безразмерные элементы матрицы Q по формуле

$$\tilde{Q}(E) = \frac{\hbar^2}{m} [Q(E) - B]$$

и выразим элементы матриц A и C через введенные выше длины рассеяния λ_j^A и λ_j^C . Тогда из системы (6) получим

$$\begin{aligned} r_{11}(E) &= \Delta^{-1}(E) \left[(k\lambda_1^C - 4i)(k\lambda_2^C + 4i) \det \tilde{Q}(E) - \right. \\ &\quad - 2k\lambda_2^A(k\lambda_1^C - 4i)\tilde{Q}_{11}(E) - \\ &\quad \left. - 2k\lambda_1^A(k\lambda_2^C + 4i)\tilde{Q}_{22}(E) + 4k^2\lambda_1^A\lambda_2^A \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} t_{12}(E) &= 16ik \exp[i(\phi_1 - \phi_2)] \times \\ &\quad \times \sqrt{\lambda_1^A\lambda_2^A} \tilde{Q}_{21}(E) \Delta^{-1}(E), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(E) &= (k\lambda_1^C + 4i)(k\lambda_2^C + 4i) \det \tilde{Q}(E) - \\ &\quad - 2k\lambda_2^A(k\lambda_1^C + 4i)\tilde{Q}_{11}(E) - \\ &\quad - 2k\lambda_1^A(k\lambda_2^C + 4i)\tilde{Q}_{22}(E) + 4k^2\lambda_1^A\lambda_2^A. \end{aligned} \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что матрица рассеяния унитарна, в частности, справедливо соотношение $|r_{11}|^2 + |t_{12}|^2 = 1$, выражающее закон сохранения потока частиц. Отметим, что при $\rho(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \rightarrow 0$ формулы (7) и (8) неприменимы, так как в этом случае нельзя пренебрегать недиагональными компонентами матриц A , B и C .

3. РЕЗОНАНСНАЯ СТРУКТУРА КОЭФФИЦИЕНТА ПРОХОЖДЕНИЯ

Как видно из формул (8) и (9), энергетическая зависимость коэффициента прохождения содержит шесть феноменологических параметров: λ_j^A , λ_j^B и λ_j^C ($j = 1, 2$). Хотя в общем случае длины рассеяния оказывают довольно значительное влияние на функцию $t_{12}(E)$, имеется ряд эффектов, не зависящих от величины этих параметров. С этих эффектов мы и начнем наше рассмотрение, а затем обсудим влияние длин рассеяния.

В общем случае коэффициент прохождения $T_{12}(E) \equiv |t_{12}(E)|^2$ электрона из первого проводника во второй имеет нули двух различных типов: нули первого типа располагаются в точках E_n спектра оператора H_S и связаны с наличием полюсов у $Q_{ij}(E)$ в этих точках. При этом в общем случае знаменатель в формуле (8) имеет полюс второго порядка, а числитель — только первого, поэтому коэффициент прохождения $T_{12}(E)$ обращается в нуль в этих точках. Отметим, что положение нулей первого типа не зависит от расстояния между контактами. Нули второго типа обусловлены числителем в формуле (8) и совпадают с нулями функции $\tilde{Q}_{21}(E)$. Их положение на энергетической оси зависит от взаимного расположения точек \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 на поверхности \mathbf{S} .

Как следует из граничных условий (3), коэффициент прохождения обращается в нуль в том и только в том случае, когда волновая функция электрона $\psi_S(\mathbf{x})$ равна нулю в точке \mathbf{q}_2 второго контакта. При наличии в первом проводнике падающей волны единичной амплитуды коэффициенты $\xi_1(E)$ и $\xi_2(E)$ в формуле (4) имеют вид

$$\xi_1(E) = \frac{4\hbar^2 k \sqrt{\lambda_1^A}}{m\Delta(E)} \exp(i\phi_1) \times \left[2k\lambda_2^A - (k\lambda_2^C + 4i)\tilde{Q}_{22}(E) \right], \quad (10)$$

$$\xi_2(E) = \frac{4\hbar^2 k \sqrt{\lambda_1^A}}{m\Delta(E)} \exp(i\phi_1) (k\lambda_2^C + 4i)\tilde{Q}_{21}(E). \quad (11)$$

Поскольку функция Грина представляет собой волну от точечного источника, можно сказать, что каждое слагаемое $\xi_j(E)G_S(\mathbf{x}, \mathbf{q}_j; E)$ в формуле (4) представляет собой суперпозицию расходящихся и сходящихся к точке \mathbf{q}_j волн. Как видно из уравнений (4) и (11), при $\tilde{Q}_{21}(E) = 0$ исходящая из точки \mathbf{q}_1 волна $\xi_1(E)G_S(\mathbf{x}, \mathbf{q}_1; E)$ имеет узел в точке \mathbf{q}_2 , так как $G_S(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1; E)$ в этом случае обращается в

нуль. При этом сходящаяся к точке \mathbf{q}_2 волна не возникает, поскольку обращается в нуль коэффициент $\xi_2(E)$ и вероятность нахождения электрона вблизи второго контакта обращается в нуль; как следствие, электрон не попадает во второй проводник и прозрачность системы оказывается равной нулю.

