

СПОНТАННЫЙ РАСПАД В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАЗНЕСЕННЫХ АТОМОВ (ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

*А. А. Макаров**, *В. С. Летохов***

*Институт спектроскопии Российской академии наук
142190, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 10 апреля 2003 г.

Решена задача о динамике и спектре спонтанного излучения в системе из двух атомов в одномерном пространстве. Рассмотрен именно одномерный случай с целью максимально выделить эффекты, связанные с влиянием пространственно-разнесенных атомов друг на друга через поле излучения. В результате обнаружены и детально рассмотрены два эффекта: 1) существование при определенных расстояниях между атомами стабильных (метастабильных) суперпозиционных запутанных состояний; 2) значительное различие в спектрах фотонов, излученных в двух противоположных направлениях в ситуации, когда первоначально возбужден один из атомов. Обсуждаются возможности наблюдения этих эффектов.

PACS: 42.50.Fx, 42.50.Ct, 03.65.Ud, 03.67.Mn

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовое описание спонтанного излучения атома восходит к классической работе Вайскопфа и Вигнера [1]. Оно включает в себя три основных эффекта (см., например, [2]):

1) экспоненциальный распад приготовленного в начальный момент времени возбужденного состояния;

2) сдвиг наблюдаемой центральной частоты в спектре испущенных фотонов по отношению к частоте перехода, полученной в рамках решения задачи об уровнях энергии изолированного атома (радиационный или лэмбовский сдвиг);

3) лоренцеву форму спектра испущенных фотонов относительно центральной частоты.

Свойства 1 и 3 жестко связаны между собой (см., например, [3]), однако они, строго говоря, являются приближенными. Степень отклонения от экспоненциального закона и, следовательно, лоренцева контура определяется отношением скорости Γ спонтанного распада к некоей частоте $\tilde{\omega}$, являющейся характерным масштабом, на котором происходит изменение плотности мод электромагнитного поля в

окрестности частоты перехода ω_0 . Для атома в свободном пространстве $\tilde{\omega} \approx \omega_0$, а отношение Γ/ω_0 в оптическом (видимом) диапазоне даже для хорошо разрешенных переходов составляет не более чем 10^{-8} – 10^{-7} .

Из сказанного следует, что способы влияния на динамику и спектр спонтанного излучения должны опираться на структурирование плотности мод электромагнитного поля вблизи частоты перехода. Ряд конкретных примеров рассмотрен в монографии [4], частично предвосхитившей последующие работы, в которых изучалось излучение атома в резонаторе [5], в периодической структуре (фотонные кристаллы [6, 7]), вблизи диэлектрического шарика с размерами порядка длины волны [8–10] и т. п. Также возможно влияние на микроскопическом уровне, если, например, поместить вблизи возбужденного атома (на расстоянии меньше или порядка длины волны λ) атом с близкой частотой перехода. В частном, но наиболее интересном случае одинаковых атомов, расположенных на расстоянии много меньше λ , имеем систему, обнаруживающую эффект сверхизлучения Дике [11] или, более развернуто, по крайней мере, три основных кооперативных эффекта. Для иллюстрации ограничимся случаем двух атомов с основным $|g\rangle$ и возбужденным $|e\rangle$ состояни-

*E-mail: amakarov@isan.troitsk.ru

**E-mail: letokhov@isan.troitsk.ru

ями, связанными недиагональным матричным элементом d_{eg} оператора дипольного момента.

Первый эффект состоит в том, что называют сверхизлучением (superradiance), а именно, если в начальный момент времени оба атома находятся в возбужденном состоянии, т. е. система в целом — в состоянии $|ee\rangle$, то вероятность найти конкретный атом в возбужденном состоянии убывает быстрее, чем в случае, когда другого атома рядом нет.

Второй эффект фактически объясняет механизм сверхизлучения: в динамике процесса промежуточным состоянием для перехода в основное состояние $|gg\rangle$ всей системы является симметричная суперпозиция $(|eg\rangle + |ge\rangle)/\sqrt{2}$ двух состояний, в которых один атом возбужден, а другой не возбужден. Дипольные моменты переходов, связывающие такую суперпозицию как с верхним $|ee\rangle$, так и с нижним $|gg\rangle$ состоянием, в $\sqrt{2}$ раз больше чем величина d_{eg} .

Наконец, третий эффект (subradiance) состоит в том, что антисимметричная суперпозиция $(|eg\rangle - |ge\rangle)/\sqrt{2}$ тех же состояний является стабильной, так как дипольный момент перехода в нижнее состояние $|gg\rangle$ (также и в верхнее состояние $|ee\rangle$) равен нулю. Далее этот эффект будет представлять для нас основной интерес, и для него будем использовать термин «субизлучение».

Эти хорошо известные в теории проявления кооперативных эффектов пока в эксперименте не наблюдались в их чистом виде, а именно, в варианте «два или несколько атомов в объеме много меньшем λ^3 ». Исследовалось лишь сверхизлучение, в основном, применительно к большим ансамблям атомов или молекул в протяженных средах (для обзора см., например, [12, 13]). Только сравнительно недавно были выполнены эксперименты с простыми системами, в которых наблюдались проявления как сверхизлучения, так и субизлучения. В первом из этих экспериментов [14] два иона Ba^+ были захвачены в ионную ловушку и локализованы с применением техники лазерного охлаждения в положениях, отстоящих друг от друга на расстоянии около 2λ , которое немного варьировалось. Короткий лазерный импульс создавал суперпозицию двух состояний системы, $|eg\rangle$ и $|ge\rangle$ (в данном случае антисимметричную), и затем измерялось время спонтанного распада. В зависимости этого времени от расстояния между ионами (реально измерения были проведены лишь для трех расстояний) была обнаружена слабая модуляция.

В другом эксперименте [15] (тоже с Ba^+ в ионной ловушке) роль второй эквивалентной частицы играло зеркальное изображение локализованного иона.

Регистрировалось спонтанное излучение вдоль нормали к зеркалу и наблюдалась существенная модуляция сигнала с периодом $\lambda/2$ в зависимости от расстояния между ионом и зеркалом. Разумеется, напрашивается объяснение в терминах интерференции, что, в принципе, верно, однако авторы предпочли глубже проникнуть в природу явления, объявив, что имеют дело с проявлением кооперативного эффекта. Чтобы аргументированно обосновать свою точку зрения, они поставили еще один эксперимент. В ловушку было захвачено два иона, 1 и 2, а наблюдение велось вдоль направления, соединяющего ион 1 и изображение иона 2 (или наоборот). Снова наблюдалась модуляция сигнала.

Постановка задачи в настоящей работе близка эксперименту [15], а именно:

1) рассматриваем два атома, которые пространственно разнесены, так что диполь-дипольное взаимодействие между ними несущественно;

2) атомы излучают только вдоль проходящей через них линии (физически такая одномерная ситуация может реализовываться в волноводе с поперечным размером порядка λ).

В результате в такой одномерной модели кооперативный эффект проявляется в максимально возможной степени, не только как модуляция сигнала флуоресценции в эксперименте [15], но и в динамике распада, и в спектре излучения. Особый интерес представляет эффект субизлучения, состоящий в существовании суперпозиционных (мета)стабильных возбужденных состояний системы при определенных расстояниях между атомами.