Для исследования волновой функции электрона при энергиях, совпадающих с собственными значениями E_n оператора H_S , представим элементы матрицы $\tilde{Q}_{ij}(E)$ в виде

$$\tilde{Q}_{ij}(E) \approx \frac{\alpha_{ij}}{E - E_n} + \beta_{ij}. \quad (12)$$

Тогда

$$\det \tilde{Q}(E) \approx \frac{\det \alpha}{(E - E_n)^2} + \frac{\chi}{E - E_n}, \quad (13)$$

где

$$\chi = \alpha_{11}\beta_{22} + \alpha_{22}\beta_{11} - \alpha_{12}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{12}.$$

Как следует из (5), величины α_{ij} можно записать в виде

$$\alpha_{ij} = -\frac{\hbar^2}{m} \sum_{l=1}^{\nu} \varphi_l(\mathbf{q}_i) \varphi_l^*(\mathbf{q}_j). \quad (14)$$

где $\varphi_l(\mathbf{x})$ — ортонормированный базис собственного подпространства оператора H_S , отвечающий ν -кратно вырожденному уровню E_n . Подставляя асимптотику (12) функций $Q_{ij}(E)$ в решение (4) уравнения Шредингера и переходя к пределу $E \rightarrow E_n$, получим следующее выражение для $\psi_S(\mathbf{x})$ в случае $\det \alpha \neq 0$:

$$\psi_S(\mathbf{x}) = \frac{4\hbar^2 k \sqrt{\lambda_1^A} e^{i\phi_1}}{m(k\lambda_1^C + 4i) \det \alpha} \times \sum_{l=1}^{\nu} \varphi_l(\mathbf{x}) [\alpha_{22} \varphi_l^*(\mathbf{q}_1) - \alpha_{21} \varphi_l^*(\mathbf{q}_2)]. \quad (15)$$

В этом случае у волновой функции отсутствуют сингулярности в точках контактов и она не интерпретируется как суперпозиция сходящихся и расходящихся волн. Можно сказать, что при $E = E_n$ волновая функция электрона на поверхности \mathbf{S} описывает стоячую волну, имеющую узел в точке \mathbf{q}_2 .

Кроме функций, определяемых формулой (15), в решение уравнения Шредингера для H при $E = E_n$ войдут также линейные комбинации вида

$$\psi_S(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{\nu} C_l \varphi_l(\mathbf{x}), \quad (16)$$

обращающиеся в нуль в обеих точках склейки. В отличие от состояний рассеяния, содержащих $\exp(\pm ikx)$, волновые функции вида (16) могут быть нормированы и соответствуют дискретному энергетическому уровню, погруженному в непрерывный спектр. Электроны, находящиеся в таких состояниях, локализованы на поверхности \mathbf{S} и не принимают участия в проводимости. В общем случае при $\det \alpha \neq 0$ кратность вырождения нормируемых состояний в спектре гамильтониана H меньше кратности ν вырождения соответствующих уровней невозмущенного гамильтониана H_S на два, поскольку требование обращения в нуль волновых функций в точках контактов накладывает два дополнительных условия на коэффициенты C_l линейной комбинации (16). Однако если при каком-либо расположении контактов величина $\det \alpha$ обращается в нуль, то эти условия оказываются эквивалентными и кратность вырождения уровня понижается лишь на единицу. Кроме того, на поверхности общего вида могут найтись такие точки, в которых все собственные функции соответствующего уровня могут обратиться в нуль; в таком случае при подсоединении проводников к этим точкам кратность уровня не изменится.

Таким образом, при $E = E_n$ возможны два типа волновых функций: локализованные и делокализованные. Это обусловлено тем, что можно приготовить два различных типа состояний с одной и той же энергией путем различного выбора граничных условий.

Рассмотрим теперь, как спектральные свойства оператора H сказываются на электронном транспорте в исследуемой системе. Наличие нулей коэффициента прохождения в некоторых точках, а также присутствие в системе дискретных энергетических уровней, погруженных в непрерывный спектр, говорит о резонансном характере рассеяния. Как хорошо известно, резонансные пики коэффициента прохождения связаны с наличием полюсов у матрицы рассеяния в комплексной плоскости энергии. Поскольку матрица рассеяния унитарна при действительных значениях энергии, амплитуда рассеяния $t_{12}(E)$ не имеет полюсов на действительной оси. Однако имеются полюсы на нефизическом листе римановой поверхности, положение которых определяется уравнением $\Delta(E) = 0$. В окрестностях этих полюсов коэффициент прохождения (8) может быть представлен в виде

$$t_{12}(E) \approx \eta \frac{i\Gamma}{E - E_R - i\Gamma}, \quad (17)$$

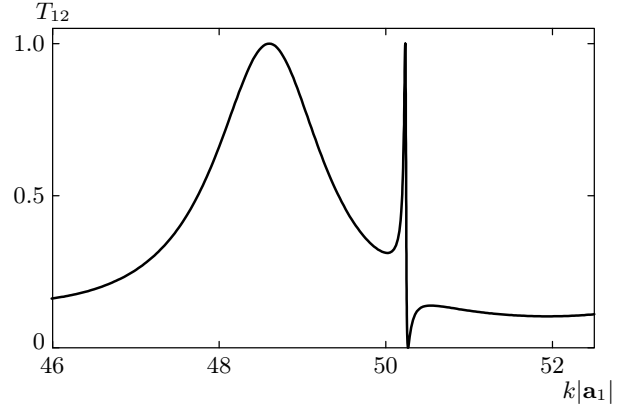


Рис. 1. Характерная форма резонанса Брейта-Вигнера (в области $47 < k|a_1| < 49$) и резонанса Фано (в области $49 < k|a_1| < 51$) для случая квантового тора. Здесь $|a_1|$ — длина большей из образующих тора

где E_R — энергия, определяющая положение резонанса, Γ — полуширина резонансной кривой, а η — нормировочная константа. Оба параметра резонанса, E_R и Γ , могут быть получены из решения трансцендентного уравнения $\Delta(E) = 0$.