2. ПОСТАНОВКА ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ

Рассматриваем два одинаковых двухуровневых атома, 1 и 2, расположенных на произвольном расстоянии друг от друга. Атом 1 для определенности помещен в начало координат, а координату атома 2 обозначим через \mathbf{R} . В начальный момент времени $t = 0$ атом 1 находится в возбужденном состоянии $|e\rangle$, а атом 2 — в основном состоянии $|g\rangle$. Электромагнитное поле распространяется только вдоль направления вектора \mathbf{R} , и в начальный момент времени $t = 0$ состояние поля — вакуум, $|0\rangle$; таким образом, начальное состояние всей системы есть $|eg0\rangle$. Исходным базисом служат собственные функции гамильтониана нулевого приближения, в котором отсутствует взаимодействие атомов с полем излучения, квантованным в бесконечном одномерном пространстве. Амплитуду начального состояния систе-

мы «атом 1 + атом 2 + поле» обозначим через A_1 . Далее включаем в рассмотрение состояния непрерывного спектра, в которых наличествует один фотон с произвольной частотой ω , а оба атома находятся в основном состоянии. Эти состояния непрерывного спектра двукратно вырождены по направлению распространения фотона. Обозначим их $|gg1_\omega^{(+)}\rangle$ и $|gg1_\omega^{(-)}\rangle$ соответственно для направлений вправо и влево, а соответствующие им амплитуды — $B_\omega^{(+)}$ и $B_\omega^{(-)}$. Наконец, подключим к рассмотрению также состояние $|ge0\rangle$, которое взаимодействует с исходным через состояния непрерывного спектра, и обозначим его амплитуду через A_2 . Система уравнений для амплитуд A_1 , A_2 , $B_\omega^{(+)}$ и $B_\omega^{(-)}$ выводится стандартным образом из временного уравнения Шредингера и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 i \frac{dA_1}{dt} &= \int_0^\infty V(\omega) B_\omega^{(+)} e^{-i(\omega-\omega_0)t} d\omega + \\
 &+ \int_0^\infty V(\omega) B_\omega^{(-)} e^{-i(\omega-\omega_0)t} d\omega, \\
 i \frac{dA_2}{dt} &= \int_0^\infty V(\omega) B_\omega^{(+)} e^{-i[(\omega-\omega_0)t - k_\omega R]} d\omega + \\
 &+ \int_0^\infty V(\omega) B_\omega^{(-)} e^{-i[(\omega-\omega_0)t + k_\omega R]} d\omega, \\
 i \frac{dB_\omega^{(+)}}{dt} &= V(\omega) A_1 e^{i(\omega-\omega_0)t} + \\
 &+ V(\omega) A_2 e^{i[(\omega-\omega_0)t - k_\omega R]}, \\
 i \frac{dB_\omega^{(-)}}{dt} &= V(\omega) A_1 e^{i(\omega-\omega_0)t} + \\
 &+ V(\omega) A_2 e^{i[(\omega-\omega_0)t + k_\omega R]}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь матричный элемент $\langle e0|\widehat{V}|g1_\omega\rangle$ оператора взаимодействия \widehat{V} атома с полем обозначен через $V(\omega)$ для атома, находящегося в начале координат, и он для простоты (и без ограничения общности) считается действительным; следовательно, для атома, находящегося в точке R , он умножается на $\exp(\pm ik_\omega R)$, где знак соответствует направлению волнового вектора \mathbf{k}_ω фотона $|1_\omega^\pm\rangle$. Также частота перехода $e \rightarrow g$ обозначена через ω_0 .

Метод точного решения системы уравнений (1) дан в Приложении А. Он является обобщением метода, предложенного для аналогичных задач, в которых фигурирует непрерывный спектр, в работах [16–18]. В основном тексте мы ограничимся известным приближением, которое состоит в следу-

ющем: величина матричного элемента взаимодействия V полагается не зависящей от частоты ω испускаемого фотона и приравняется к значению $V(\omega_0)$. Кроме того, интегрирование в первых двух уравнениях системы (1) распространяется на всю бесконечную ось. В случае одного атома именно в этом приближении результатом является в точности экспоненциальный распад амплитуды возбужденного состояния и в точности лоренцев спектр излученных фотонов (см. обсуждение в начале Введения). Правда, теряется информация о той части лэмбовского сдвига, который формально зависит от вида функции $V(\omega)$ (см., например, [2]), но здесь считаем, что лэмбовский сдвиг уже первоначально учтен в самом значении частоты перехода ω_0 — величины, известной из эксперимента.

В чем смысл указанного приближения и к каким следствиям оно приводит, становится ясно, если формально проинтегрировать третье и четвертое уравнения системы (1) с начальными условиями $B_\omega^{(\pm)}(0) = 0$ и полученные в результате интегрирования функции $B_\omega^{(\pm)}(t)$ подставить в первые два уравнения. В итоге приходим к системе двух интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{dA_1}{dt} &= -2 \int_0^t \mathcal{K}_0(t-\tau) A_1(\tau) d\tau - \\
 &- \int_0^t [\mathcal{K}_+(t-\tau) + \mathcal{K}_-(t-\tau)] A_2(\tau) d\tau, \\
 \frac{dA_2}{dt} &= -2 \int_0^t \mathcal{K}_0(t-\tau) A_2(\tau) d\tau - \\
 &- \int_0^t [\mathcal{K}_+(t-\tau) + \mathcal{K}_-(t-\tau)] A_1(\tau) d\tau,
 \end{aligned} \tag{2}$$

ядрами $\mathcal{K}_0(t-\tau)$ и $\mathcal{K}_\pm(t-\tau)$ для которых являются следующие интегралы:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_0(x) &= \int_0^\infty V^2(\omega) e^{-i(\omega-\omega_0)x} d\omega, \\
 \mathcal{K}_\pm(x) &= \int_0^\infty V^2(\omega) e^{\pm ik_\omega R} e^{-i(\omega-\omega_0)x} d\omega.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Видим, что при $V(\omega) = V(\omega_0)$ и замене в (3) нижнего предела интегрирования на $-\infty$ ядро \mathcal{K}_0 сводится к δ -функции, в результате чего производные от амплитуд A_1 и A_2 в момент времени t не зависят от значений соответственно A_1 и A_2 в предше-

ствующие моменты времени. Тоньше обстоит дело с ядрами \mathcal{K}_{\pm} . Для того чтобы они также сводились к δ -функциям, кроме постоянства $V^2(\omega)$ необходимо еще отсутствие дисперсии в среде, т. е. зависимость волнового вектора k_{ω} от частоты должна быть линейной. Ясно, что это требование является физически гораздо более существенным, чем предыдущее¹⁾. В основном тексте данной статьи мы считаем его выполненным, но в Приложении А показываем, что ненулевая дисперсия ни в коей мере не разрушает рассматриваемые в работе качественные эффекты.

Итак, полагаем $k_{\omega} \propto \omega$ и обозначаем через t_0 то время, которое требуется свету, чтобы пройти путь от атома 1 до атома 2 и наоборот. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_+(t - \tau) &\propto e^{i\omega_0 t_0} \delta(t - \tau - t_0), \\ \mathcal{K}_-(t - \tau) &\propto e^{-i\omega_0 t_0} \delta(t - \tau + t_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Далее подставляем (4) в уравнения (2) и видим, что член с \mathcal{K}_- выпадает, так как соответствующая δ -функция сконцентрирована вне интервала интегрирования $(0, t)$. Связывая скорость Γ спонтанного распада возбужденного состояния с величиной $V^2(\omega_0)$:

$$\Gamma = 4\pi V^2(\omega_0), \quad (5)$$

и вводя обозначение $\gamma = \Gamma/2$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dA_1(t)}{dt} &= -\gamma A_1(t) - \gamma e^{i\omega_0 t_0} A_2(t - t_0), \\ \frac{dA_2(t)}{dt} &= -\gamma A_2(t) - \gamma e^{i\omega_0 t_0} A_1(t - t_0), \end{aligned} \quad (6)$$

в которой производная амплитуды A_1 зависит от «задержанного» на время t_0 значения A_2 , и наоборот.

Далее мы рассматриваем динамику системы во времени (разд. 3) и спектр излучения в каждом из двух направлений (разд. 4).

3. ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ВО ВРЕМЕНИ

Как обсуждалось выше, нас интересует ситуация, когда в начальный момент времени $t = 0$ атом 1 возбужден, а атом 2 не возбужден. Решение системы уравнений (6) с отвечающими этому случаю начальными условиями $A_1(0) = 1$ и $A_2(0) = 0$ находится довольно просто методом индукции. Результат легко проверить непосредственной подстановкой в исходные уравнения; он имеет следующий вид:

¹⁾ Оно, в частности, в точности выполнено в вакууме, но может быть выполнено и в волноводе с многосвязным сечением для так называемой главной волны [19].

$$A_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta(t - 2nt_0)}{(2n)!} [\gamma e^{i\omega_0 t_0} (t - 2nt_0)]^{2n} \times e^{-\gamma(t-2nt_0)}, \quad (7)$$

$$A_2(t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta[t - (2n + 1)t_0]}{(2n + 1)!} \times \{ \gamma e^{i\omega_0 t_0} [t - (2n + 1)t_0] \}^{2n+1} e^{-\gamma[t-(2n+1)t_0]}, \quad (8)$$