Как показывает дальнейший анализ, наряду с обычными резонансами Брейта-Вигнера, описываемыми формулой (17), в системе также наблюдаются асимметричные резонансы Фано, которые характеризуются близко расположенными нулем и пиком амплитуды рассеяния. Форма резонансов Брейта-Вигнера и Фано для рассматриваемого ниже примера — электронного транспорта через квантовый тор — показана на рис. 1. Аналогичная форма резонансов характерна и для других случаев.

В изучаемой системе нули коэффициента прохождения, связанные с резонансами Фано, располагаются в точках спектра невозмущенного гамильтониана H_S . Воспользовавшись асимптотикой (12) функции $Q_{ij}(E)$ в окрестности E_n и сохраняя в числителе и знаменателе формулы (8) линейные по $E - E_n$ члены, запишем коэффициент прохождения $t_{12}(E)$ вблизи E_n в виде

$$t_{12}(E) \approx \eta \frac{E - E_n}{E - E_R - i\Gamma}, \quad (18)$$

где

$$E_R + i\Gamma = E_n - \frac{(k\lambda_1^C + 4i)(k\lambda_2^C + 4i) \det \alpha}{D(E)}, \quad (19)$$

$$\eta = \frac{16ik \sqrt{\lambda_1^A \lambda_2^A} \exp[i(\phi_1 - \phi_2)] \alpha_{21}}{D(E)},$$

$$D(E) = (k\lambda_1^C + 4i)(k\lambda_2^C + 4i)\chi - 2k\lambda_2^A(k\lambda_1^C + 4i)\alpha_{11} - 2k\lambda_1^A(k\lambda_2^C + 4i)\alpha_{22}. \quad (20)$$

Из выражения (18) видно, что в окрестности спектральных значений E_n оператора H_S энергетическая зависимость коэффициента прохождения действительно имеет структуру резонанса Фано. Как следует из соотношения (19), параметры резонанса Фано E_R и Γ связаны с длинами рассеяния λ^A , λ^B и λ^C формулами

$$E_R = E_n - \det \alpha |D(E)|^{-2} \times \{ |(k\lambda_1^C + 4i)(k\lambda_2^C + 4i)|^2 \chi - 2k^2[\lambda_2^A\lambda_2^C((k\lambda_1^C)^2 + 16)\alpha_{11} + \lambda_1^A\lambda_1^C((k\lambda_2^C)^2 + 16)\alpha_{22}] \}, \quad (21)$$

$$\Gamma = 8k\{\lambda_2^A[(k\lambda_1^C)^2 + 16]\alpha_{11} + \lambda_1^A[(k\lambda_2^C)^2 + 16]\alpha_{22}\} \det \alpha |D(E)|^{-2}. \quad (22)$$

Как видно из (21) и (22), параметры резонансов Фано в значительной степени определяются вычетами α_{ij} функций $Q_{ij}(E)$, и если при каком-либо расположении проводников величина $\det \alpha$ обращается в нуль в спектральной точке E_n , то происходит коллапс резонанса Фано в окрестности этой точки. При этом полюс $E_R + i\Gamma$ и нуль E_n коэффициента прохождения совпадают и сокращаются.

Воспользовавшись формулой (14), получим следующее выражение:

$$\det \alpha = -\frac{\hbar^4}{m^2} \sum_{l,l'} \varphi_l^*(\mathbf{q}_1)\varphi_{l'}^*(\mathbf{q}_2) \times [\varphi_l(\mathbf{q}_1)\varphi_{l'}(\mathbf{q}_2) - \varphi_l(\mathbf{q}_2)\varphi_{l'}(\mathbf{q}_1)] = -\frac{\hbar^4}{2m^2} \sum_{l,l'} |M_{ll'}|^2, \quad (23)$$

где $M_{ll'} = \varphi_l(\mathbf{q}_1)\varphi_{l'}(\mathbf{q}_2) - \varphi_l(\mathbf{q}_2)\varphi_{l'}(\mathbf{q}_1)$. Как следует из (23), величина $\det \alpha$ обращается в нуль в том и только в том случае, когда все $M_{ll'}$ равны нулю, т. е. когда выполняется соотношение

$$\frac{\varphi_1(\mathbf{q}_1)}{\varphi_1(\mathbf{q}_2)} = \frac{\varphi_2(\mathbf{q}_1)}{\varphi_2(\mathbf{q}_2)} = \dots = \frac{\varphi_\nu(\mathbf{q}_1)}{\varphi_\nu(\mathbf{q}_2)}. \quad (24)$$

Из (23) видно, что в случае невырожденного уровня E_n равенство $\det \alpha = 0$ превращается в тождество, следовательно, резонансы Фано не возникают в окрестности невырожденных уровней оператора H_S .

Теперь рассмотрим влияние параметров контактов на коэффициент прохождения. Воспользовавшись соотношением $|r_{11}|^2 + |t_{12}|^2 = 1$, запишем коэффициент прохождения $T_{12}(E)$ в виде

$$T_{12} = \frac{|t_{12}|^2}{|r_{11}|^2 + |t_{12}|^2} = \frac{1}{1 + |r_{11}/t_{12}|^2}. \quad (25)$$

Такая форма записи удобна, поскольку позволяет вместо функции $T_{12}(E)$ исследовать вспомогательную функцию $f(E) = r_{11}(E)/t_{12}(E)$, для которой выражение через $\tilde{Q}(E)$ оказывается несколько проще. Воспользовавшись формулами (7) и (8), получим

$$|f(E)|^2 = \frac{f_1^2(E) + f_2^2(E)}{16k^2\lambda_1^A\lambda_2^A|\tilde{Q}_{21}(E)|^2}, \quad (26)$$

где $f_1(E)$ и $f_2(E)$ — действительные функции:

$$f_1(E) = (k^2\lambda_1^C\lambda_2^C + 16) \det \tilde{Q}(E) - 2k^2[\lambda_1^C\lambda_2^A\tilde{Q}_{11}(E) + \lambda_2^C\lambda_1^A\tilde{Q}_{22}(E)] + 4k^2\lambda_1^A\lambda_2^A, \quad (27)$$

$$f_2(E) = 4k(\lambda_1^C - \lambda_2^C) \det \tilde{Q}(E) + 8k[\lambda_2^A\tilde{Q}_{11}(E) - \lambda_1^A\tilde{Q}_{22}(E)]. \quad (28)$$

Рассмотрим подробнее практически важный частный случай одинаковых контактов, которому соответствуют скалярные матрицы A , B и C . В этом случае будем обозначать просто $\lambda_j^A \equiv \lambda^A$, $\lambda_j^B \equiv \lambda^B$, $\lambda_j^C \equiv \lambda^C$. Если при этом $\tilde{Q}_{11}(E) \equiv \tilde{Q}_{22}(E)$, что имеет место, например, в рассматриваемых ниже примерах, то величина $f_2(E)$ обращается в нуль тождественно, а выражение для $f(E)$ принимает наиболее простой вид:

$$f(E) = \frac{1}{16ik\lambda^A\tilde{Q}_{21}(E)} \{ [(k\lambda^C)^2 + 16] \det \tilde{Q}(E) - 2k^2\lambda^C\lambda^A[\tilde{Q}_{11}(E) + \tilde{Q}_{22}(E)] + 4(k\lambda^A)^2 \}. \quad (29)$$

Как видно из формулы (28), если какое-либо из равенств $\lambda_1^A = \lambda_2^A$, $\lambda_1^B = \lambda_2^B$ или $\lambda_1^C = \lambda_2^C$ не выполняется, то тождество $f_2(E) \equiv 0$ уже не имеет места. В таком случае, для того чтобы коэффициент прохождения был строго равен единице, необходимо одновременное обращение в нуль двух различных функций, $f_1(E)$ и $f_2(E)$, что требует специального подбора параметров. Поэтому в общем случае одинаковых контактов максимумы на кривой $T_{12}(E)$ не доходят до единицы. Таким образом, асимметрия контактов приводит к уменьшению высоты пиков коэффициента прохождения.

Теперь рассмотрим влияние на коэффициент прохождения длин рассеяния λ^A и λ^C . Для краткости ограничимся случаем одинаковых контактов. Как видно из формулы (29), при $k|\lambda^C| \rightarrow \infty$ прозрачность системы стремится к нулю всюду за исключением малой окрестности точек, в которых $\det \tilde{Q}(E) = 0$. В этом случае доминирующим членом в числителе формулы (29) является $(k\lambda^C)^2 \det \tilde{Q}(E)$, поэтому в окрестности точки $\det \tilde{Q}(E) = 0$ всегда найдется такое значение энергии, при котором $f(E) = 0$, а коэффициент прохождения равен единице. Таким образом, в пределе больших $|\lambda^C|$ зависимость $T_{12}(E)$ представляет собой серию очень узких и высоких (доходящих до единицы) резонансов, ширина которых уменьшается с ростом $|\lambda^C|$. Отметим, что предел $|\lambda^C| \rightarrow \infty$, как показывает формула (3), соответствует разрыву связи между наноструктурой и проводниками; естественно, что прозрачность системы в этом случае стремится к нулю. Аналогичные явления имеют место и при $\lambda^A \rightarrow 0$, что, как видно из граничных условий (3), также соответствует отсутствию связи между проводниками и наноструктурой.

В случаях $\lambda^B \rightarrow 0$ и $\lambda^B \rightarrow \infty$, которые соответствуют отсутствию точечных возмущений в двумерной наноструктуре, прозрачность системы также представляет собой серию узких резонансов, вне которых коэффициент прохождения стремится к нулю, поскольку в этом случае диагональные элементы матрицы $Q(E)$ будут велики всюду, за исключением малой области вблизи точек E_n , и знаменатель коэффициента прохождения будет велик по сравнению с числителем.