где θ — тета-функция Хевисайда. В каждый момент времени ряды в (7) и (8) — конечные. Новые члены включаются в моменты времени, кратные t_0 . При $\exp(i\omega_0 t_0) \neq \pm 1$ каждое новое слагаемое входит с фазой, отличающейся от фазы предшествующего слагаемого, поэтому вполне естественно, что амплитуды $A_1(t)$ и $A_2(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, как и должно быть. Однако при $\exp(i\omega_0 t_0) = \pm 1$, т. е. когда $\omega_0 t_0 = m\pi$, где m — произвольное целое число, все члены в выражении для A_1 положительны, а в выражении для A_2 имеют знак, противоположный знаку $\exp(i\omega_0 t_0)$. Оказывается, что в этом случае абсолютные значения обеих амплитуд при $t \rightarrow \infty$ стремятся к постоянной величине:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} A_1(t) &= -e^{-i\omega_0 t_0} \lim_{t \rightarrow \infty} A_2(t) = \\ &= \frac{1}{2(1 + \gamma t_0)} \quad (\omega_0 t_0 = m\pi). \end{aligned} \quad (9)$$

Доказательство формулы (9) дано в Приложении Б (см. (Б.16) и комментарий в тексте). Динамика переходного процесса для вероятностей $\mathcal{P}_{1,2}(t) = |A_{1,2}(t)|^2$ нахождения атомов в возбужденных состояниях показана на рис. 1 для различных значений параметра γt_0 .

Наиболее реалистичен случай, когда входящий в (9) параметр γt_0 мал по сравнению с единицей. Тогда суммарная вероятность нахождения системы в состояниях $|eg\rangle$ и $|ge\rangle$, в которых один из атомов возбужден, а другой не возбужден, стремится приблизительно к $1/2$. Этот факт означает, что возможно существование стабильных суперпозиций двух состояний $|eg\rangle$ и $|ge\rangle$. При этом, когда расстояние между атомами равно целому числу длин волн, соответствующих частоте перехода, стабильной является антисимметричная суперпозиция $(|eg\rangle - |ge\rangle)/\sqrt{2}$, а когда расстояние между атомами равно полуцелому числу длин волн, стабильной является симметричная суперпозиция $(|eg\rangle + |ge\rangle)/\sqrt{2}$. Отметим, что в частном случае, когда расстояние между атомами формально равно нулю, имеем классический случай, рассмотренный Дике [11], когда стабильной является именно антисимметричная суперпозиция.

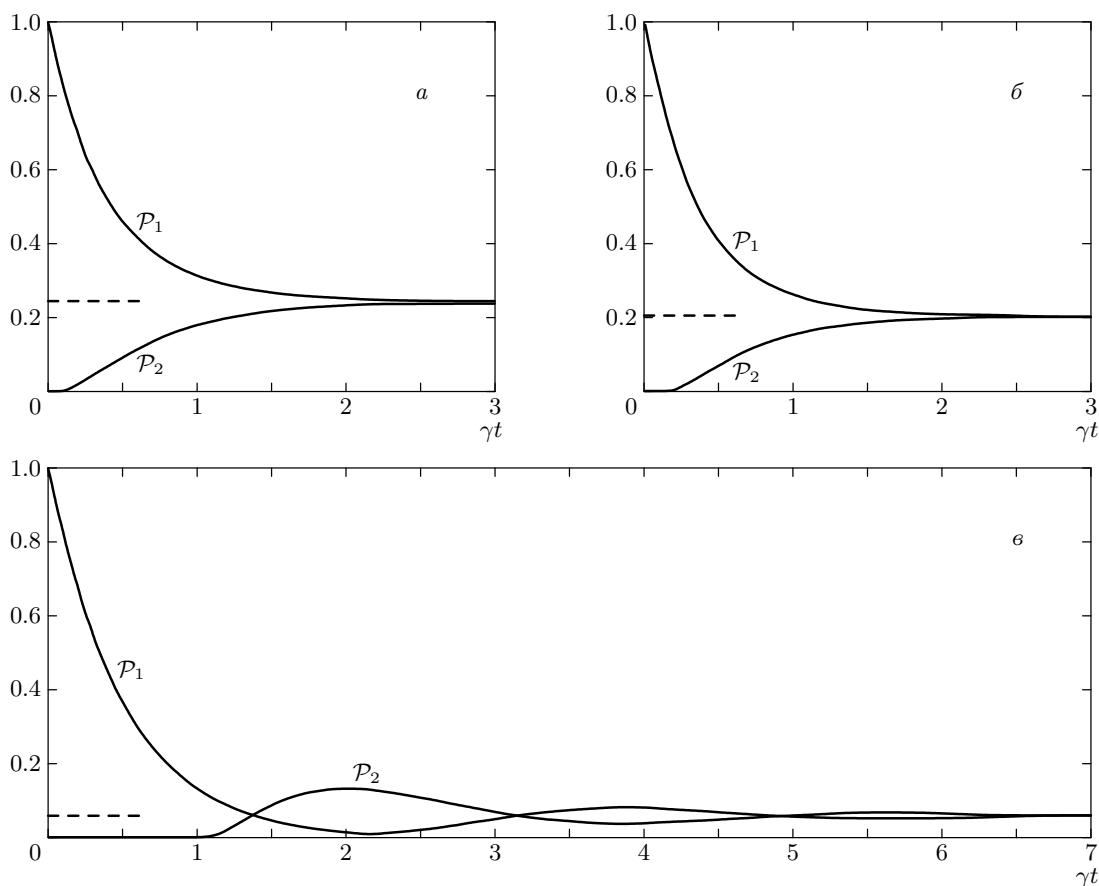


Рис. 1. Динамика переходного процесса от начального состояния, когда возбужден один из атомов, к стабильной суперпозиции двух состояний, в которой амплитуды A_1 и A_2 состояний соответственно $|eg0\rangle$ и $|ge0\rangle$ даются формулой (9). Величины \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 означают вероятности нахождения в возбужденном состоянии соответственно атома 1 и атома 2. Параметр γt_0 принимает значения 0.01 (а); 0.1 (б); 1 (в)

Однако ситуация, когда атомы пространственно разнесены, качественно отличается от системы Дикке, где стабильная суперпозиция является собственным состоянием системы «атомы + поле». В рассматриваемом нами случае собственным состоянием является более сложная суперпозиция, в которую кроме состояний $|eg0\rangle$ и $|ge0\rangle$ входят также состояния непрерывного спектра $|gg1_{\omega}^{(+)}\rangle$ и $|gg1_{\omega}^{(-)}\rangle$, образующие волновой пакет, пространственно зажатый между атомами. Количественно этот факт мы проинтерпретируем ниже, после рассмотрения спектра излучения нашей системы. В данном разделе мы дополнительно рассмотрим только динамику системы, когда как частный пример первоначально приготовлена симметричная суперпозиция состояний $|eg0\rangle$ и $|ge0\rangle$, а расстояние между атомами близко к полному числу длин волн. При этом при точном равенстве $\omega_0 t_0 = (2n + 1)\pi$ динамика сводится к пе-

реходному процессу, в котором формируется только что обсуждавшееся стабильное состояние, а при неточном равенстве относительно быстрый переходной процесс сопровождается относительно медленным распадом образованного состояния, которое теперь следует трактовать как метастабильное.

Итак, рассматриваем систему уравнений (6) с начальными условиями $A_1(0) = A_2(0) = 1/\sqrt{2}$. Решение имеет вид

$$A_1(t) = A_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times \theta(t - nt_0) [\gamma e^{i\omega_0 t_0} (t - nt_0)]^n e^{-\gamma(t-nt_0)}. \quad (10)$$

В соответствии со сказанным выше, при $\exp(i\omega_0 t_0) = -1$ суммарная вероятность $\mathcal{P}(t) = |A_1(t)|^2 + |A_2(t)|^2$ нахождения атомов в возбужденных состояниях стремится при $t \rightarrow \infty$ к

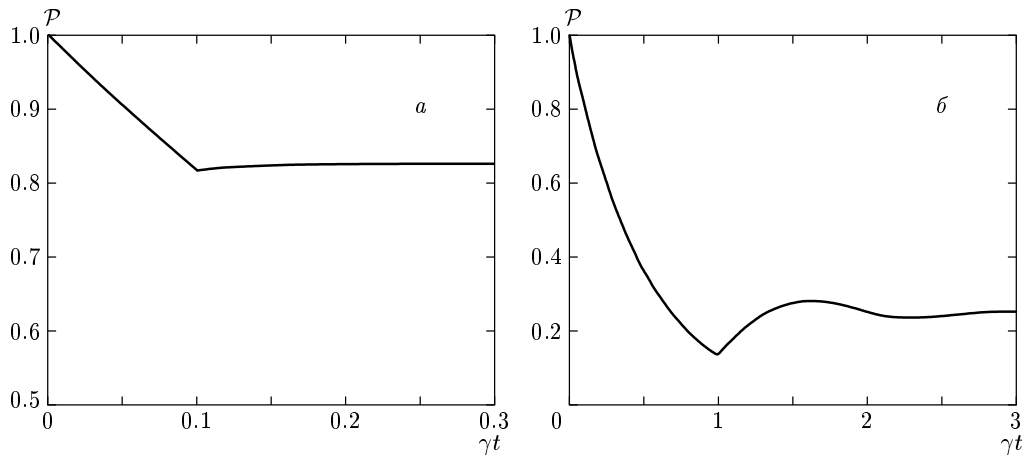


Рис. 2. Распад части суммарной населенности \mathcal{P} верхнего уровня для системы из двух атомов, когда расстояние между атомами в точности равно полуволле на частоте атомного перехода и первоначально возбуждена симметричная суперпозиция состояний $|eg\rangle$ и $|ge\rangle$. Распад происходит от единичного значения до величины, даваемой формулой (11). Параметр γt_0 принимает значения: 0.1 (а); 1 (б)

постоянной величине (иллюстрирующие примеры даны на рис. 2):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}(t) = \frac{1}{(1 + \gamma t_0)^2}, \quad (11)$$

которая при $\gamma t_0 \ll 1$ близка к единице. Любое малое отклонение величины $\exp(i\omega_0 t_0)$ от -1 приводит к необратимому распаду возбужденных состояний, который, однако, тем медленнее, чем ближе величина $\exp(i\omega_0 t_0)$ к -1 . Иллюстрация, данная на рис. 3, соответствует значению параметра $\gamma t_0 = 0.1$, когда предел (11) приблизительно равен 0.83. На этом рисунке приведены три зависимости $\mathcal{P}(t)$ при различных малых значениях параметра $\beta = |\omega_0 t_0 - (2n + 1)\pi|$. Шкалы для этих зависимостей существенно разные, однако они становятся практически одинаковыми, если выбрать в качестве переменной $\beta^2 t$.

Последний результат можно интерпретировать в терминах известного золотого правила Ферми для переходов в непрерывный спектр. Поскольку мы интересуемся скоростью распада симметричной суперпозиции состояний $|eg\rangle$ и $|ge\rangle$, то, чтобы применить соответствующую формулу золотого правила $\mathcal{W} = 2\pi |F(\omega_0)|^2$ (см., например, [20]), нужно выразить матричный элемент $F(\omega)$ взаимодействия этой суперпозиции с состояниями двукратно вырожденного непрерывного спектра через матричный элемент взаимодействия $V(\omega)$, используемый нами в исходных уравнениях (1):

$$F(\omega) = \frac{V}{\sqrt{2}} (1 + e^{\pm i\omega t_0}). \quad (12)$$

Отсюда скорость \mathcal{W} с учетом соотношения (5) выражается через γ :

$$\mathcal{W} = \gamma |1 + e^{i\omega_0 t_0}|^2 \approx \beta^2 \gamma. \quad (13)$$

Во втором равенстве учтена близость величины $\omega_0 t_0$ к $(2n + 1)\pi$ и использован введенный выше малый параметр β .

Соответствующая золотому правилу кривая распада $\mathcal{P}(t) \approx \exp(-\beta^2 \gamma t)$ дана на рис. 3 для сравнения с одним из точных решений. Разумеется, она не описывает переходной процесс. Кроме того, точное решение в целом дает немного более медленный спад, чем это предписано золотым правилом. Причина состоит в небольшом эффективном сдвиге центральной частоты перехода из метастабильной суперпозиции состояний. Мы обсудим этот эффект после рассмотрения спектра излученных фотонов.

4. СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ

Целесообразно начать с более простой из двух рассмотренных в предыдущем разделе задач, а именно, задачи о распаде первоначально приготовленной симметричной (антисимметричной) суперпозиции состояний $|eg0\rangle$ и $|ge0\rangle$. «Простота» заключается здесь в том, что спектр излученных фотонов одинаков в обоих направлениях распространения. В то же время в задаче, когда первоначально возбужден один из атомов, спектры в двух направлениях

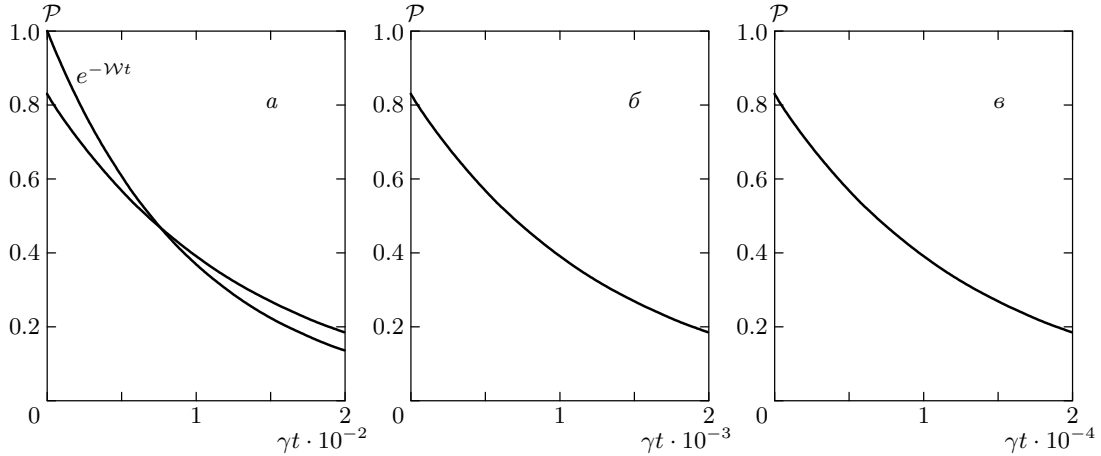


Рис. 3. Динамика распада метастабильной симметричной суперпозиции состояний $|eg\rangle$ и $|ge\rangle$. Величина P означает суммарную вероятность нахождения атомов в возбужденном состоянии. Величина γ определена в тексте. Параметр γt_0 равен 0.1. Расстояние между атомами близко к полуцелому числу длин волн на частоте перехода ω_0 , так что параметр $\beta = |\omega_0 t_0 - (2n + 1)\pi|$ мал: $\beta^2 = 10^{-2}$ (а); $\beta^2 = 10^{-3}$ (б); $\beta^2 = 10^{-4}$ (в). На рис. 3а для сравнения показана одноэкспоненциальная реперная кривая $\exp(-Wt)$ с величиной W , определяемой выражением (13). Гораздо более быстрый переходной процесс, в течение которого P спадает от единицы до величины (11), показан на рис. 2

могут быть существенно различными. Этот эффект будет проанализирован далее.

Итак, начинаем с решения (10) для амплитуд $A_1(t)$ и $A_2(t)$ состояний соответственно $|eg0\rangle$ и $|ge0\rangle$. Чтобы получить спектр излученных фотонов, нужно подставить (10) в два последних уравнения системы (1) и проинтегрировать их²⁾ от начального момента времени $t = 0$ до конечного момента времени наблюдения, каковым считаем $t = \infty$. Спектр $\mathcal{S}_+(\omega)$ (знак плюс означает, что в данном случае изначально приготовлена симметричная суперпозиция состояний $|eg0\rangle$ и $|ge0\rangle$) определяем для удобства нормировки как сумму вероятностей излучения фотонов данной частоты в двух направлениях:

$$\mathcal{S}_+(\omega) = |B_\omega^{(+)}|^2 + |B_\omega^{(-)}|^2.$$

В качестве промежуточного результата имеем

$$B_\omega^{(\pm)}(t = \infty) = -iV(\omega) (1 + e^{\mp i\omega t_0}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\gamma e^{i\omega_0 t_0})^n \mathcal{J}_n \quad (14)$$

с интегралами

²⁾ Дальнейшая процедура корректна, когда $A_1(t)$ и $A_2(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Напротив, если $\exp(i\omega_0 t_0) = -1$ и, соответственно, $\lim_{t \rightarrow \infty} A_{1,2}(t) \neq 0$, требуются более тонкие вычисления, являющиеся частью Приложения В.