4. РЕЗОНАНСЫ В КВАНТОВОЙ СФЕРЕ И КВАНТОВОМ ТОРЕ

В качестве приложения развитой теории рассмотрим две замкнутые поверхности разной топологии: квантовую сферу и квантовый тор. Отметим, что в [25] были получены формулы для коэффициента прохождения электрона через квантовую сферу с присоединенными проводниками, однако структура резонансов Фано не была изучена. В случае сферы радиуса r гамильтониан H_S имеет вид

$$H_S = \mathbf{L}^2 / 2mr^2,$$

где \mathbf{L} — оператор момента импульса. Функция Грина $G_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E)$ в этом случае может быть записана в

виде [29]

$$G_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; E) = \frac{m}{2\hbar^2} \frac{1}{\cos(\pi t(E))} \times \\ \times \mathcal{P}_{t(E)-1/2} \left(-\cos \left(\frac{\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{r} \right) \right), \quad (30)$$

где $\mathcal{P}_\nu(x)$ — функция Лежандра, а $t(E) = \sqrt{r^2 k^2 + 1/4}$. Отсюда по формуле (5) легко получить недиагональные элементы матрицы $Q(E)$. Диагональные элементы этой матрицы для случая сферы равны [25]

$$Q_{11}(E) = Q_{22}(E) = -\frac{m}{\pi\hbar^2} \times \\ \times \left[\Psi \left(\frac{1}{2} + t(E) \right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg}(\pi t(E)) - \ln(2r) + C_E \right], \quad (31)$$

где $\Psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции, а C_E — постоянная Эйлера.

Условие (24) коллапса резонансов Фано в окрестности $E_l = \hbar^2 l(l+1)/2mr^2$ можно записать в виде

$$P_l^2 \left(-\cos \left(\frac{\rho(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)}{r} \right) \right) = 1, \quad (32)$$

где $P_l(x)$ — полином Лежандра. Это условие выполняется для всех l одновременно, если $\rho(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \pi r$, поскольку $P_l(1) \equiv 1$. Таким образом, при диаметрально противоположном присоединении проводников к сфере происходит коллапс сразу всех резонансов Фано. При этом функция $Q_{12}(E)$ не обращается в нуль, на кривой $T_{12}(E)$ исчезают нули обоих типов и режим транспорта качественно изменяется (рис. 2). Отметим, что при $|x| < 1$ для всех значений l справедливо неравенство $|P_l(x)| < 1$ [30], поэтому коллапс резонансов Фано на сфере происходит лишь при единственном положении контактов.

Теперь перейдем к рассмотрению квантового тора. Движение электрона на торе будем описывать гамильтонианом двумерного свободного движения с периодическими граничными условиями по двум направлениям. Для описания этих условий удобно ввести прямоугольную решетку Λ в \mathbf{R}^2 с базисными векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$:

$$\Lambda = \{n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 : n_j \in \mathbf{Z}, j = 1, 2\}.$$

Для однозначности будем считать, что $|\mathbf{a}_1| > |\mathbf{a}_2|$. Потребуем, чтобы все функции ψ_S из области определения гамильтониана тора удовлетворяли соотношению

$$\psi_S(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \psi_S(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{a} \in \Lambda. \quad (33)$$

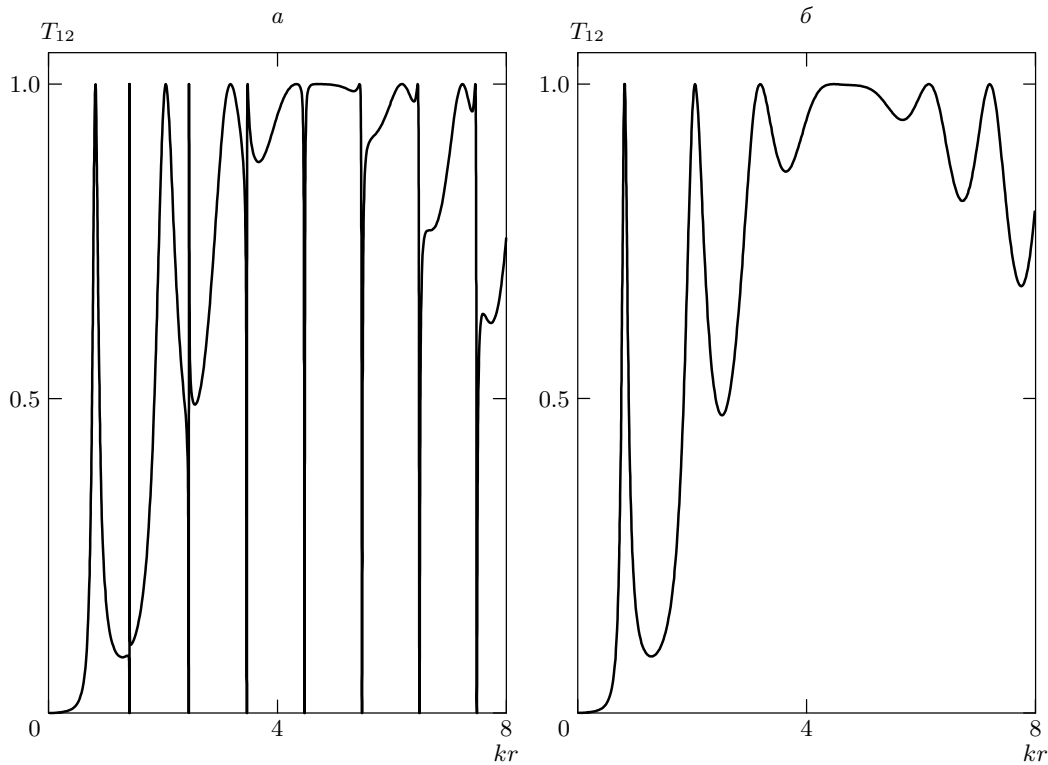


Рис. 2. Резонансная структура коэффициента прохождения через квантовую сферу при $\lambda_j^A = \lambda_j^B = \lambda_j^C = 0.2r$:
 $a - \rho(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) = 0.94\pi r$; $b - \rho(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) = \pi r$ (коллапс резонансов Фано)

Тогда гамильтониан тора представляет собой оператор

$$H_S = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right), \quad (34)$$

действующий на функциях, удовлетворяющих условию (33).

Определим явный вид функции $Q_{ij}(E)$ для квантового тора. Обозначим через S площадь элементарной ячейки Λ и введем Ω — дуальную решетку для Λ , т. е. решетку с базисными векторами \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 , удовлетворяющими условиям $\mathbf{a}_j \mathbf{b}_k = 2\pi \delta_{jk}$. В этом случае спектральные значения оператора H_S могут быть записаны в виде $E_{\mathbf{b}} = \hbar^2 \mathbf{b}^2 / 2m$. Соответствующая собственная функция равна

$$\varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{S}} e^{i\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}}.$$

Ясно, что все состояния невозмущенного гамильтониана тора, кроме основного, вырождены, поскольку волновые функции, определяемые векторами \mathbf{b} и $-\mathbf{b}$, соответствуют одной и той же энергии, более того, в общем случае все состояния, определяемые векторами $\mathbf{b} = n_1 \mathbf{b}_1 + n_2 \mathbf{b}_2$ с ненулевыми n_1 и n_2 ,

вырождены четырехкратно. Если же отношение образующих тора $|\mathbf{a}_1|/|\mathbf{a}_2|$ рационально, то гамильтониан H_S может иметь и более чем четырехкратно вырожденные уровни.

На основании формулы (5) матрица $Q_{ij}(E)$ для тора может быть записана в виде [31]

$$Q_{ij}(E) = \frac{2m}{S\hbar^2} \times \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \Omega \\ |\mathbf{b}| \leq \omega}} \left[\frac{\exp[i\mathbf{b} \cdot (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)]}{|\mathbf{b}|^2 - k^2} + \frac{S}{2\pi} \delta_{ij} \ln \omega \right]. \quad (35)$$

Используя формулу суммирования Пуассона, можно получить для $Q_{ij}(E)$ представление в виде абсолютно сходящегося ряда:

$$Q_{ij}(E) = \frac{2m}{\hbar^2} \left\{ \frac{S^{-1} + k^2}{S} \times \sum_{\mathbf{b} \in \Omega} \frac{\exp[i\mathbf{b} \cdot (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)]}{(|\mathbf{b}|^2 - k^2)(|\mathbf{b}|^2 + S^{-1})} + \kappa(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \right\}, \quad (36)$$

где

$$\kappa(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{a} \in \Lambda} K_0\left(\frac{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|}{\sqrt{S}}\right), & \mathbf{x} \notin \Lambda, \\ \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda \\ \mathbf{a} \neq 0}} K_0\left(\frac{|\mathbf{a}|}{\sqrt{S}}\right) + \ln 2 - C_E \right], & \mathbf{x} \in \Lambda. \end{cases}$$

Здесь $K_0(x)$ — функция Макдональда. Зависимость коэффициента прохождения электрона через квантовый тор от волнового числа k для случая общего положения контактов показана на рис. 3. Видно, что кривая содержит резонансы Фано и Брейта–Вигнера, а также нули, не связанные с резонансами.

В случае тора состояние однозначно определяется вектором обратной решетки \mathbf{b} , и условие (24) коллапса резонансов Фано может быть записано в виде

$$\exp[i\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)] = \exp[i\mathbf{b}_2 \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)] = \dots = \exp[i\mathbf{b}_\nu \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)], \quad (37)$$

где \mathbf{b}_i — векторы, соответствующие состояниям ν -кратно вырожденного уровня E_n : $|\mathbf{b}_i|^2 = 2mE_n/\hbar^2$. Для двукратно вырожденных уровней это условие принимает наиболее простой вид: $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Нетрудно проверить, что при $\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = 0.5\mathbf{a}_1$ условие (37) выполняется для всех двукратно и четырехкратно вырожденных уровней. Поэтому при несоизмеримых образующих

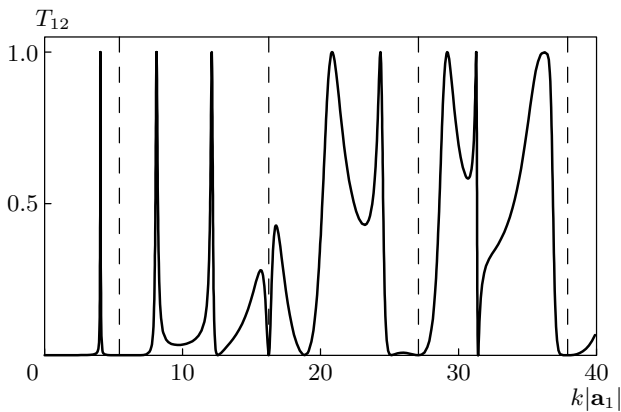


Рис. 3. Коэффициент прохождения электрона через квантовый тор как функция безразмерного параметра $k|\mathbf{a}_1|$ при $|\mathbf{a}_2| = 0.01|\mathbf{a}_1|$, $\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = 0.21\mathbf{a}_1$, $\lambda_j^A = \lambda_j^B = \lambda_j^C = 0.1|\mathbf{a}_1|$. Штриховыми линиями обозначены положения нулей второго типа

тора в случае $\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = 0.5\mathbf{a}_1$ происходит коллапс всех резонансов Фано, однако нули второго типа, связанные с $Q_{12}(E)$, сохраняются (рис. 4).