$$\mathcal{J}_n = \int_{nt_0}^{\infty} (t - nt_0)^n e^{-\gamma(t-nt_0)} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt = \frac{n! e^{in(\omega-\omega_0)t_0}}{[\gamma - i(\omega-\omega_0)]^{n+1}}. \quad (15)$$

Далее, подставляя (15) в (14), суммируя геометрическую прогрессию и возводя модули $B_\omega^{(+)}$ и $B_\omega^{(-)}$ в квадрат, получаем для спектра излучения следующее выражение:

$$\mathcal{S}_+(\omega) = \frac{1}{\pi} \times \frac{\gamma(1 + \cos \omega t_0)}{\gamma^2(1 + \cos \omega t_0)^2 + (\omega - \omega_0 - \gamma \sin \omega t_0)^2}, \quad (16)$$

где мы для простоты заменили медленно меняющуюся функцию $V^2(\omega)$ на постоянную величину $\Gamma = 2\gamma$ в соответствии с (5). Дополним без детализации, что результат для спектра $\mathcal{S}_-(\omega)$, отвечающего изначально приготовленной антисимметричной суперпозиции состояний $|eg0\rangle$ и $|ge0\rangle$,

$$\mathcal{S}_-(\omega) = \frac{1}{\pi} \times \frac{\gamma(1 - \cos \omega t_0)}{\gamma^2(1 - \cos \omega t_0)^2 + (\omega - \omega_0 + \gamma \sin \omega t_0)^2}, \quad (17)$$

отличается от (16) знаками перед косинусом и синусом.

Замечаем далее, что по форме выражения (16) и (17) совпадали бы с лоренцевым контуром, если

бы аргументы синуса и косинуса были бы постоянными величинами. Но в наиболее интересном для нас случае, когда $\gamma t_0 \ll 1$ (см. предыдущий раздел), так оно по сути и есть: аргумент ωt_0 мало меняется в пределах характерной ширины спектрального контура, которая, во всяком случае, меньше чем 2γ . Поэтому для случая $\gamma t_0 \ll 1$ будет вполне естественным ввести эффективную центральную частоту контура

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 \pm \gamma \sin \omega_0 t_0 \quad (\gamma t_0 \ll 1), \quad (18)$$

где верхний знак соответствует случаю симметричного начального условия, а нижний — антисимметричного. Соответственно, эффективная полуширина контура есть

$$\tilde{\gamma} = \gamma(1 \pm \cos \tilde{\omega}_0 t_0) \quad (\gamma t_0 \ll 1), \quad (19)$$

а форма спектра излученных фотонов приближенно представляется в каноническом лоренцевом виде

$$\mathcal{S}_{\pm}(\omega) \approx \frac{1}{\pi} \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}^2 + (\omega - \tilde{\omega}_0)^2} \quad (\gamma t_0 \ll 1). \quad (20)$$

Полученный результат хорошо согласуется с выводами разд. 3, относящимися к динамике радиационного распада первоначально приготовленного «симметричного» суперпозиционного состояния. Так, для $\mathcal{S}_+(\omega)$, когда введенный ранее (см. рис. 3 и сопутствующий текст) параметр $\beta = |\omega_0 t_0 - (2n + 1)\pi|$ мал по сравнению с единицей, эффективная ширина спектра излученных фотонов в соответствии с (19) составляет величину $\tilde{\Gamma} = 2\tilde{\gamma} \approx \beta^2 \gamma (1 - 2\gamma t_0)$ (здесь мы ограничились двумя первыми членами разложения по малому параметру γt_0), которая в нулевом приближении по γt_0 в точности равна скорости распада \mathcal{W} (13), отвечающей золотому правилу, а с учетом поправки она несколько меньше, что и следует из графиков, приведенных на рис. 3.

Перейдем теперь к случаю, когда первоначально возбужден один из атомов. Для нахождения спектра излучения используем решения (7) и (8) для амплитуд соответственно $A_1(t)$ и $A_2(t)$, которые подставляем в уравнения (1). В результате получаем вероятности излучения фотонов данной частоты в двух разных направлениях:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\odot}(\omega) = & \frac{1}{4\pi(1 + \sin^2 \omega t_0)} \times \\ & \times \left[\frac{(1 + 2 \sin^2 \omega t_0) \gamma (1 + \cos \omega t_0)}{\gamma^2 (1 + \cos \omega t_0)^2 + (\omega - \omega_0 - \gamma \sin \omega t_0)^2} - \right. \\ & - \frac{\sin \omega t_0 (\omega - \omega_0 - \gamma \sin \omega t_0)}{\gamma^2 (1 + \cos \omega t_0)^2 + (\omega - \omega_0 - \gamma \sin \omega t_0)^2} + \\ & + \frac{(1 + 2 \sin^2 \omega t_0) \gamma (1 - \cos \omega t_0)}{\gamma^2 (1 - \cos \omega t_0)^2 + (\omega - \omega_0 + \gamma \sin \omega t_0)^2} + \\ & \left. + \frac{\sin \omega t_0 (\omega - \omega_0 + \gamma \sin \omega t_0)}{\gamma^2 (1 - \cos \omega t_0)^2 + (\omega - \omega_0 + \gamma \sin \omega t_0)^2} \right] \quad (21) \end{aligned}$$

в «пустом» направлении от первоначально возбужденного атома и

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\otimes}(\omega) = & \frac{1}{4\pi(1 + \sin^2 \omega t_0)} \times \\ & \times \left[\frac{\gamma (1 + \cos \omega t_0)}{\gamma^2 (1 + \cos \omega t_0)^2 + (\omega - \omega_0 - \gamma \sin \omega t_0)^2} + \right. \\ & + \frac{\sin \omega t_0 (\omega - \omega_0 - \gamma \sin \omega t_0)}{\gamma^2 (1 + \cos \omega t_0)^2 + (\omega - \omega_0 - \gamma \sin \omega t_0)^2} + \\ & + \frac{\gamma (1 - \cos \omega t_0)}{\gamma^2 (1 - \cos \omega t_0)^2 + (\omega - \omega_0 + \gamma \sin \omega t_0)^2} - \\ & \left. - \frac{\sin \omega t_0 (\omega - \omega_0 + \gamma \sin \omega t_0)}{\gamma^2 (1 - \cos \omega t_0)^2 + (\omega - \omega_0 + \gamma \sin \omega t_0)^2} \right] \quad (22) \end{aligned}$$

в направлении от первоначально возбужденного атома через первоначально невозбужденный атом.

Из формул (21) и (22) с очевидностью следует, что суммарный спектр $\mathcal{S}_{\odot}(\omega) + \mathcal{S}_{\otimes}(\omega)$ фотонов, излученных в двух направлениях, равен $[\mathcal{S}_+(\omega) + \mathcal{S}_-(\omega)]/2$, т. е. полусумме спектров с симметричным и антисимметричным начальными условиями, как и должно быть. Однако сами спектры $\mathcal{S}_{\odot}(\omega)$ и $\mathcal{S}_{\otimes}(\omega)$ могут быть существенно разными (см. два примера на рис. 4). Главное, полные вероятности излучения фотона в двух направлениях не равны друг другу: интеграл от $\mathcal{S}_{\odot}(\omega)$ всегда больше, чем интеграл от $\mathcal{S}_{\otimes}(\omega)$. Вводя соответствующее отношение

$$\mathcal{R} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_{\odot}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_{\otimes}(\omega) d\omega} \quad (23)$$

и вычисляя входящие в него интегралы от различных членов в выражениях (21) и (22) методом, аналогичным тому, как вычисляется интеграл (Б.11) в Приложении Б, находим, что