Отметим, что в обоих рассмотренных выше примерах равенство $Q_{11}(E) = Q_{22}(E)$ выполняется при любом расположении точек \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 , поэтому в случае одинаковых контактов резонансные максимумы могут достигать единицы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена явная формула для коэффициента прохождения электрона через двумерную наноструктуру \mathbf{S} , помещенную между двумя одномерными проводниками. Показано, что в общем случае в системе наблюдаются резонансы двух типов: резонансы Брейта–Вигнера и Фано. Найдено условие коллапса резонансов Фано (24), при выполнении которого ширина резонансов обращается в нуль и возникают дискретные энергетические уровни, погруженные в непрерывный спектр. Установлено, что для возникновения резонансов Фано в рассматриваемой системе необходимо вырождение энергетических уровней исходного гамильтониана H_S .

В отличие от работ [5–7], разработанный в статье метод получения параметров матрицы рассеяния позволяет явно учесть влияние геометрии наноструктуры на электронный транспорт в устройстве. Геометрические особенности нанорезонатора приводят к различию в поведении резонансов и нулей функции $T_{12}(E)$. В частности, симметрия сферы приводит к коллапсу всех резонансов Фано и исчезновению всех нулей при диаметрально противоположном расположении проводников, причем в остальных случаях коллапс не наблюдается. В отличие от сферы, на торе коллапс происходит при соблюдении условия (37), которое удовлетворяется при многих положениях контактов, но при этом часть нулей на графике $T_{12}(E)$ всегда сохраняется.

Рассмотрим подробнее случай, когда одна из образующих тора значительно больше другой, $|\mathbf{a}_1| \gg |\mathbf{a}_2|$, что близко к геометрии нанотрубки, свернутой в тор. В этом случае при энергиях меньших $\hbar^2\mathbf{b}_2^2/2m$ основной вклад в $Q_{ij}(E)$ вносят состояния с малыми энергиями, определяемые векторами $\mathbf{b} = n\mathbf{b}_1$ с $n < |\mathbf{a}_1|/|\mathbf{a}_2|$. Поэтому при рассматриваемых значениях энергии функция $Q_{ij}(E)$ для тора с точностью до размерного множителя аппроксимирует аналогичную функцию для кольца. Такая ситуация соответствует тому, что

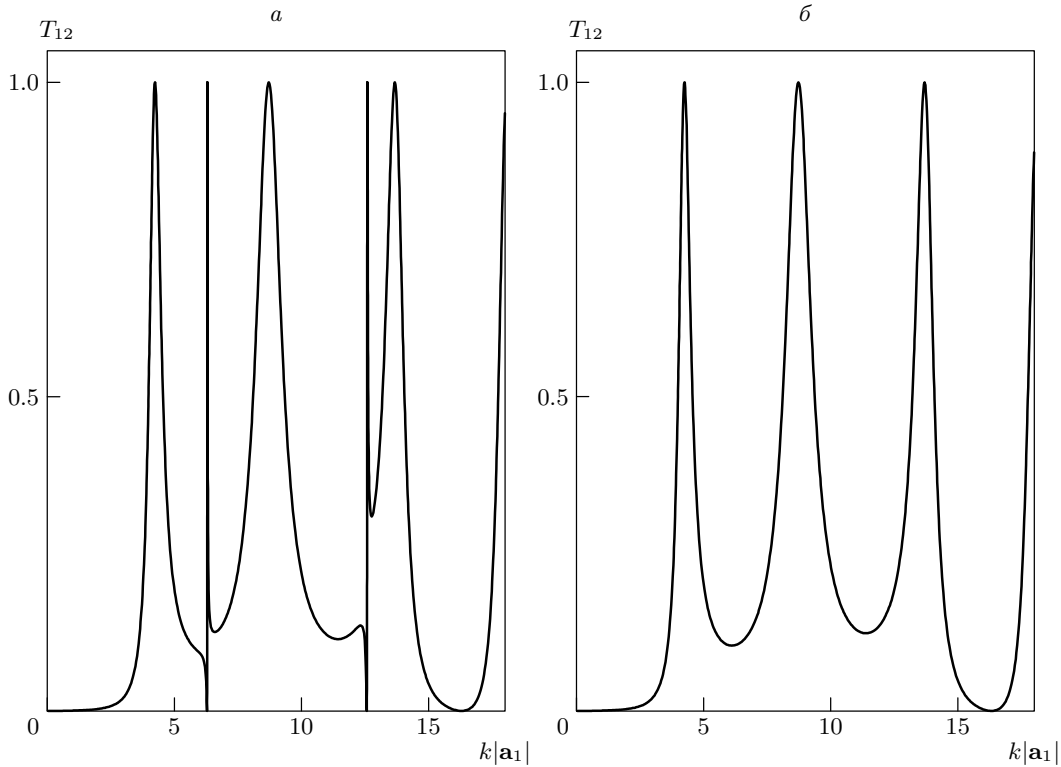


Рис. 4. Резонансная структура коэффициента прохождения через квантовый тор при $|a_2| = |a_1|/e$, $\lambda_j^A = \lambda_j^B = \lambda_j^C = 0.02|a_1|$: $a - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = 0.48\mathbf{a}_1$; $b - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = 0.5\mathbf{a}_1$

электронные моды, отвечающие движению вдоль меньшей из образующих тора, не возбуждаются при $E < \hbar^2 \mathbf{b}_2^2 / 2m$. Полученные в этом пределе результаты находятся в хорошем согласии с результатами для одномерного кольца [4].