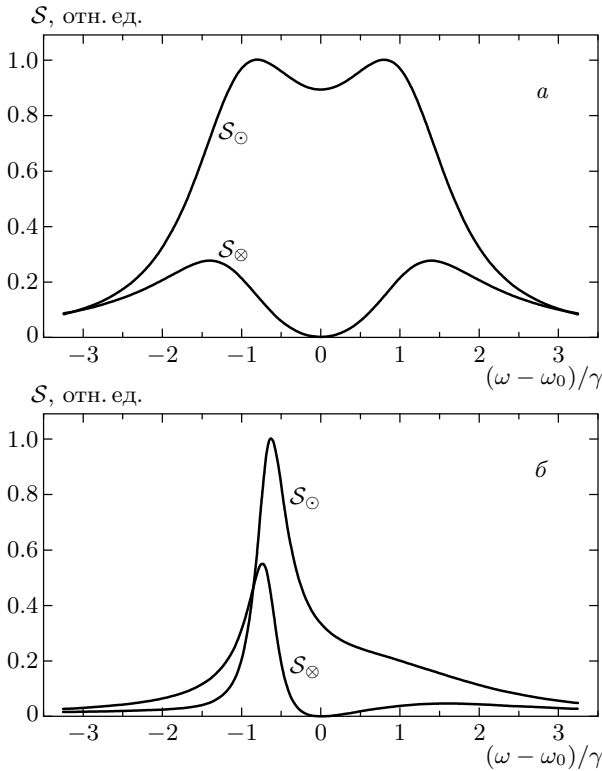


Рис. 4. Центральная часть спектров фотонов, излученных в двух разных направлениях в случае, когда первоначально возбужден один из атомов. Оба примера иллюстрируют различия спектров $S_{\odot}(\omega)$ и $S_{\otimes}(\omega)$. Нормировка выбрана по максимуму функции $S_{\odot}(\omega)$. Параметр γt_0 равен 0.1 для обоих примеров. Расстояние между атомами отличается от целого числа длин полуволн на $\lambda/4$ (а) и $\lambda/8$ (б)

$$\mathcal{R} = \frac{2 - \frac{\cos(2\omega_0 t_0)}{\text{ch}(2\sqrt{2}\gamma t_0)} + \frac{5}{4}\sqrt{2} \text{th}(2\sqrt{2}\gamma t_0)}{1 + \frac{3}{4}\sqrt{2} \text{th}(2\sqrt{2}\gamma t_0)}. \quad (24)$$

Из формулы (24) следует, что наибольшее значение отношения (23) есть $\mathcal{R} \approx 3$ при $\gamma t_0 \ll 1$ и расстояниях между атомами, отличающимися на величину $\lambda/4$ от целого числа длин полуволн. Соответствующие мелкомасштабные зависимости $\mathcal{R}(\omega_0 t_0)$ приведены на рис. 5 для $\gamma t_0 = 0.1$ и $\gamma t_0 = 0.5$. Видно, что с увеличением значения параметра γt_0 зависимость \mathcal{R} от расстояния между атомами на масштабе длины волны сглаживается, стремясь к постоянному значению $\mathcal{R}|_{\gamma t_0 \gg 1} \approx 2\sqrt{2} - 1 \approx 1.83$.

В заключение этого раздела отметим как факт (см., в частности, рис. 4), что функция $S_{\otimes}(\omega)$ в точности обращается в нуль на частоте перехода ω_0 . Таким образом, можно сказать, что невозбужденный

атом как бы является идеальным зеркалом для фотона, если он испущен идентичным атомом строго на частоте атомного перехода.

5. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СТАБИЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

В разд. 2 мы отмечали, что нераспадающаяся суперпозиция двух состояний $|eg\rangle$ и $|ge\rangle$ (симметричная, когда расстояние между атомами равно полному числу длин волн, и антисимметричная, когда расстояние между атомами равно целому числу длин волн) «поддерживается» волновым пакетом, зажатым между атомами. Другими словами, соответствующим стабильным, внедренным в непрерывный спектр «дискретным» (т. е. нормированным на единицу, а не на дельта-функцию; подробнее см. Приложение А) собственным состоянием системы «атомы + поле» является суперпозиция

$$|\Upsilon\rangle = C_1|eg0\rangle + C_2|ge0\rangle + \int C_{\omega}^{(+)}|gg1_{\omega}^{(+)}\rangle d\omega + \int C_{\omega}^{(-)}|gg1_{\omega}^{(-)}\rangle d\omega. \quad (25)$$

Здесь $C_2 = \pm C_1$, а соотношение между $C_{1,2}$ и $C_{\omega}^{(\pm)}$ находится из соответствующих формул Приложения А. Это соотношение, в частности, указывает на то, какая доля энергии сидит в возбуждении атомов, а какая доля энергии сосредоточена в «поддерживающем» поле. Здесь мы несколько расширим вопрос. А именно, пусть при $t = 0$ возбуждена, например, симметричная суперпозиция состояний $|eg\rangle$ и $|ge\rangle$, а расстояние между атомами в точности равно полному числу длин волн. Каковы тогда вероятности

- 1) найти при $t \rightarrow \infty$ атом в возбужденном состоянии (\mathcal{P}_{at}),
- 2) зарегистрировать фотон детектором, помещенным на бесконечности (вероятность излучения в свободное пространство, \mathcal{P}_{free}),
- 3) обнаружить при $t \rightarrow \infty$ фотон в «поддерживающем» поле между атомами ($\mathcal{P}_{support}$)?

Ответ на первый вопрос дается формулой (11). Ответы на второй и третий вопросы можно получить двумя способами. Один способ (непрямой) использует связь между коэффициентами разложения $C_{1,2}$ и $C_{\omega}^{(\pm)}$ в собственном состоянии Υ (25) нашей системы (см. Приложение А). Мы воспользуемся другим, более наглядным, способом, который следует из доказательства формулы (11) в Приложении Б. Там, в первую очередь, использовано общее условие нормировки (Б.3) (фактически равенство

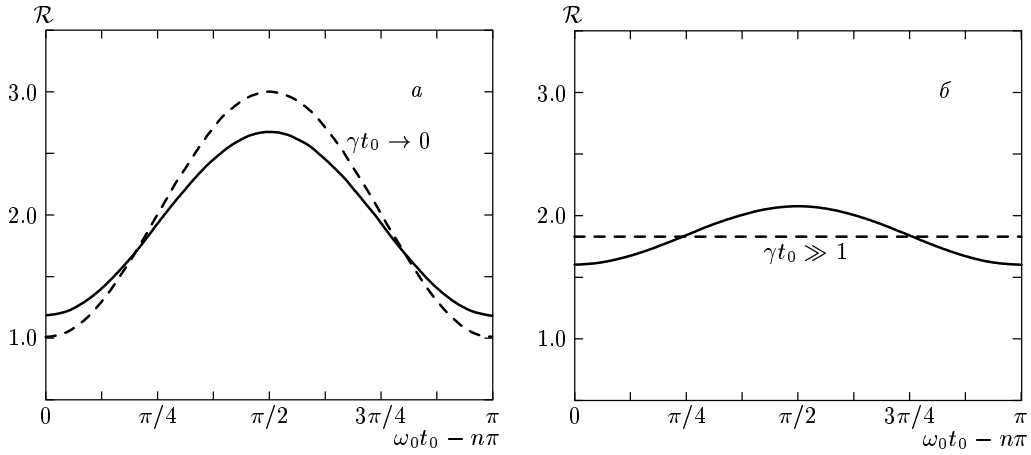


Рис. 5. Отношение (24) полных вероятностей излучения фотона в разных направлениях в случае, когда первоначально возбужден один из атомов, в зависимости от расстояния между атомами на шкале $\lambda/2$: *a* — эволюция отношения \mathcal{R} с изменением параметра γt_0 от предельно малых значений (штриховая кривая) к значению 0.1 (сплошная кривая); *б* — дальнейшая эволюция \mathcal{R} с увеличением γt_0 до значения 0.5 (сплошная кривая) и далее к большим предельным значениям (штриховая кривая)

$\mathcal{P}_{at} + \mathcal{P}_{free} + \mathcal{P}_{support} = 1$), а затем найдена проинтегрированная по частоте ω полная вероятность нахождения системы в состояниях $|gg1_{\omega}^{(\pm)}\rangle$. Эта вероятность содержит три члена. Первый член включает в себя интеграл Q_1 (Б.9) и связан соотношением пропорциональности с величиной \mathcal{P}_{at} (или A_{∞}^2 в обозначениях, используемых в Приложении Б), следовательно, он есть $\mathcal{P}_{support}$. Второй член, включающий в себя интеграл Q_2 (Б.10), стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$; он описывает интерференцию двух полей, «излученного в свободное пространство» и поддерживающего. Остающийся третий член, включающий в себя интеграл Q_3 (Б.11), есть \mathcal{P}_{free} . Используя формулы (11), (Б.9) и (Б.15), подводим окончательный баланс:

$$\mathcal{P}_{at} = \frac{1}{(1 + \gamma t_0)^2}, \quad \mathcal{P}_{free} = \frac{\gamma t_0}{1 + \gamma t_0}, \quad (26)$$

$$\mathcal{P}_{support} = \frac{\gamma t_0}{(1 + \gamma t_0)^2}.$$

Видно, что

при выполнении условия $\gamma t_0 \ll 1$, которое мы, как правило, и использовали в данной статье для иллюстраций, начальное возбуждение в основном остается сконцентрированным на атомах, а вероятности найти фотон в «излученном» и поддерживающем полях приблизительно одинаковы (порядка γt_0);

при $\gamma t_0 = 1$ энергия возбуждения с вероятностью $1/2$ уносится в виде излучения в свободное пространство, а остающаяся часть одинаково (по $1/4$) распределена между атомами и поддерживающим полем;

наконец, при выполнении условия $\gamma t_0 \gg 1$ вероятность обнаружить фотон в поддерживающем поле составляет малую величину порядка $(\gamma t_0)^{-1}$, в то время как вероятность найти атом в возбужденном состоянии еще меньше, порядка $(\gamma t_0)^{-2}$, т. е. энергия начального возбуждения системы в основном уносится в свободное пространство.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в данной работе подробно исследованы особенности динамики и спектра излучения системы из двух пространственно-разнесенных одинаковых атомов в одномерном пространстве. Наиболее интересный эффект — это субизлучение, когда атомы находятся на расстоянии, приблизительно равном целому или полужелому числу длин волн, отвечающих частоте атомного перехода.

На первый взгляд кажется, что рассмотренная ситуация является очень идеализированной и далекой от экспериментальных возможностей. Однако это не совсем так. В действительности в последнее десятилетие созданы так называемые дырчатые оптические волноводы [21, 22], в которых может быть реализован высокодобротный одномодовый режим. Более того, выполнены первые эксперименты [23], продемонстрировавшие возможность канализирования атома в полый волновод с поперечным размером порядка λ .

Что касается локализации атомов, то здесь так-

же имеется ряд возможностей, вытекающих из уже существующих экспериментальных реализаций, например, локализации иона в электромагнитной или радиочастотной ловушке, как в упомянутых во Введении экспериментах [14, 15], и локализации атома в узлах стоячей световой волны с использованием лазерного охлаждения атомов (оптические решетки в одномерном, двумерном и трехмерном случаях [24–26]).

На сегодняшний день ионные ловушки позволяют говорить о локализации в пределах нескольких нанометров. Световые ловушки (см. первый эксперимент [27] и обзор [28]) пока могут обеспечить не столь высокую степень локализации (примерно на порядок хуже, чем ионные ловушки), но можно иметь в виду недавно предложенный новый метод [29] локализации именно в волноводе, основанный на геометрии, в которой потенциал градиентной силы светового поля сосредоточен в поперечном направлении на расстоянии существенно меньшем длины волны.

Следует также иметь в виду жесткую локализацию атома в конденсированной среде. Особенно привлекательно в этом смысле следование современной нанотенденции, диктующей использование квантовых точек вместо атомов.

В заключение кратко упомянем возможные приложения.

Обнаруженное стабильное суперпозиционное состояние двух атомов это, если следовать общепринятой русскоязычной терминологии, есть «запутанное» («перепутанное», «сцепленное») состояние (entangled state). Таким состояниям, как известно, предназначена особая роль в будущих квантовых вычислениях³⁾. Подчеркнем, что рассмотренные в данной работе запутанные состояния могут быть долгоживущими в оптическом (видимом) диапазоне, что представляет особый интерес, а также могут легко переключаться с симметричного на антисимметричное и наоборот, для чего достаточно либо изменить на $\lambda/2$ положение одного из атомов, либо немного изменить показатель преломления среды.

Чрезвычайная чувствительность рассмотренных в данной работе эффектов (в частности, времени распада суперпозиционного состояния, а также спектров фотонов, излученных в двух разных

направлениях) к расстоянию между атомами и, возможно, к окружению, которое может слабо влиять на частоту атомного перехода, делает вполне вероятным их использование для прецизионных измерений и диагностик.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 00-15-96612). Авторы благодарят А. В. Камчатнова и В. П. Крайнова за полезные обсуждения некоторых математических вопросов в контексте данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Рассмотрим общий метод решения системы уравнений (1) без упрощающих предположений, сделанных в основном тексте. Сперва заметим⁴⁾, что система (1), состоящая из четырех уравнений интегродифференциального типа, может быть разделена на две независимые системы, каждая из двух уравнений, путем следующей замены:

$$\begin{aligned} A_g &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 + A_2), & A_u &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 - A_2), \\ B_\omega^{(g)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(B_\omega^{(+)} e^{ik_\omega R/2} + B_\omega^{(-)} e^{-ik_\omega R/2} \right), & (A.1) \\ B_\omega^{(u)} &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(B_\omega^{(+)} e^{ik_\omega R/2} - B_\omega^{(-)} e^{-ik_\omega R/2} \right). \end{aligned}$$

Фактически, если $A_u = 0$, то A_g есть амплитуда симметричной суперпозиции состояний $|eg\rangle$ и $|ge\rangle$ и наоборот, если $A_g = 0$, то A_u — амплитуда антисимметричной суперпозиции этих же состояний. В результате замены (A.1) имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} i \frac{dA_g}{dt} &= \int_0^\infty V_g(\omega) B_\omega^{(g)} e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega, & (A.2) \\ i \frac{dB_\omega^{(g)}}{dt} &= V_g(\omega) A_g e^{i(\omega - \omega_0)t} \end{aligned}$$

для «симметричной» части задачи, где

$$V_g = 2V(\omega) \cos \frac{k_\omega R}{2}, \quad (A.3)$$

³⁾ Здесь наиболее уместно сослаться на недавний обзор [30], который, во-первых, содержит весьма подробную библиографию и, во-вторых, акцентирует внимание именно на запутанных состояниях, вынеся этот термин в заглавие.

⁴⁾ Следует, однако, иметь в виду, что разделение нашей конкретной задачи («2 уровня и 2 континуума» по классификации, предложенной в работе [16]) на две более простые задачи («1 уровень и 1 континуум» каждая) непринципиально с точки зрения возможности получения аналитического решения, но выкладки в общем случае более громоздкие.

и систему уравнений

$$i \frac{dA_u}{dt} = \int_0^\infty V_u(\omega) B_\omega^{(u)} e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega, \tag{A.4}$$

$$i \frac{dB_\omega^{(u)}}{dt} = V_u(\omega) A_u e^{i(\omega - \omega_0)t}$$

для «антисимметричной» части, где

$$V_u = 2V(\omega) \sin \frac{k_\omega R}{2}. \tag{A.5}$$

По смыслу наших задач $V(\omega)$ — медленно меняющаяся функция, убывающая на бесконечности.

Далее обе системы уравнений, (A.2) и (A.4), подстановкой

$$A_{g,u}(t) = a(\varepsilon) e^{-i(\varepsilon - \omega_0)t}, \tag{A.6}$$

$$B_\omega^{(g,u)}(t) = b_\omega(\varepsilon) e^{-i(\varepsilon - \omega)t}$$

приводятся к задаче на собственные значения ε и собственные векторы $\|a(\varepsilon), b_\omega(\varepsilon)\|$:

$$(\varepsilon - \omega_0)a(\varepsilon) = \int_0^\infty G(\omega) b_\omega(\varepsilon) d\omega, \tag{A.7}$$

$$(\varepsilon - \omega)b_\omega(\varepsilon) = G(\omega)a(\varepsilon),$$

где индекс («g» либо «u») для краткости опущен, а функция $G(\omega)$, описывающая взаимодействие дискретного уровня с непрерывным спектром, есть соответственно V_g (A.3) либо V_u (A.5).

Метод диагонализации системы уравнений (A.7) известен. Для различных задач, в которых фигурирует непрерывный спектр, он дан в работах [16] (автоионизационные состояния атомов), [17] (лазерно-индуцированные переходы из дискретного состояния в зону уровней) и [18] (внутримолекулярная колебательная релаксация), а также в более поздней монографии [31]. В этих работах получено аналитическое решение при, в принципе, любом виде функции $G(\omega)$ (разумеется, непрерывность $G(\omega)$ предполагается). Однако имеется важный в контексте данной работы нюанс, состоящий в том, что случай, когда функция $G(\omega)$ в некоторых точках обращается в нуль, обладает спецификой, никак предыдущими работами не освещенной. Ниже этот пробел восполняется.