В работе рассмотрено влияние параметров контактов и показано, что в предельных случаях, соответствующих слабой связи между проводниками и наноструктурой \mathbf{S} , зависимость $T_{12}(E)$ представляет собой серию узких резонансов, между которыми значение коэффициента прохождения близко к нулю (рис. 5). С ослаблением связи ширина резонансов уменьшается, хотя их амплитуда при одинаковых контактах остается прежней. Важно отметить, что положение нулей коэффициента прохождения в исследуемой системе не зависит от длин рассеяния, а определяется только взаимным расположением контактов и геометрией наноструктуры \mathbf{S} .

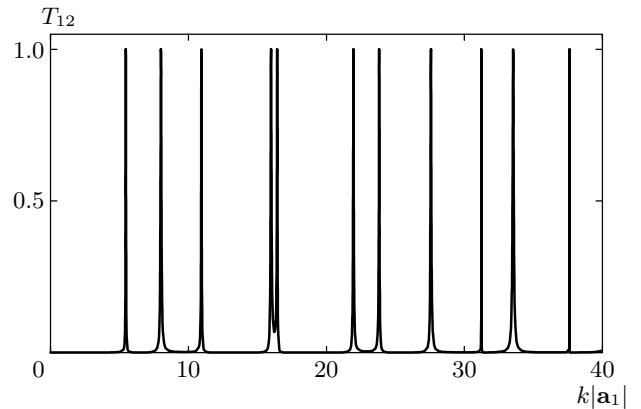


Рис. 5. Резонансная структура коэффициента прохождения через квантовый тор при сравнительно больших значениях параметра $\lambda^C = |a_1|$, $\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = 0.41\mathbf{a}_1 + 0.31\mathbf{a}_2$. Остальные параметры такие же, как на рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 01-02-16564, 02-01-00804), INTAS (грант № 00-257) и DFG.

1. С.-М. Ryu and S. Y. Cho, Phys. Rev. B **58**, 3572 (1998).

2. Q. Sun, J. Wang, and T. Lin, Phys. Rev. B **60**, R13981 (1999).
3. Н. Т. Баграев, А. Д. Буравлев, В. К. Иванов и др., ФТП **34**, 846 (2000).
4. В. А. Гейлер, В. В. Демидов, В. А. Маргулис, ЖТФ **73**(6), 1 (2003).
5. A. A. Clerk, X. Waintal, and P. W. Brouwer, Phys. Rev. Lett. **86**, 4636 (2001).
6. B. R. Bulka and P. Stefanski, Phys. Rev. Lett. **86**, 5128 (2001).
7. M. E. Torio, K. Hallberg, A. N. Ceccatto et al., Phys. Rev. B **65**, 085302 (2002).
8. О. А. Ткаченко, В. А. Ткаченко, Д. Г. Бакшеев и др., Письма в ЖЭТФ **71**, 366 (2000).
9. А. А. Быков, Д. Г. Бакшеев, Л. В. Литвин и др., Письма в ЖЭТФ **71**, 631 (2000).
10. А. А. Быков, Д. Г. Бакаров, Л. В. Литвин и др., Письма в ЖЭТФ **72**, 300 (2000).
11. Ч. С. Ким, А. М. Сатанин, ЖЭТФ **115**, 211 (1999).
12. Ч. С. Ким, А. М. Сатанин, Ю. С. Джо и др., ЖЭТФ **116**, 263 (1999).
13. C. S. Kim and A. M. Satanin, Physica E **4**, 211 (1999).
14. Ч. С. Ким, А. М. Сатанин, В. Б. Штенберг, ЖЭТФ **118**, 413 (2000).
15. Ч. С. Ким, О. Н. Рознова, А. М. Сатанин и др., ЖЭТФ **121**, 1157 (2002).
16. В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, Л. И. Филина, ЖЭТФ **113**, 1376 (1998).
17. Н. Г. Галкин, В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, ЖЭТФ **118**, 223 (2000).
18. J. Göres, D. Goldhaber-Gordon, S. Heemeyer et al., Phys. Rev. B **62**, 2188 (2000).
19. I. G. Zacharia, D. Goldhaber-Gordon, G. Granger et al., Phys. Rev. B **64**, 155311 (2001).
20. K. Kobayashi, H. Aikawa, S. Katsumoto et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 256806 (2002).
21. C. L. Foden, M. L. Leadbeater, and M. Pepper, Phys. Rev. B **52**, R8648 (1995).
22. Л. И. Магарилл, Д. А. Романов, А. В. Чаплик, ЖЭТФ **113**, 1411 (1998).
23. A. Kiselev, J. Math. Anal. Appl. **212**, 263 (1997).
24. B. S. Pavlov, I. Yu. Popov, V. A. Geyler et al., Europhys. Lett. **52**, 196 (2000).
25. J. Brüning, V. A. Geyler, V. A. Margulis et al., J. Phys. A **35**, 4239 (2002).
26. J. Brüning and V. A. Geyler, J. Math. Phys. **44**, 371 (2003).
27. Ю. Н. Демков, В. Н. Островский, *Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике*, Изд-во Ленинградского ун-та, Ленинград (1975).
28. L. Dabrowski and H. Grosse, J. Math. Phys. **26**, 2777 (1985).
29. C. Grosche and F. Steiner, *Handbook of Feynman Path Integrals*, Springer-Verlag, Berlin (1998).
30. Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, Москва (1962).
31. Ю. Е. Карпешина, ТМФ **57**, 304 (1983).