Как доказано в работе [17], спектр собственных значений задачи (A.7) непрерывен от границы, ниже которой функция $G(\omega)$ обращается в нуль (без ограничения общности считаем, что эта нижняя граница

равна нулю⁵⁾), до ∞ , а также может включать в себя дискретное собственное значение⁶⁾ $\varepsilon_- < 0$, если $G(0) \neq 0$. Но оказывается, что если имеется точка, в которой $G(\omega) = 0$ вблизи $\omega = \omega_0$, этим решение задачи не исчерпывается. А именно, возможно существование дополнительного, как бы внедренного в непрерывный спектр, дискретного собственного значения.

Чтобы доказать последнее утверждение, выпишем в явном виде собственный вектор задачи (A.7) как функцию собственного значения ε :

$$a(\varepsilon) = \frac{G(\varepsilon)}{\sqrt{\pi^2 G^4(\varepsilon) + [\varepsilon - \omega_0 - \mathcal{D}(\varepsilon)]^2}},$$

$$b_\omega(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 G^4(\varepsilon) + [\varepsilon - \omega_0 - \mathcal{D}(\varepsilon)]^2}} \times \tag{A.8}$$

$$\times \left\{ G(\varepsilon)G(\omega) \mathcal{P} \frac{1}{\varepsilon - \omega} + [\varepsilon - \mathcal{D}(\varepsilon)] \delta(\omega - \varepsilon) \right\}.$$

Здесь использованы стандартные обозначения обобщенных функций (см., например, [33]), δ -функции и $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ — аналога функции $1/x$, а также введено обозначение

$$\mathcal{D}(\varepsilon) = \text{Vp} \int_0^\infty \frac{G^2(\omega)}{\varepsilon - \omega} d\omega \equiv \int_0^\infty G^2(\omega) \mathcal{P} \frac{1}{\varepsilon - \omega} d\omega, \tag{A.9}$$

где символ Vp указывает на то, что интеграл понимается в смысле главного значения в соответствии с определением функции $\mathcal{P} \frac{1}{x}$.

В том, что (A.8) действительно есть решение задачи (A.7), легко убедиться непосредственной подстановкой. Как в любой квантовой задаче, имеющей дело с непрерывным спектром, собственный вектор принято нормировать на δ -функцию; в данном случае

$$a(\varepsilon)a(\varepsilon') + \int b_\omega(\varepsilon)b_\omega(\varepsilon') d\omega = \delta(\varepsilon - \varepsilon').$$

Однако нетрудно заметить, что формулы (A.8) могут дать неопределенность в выколотой точке спек-

⁵⁾ В свободном одномерном пространстве $V(\omega) \propto \sqrt{\omega}$, но в волноводе нижняя граница $V(\omega)$ может быть ненулевой. Также сам вид функции $V(\omega)$ зависит как от формы сечения волновода, так и от положения атома относительно оси волновода [32].

⁶⁾ Это дискретное значение, даже если оно формально существует, не играет в контексте данной работы сколько-нибудь заметной роли, поскольку «скорость распада много меньше частоты перехода» ($\Gamma \ll \omega_0$, см. Введение), и поэтому столь далекий край энергетического спектра дает пренебрежимо малый вклад в динамику системы.

тра ε_0 , если в этой точке одновременно выполнены два равенства:

$$G(\varepsilon_0) = 0, \quad \mathcal{D}(\varepsilon_0) = \varepsilon_0. \quad (\text{A.10})$$

В этом случае нужно дополнительное исследование.

Такое исследование приводит к следующему результату. В отличие от остального спектра, где данному ε отвечает один и только один собственный вектор (A.8), собственное значение ε_0 является дважды вырожденным, т.е. для ε_0 , обладающего свойством (A.10), имеются два линейно-независимых решения системы уравнений (A.7). Соответствующую пару ортогональных собственных векторов удобно выбрать в следующем виде:

$$a^{(1)}(\varepsilon_0) = 0, \quad b_{\omega}^{(1)}(\varepsilon_0) = \delta(\omega - \varepsilon_0), \quad (\text{A.11})$$

$$a^{(2)}(\varepsilon_0) = C, \quad b_{\omega}^{(2)}(\varepsilon_0) = \begin{cases} C \frac{G(\omega)}{\varepsilon_0 - \omega}, & \omega \neq \varepsilon_0 \\ 0, & \omega = \varepsilon_0. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Первый из собственных векторов в (A.11) есть просто невозмущенное состояние изначального непрерывного спектра, которое в силу $G(\varepsilon_0) = 0$, первого из условий (A.10), не взаимодействует с другими уровнями. Второй из собственных векторов, в отличие от всех остальных, при некотором естественном дополнительном предположении, относящемся к виду функции $G(\omega)$ в окрестности точки $\omega = \varepsilon_0$, нормируется на единицу: входящая в (A.12) нормировочная постоянная определяется как

$$C = \left[1 + \int_0^{\infty} \frac{G^2(\omega)}{(\omega - \varepsilon_0)^2} d\omega \right]^{-1/2},$$

и, если $G(\omega \rightarrow \varepsilon_0) \sim (\omega - \varepsilon_0)^\alpha$, где $\alpha > 1/2$, то C — вполне определенная величина.

Функции $G(\omega)$, представляющие интерес в контексте данной работы, а именно V_g (A.3) и V_u (A.5), являются произведениями медленно меняющейся функции V на быстроосциллирующий синус или косинус от некоей функции, которая линейна в отсутствие дисперсии (когда $k_\omega \propto \omega$), но в общем случае нелинейна. Однако в любом случае нули у функции G вблизи ω_0 имеются. Нетрудно также заметить, что выбором параметра R (расстояния между атомами), который входит в (A.3) и (A.5), всегда можно одновременно удовлетворить второму из равенств (A.10). Действительно, рассматривая ε_0 как

функцию R , видим, что при условии $G(\varepsilon_0) = 0$ величина $\mathcal{D}(\varepsilon_0)$ (A.9) от R зависит очень слабо: в основном, значение $\mathcal{D}(\varepsilon_0) \approx \mathcal{D}_0$ определяется двумя факторами — асимметрией функции $V(\omega)$ относительно частоты атомного перехода ω_0 и дисперсией, в данном случае приводящей к асимметрии функций $\cos^2(k_\omega R/2)$ и $\sin^2(k_\omega R/2)$ относительно их локальных нулей. Поэтому значение R , удовлетворяющее второму из условий (A.10), выбирается таким образом, чтобы нуль функции G был сдвинут от частоты ω_0 на величину \mathcal{D}_0 .

В основном тексте данной статьи мы пренебрегли асимметрией функции $V(\omega)$, считая ее константой от $-\infty$ до $+\infty$, а также пренебрегли дисперсией. Поэтому оба условия (A.10) автоматически выполнялись при равенстве расстояния R либо (для $G = V_u$) целому числу длин волн, отвечающих частоте атомного перехода ω_0 , либо (для $G = V_g$) полуцелому числу длин волн. В реальной ситуации значения R , при которых существуют стабильные суперпозиционные состояния $(|eg\rangle \pm |ge\rangle)/\sqrt{2}$, немного изменяются, однако, как показано в данном Приложении, ни наличие дисперсии, ни зависимость V от ω само их существование ни в коей мере не разрушают.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Адекватная трактовка свойств рассмотренного в данной работе устойчивого возбужденного запутанного состояния двух атомов, а также свойств излучения, поддерживающего это состояние, и излучения, испущенного в сопутствующем переходном процессе, требует вычисления следующего предела:

$$A_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \theta(t - nt_0) [\gamma(t - nt_0)]^n \times e^{-\gamma(t - nt_0)}. \quad (\text{B.1})$$

В частности, предельное значение амплитуд $A_1(t)$ и $A_2(t)$ для решения (10) при выполнении равенства

$$e^{i\omega_0 t_0} = -1 \quad (\text{B.2})$$

равно $A_\infty/\sqrt{2}$, так что вероятность нахождения атомов в возбужденных состояниях стремится при $t \rightarrow \infty$ к A_∞^2 в соответствующем случае «симметричного» начального условия⁷⁾.

⁷⁾ Ранее было анонсировано, что величина A_∞^2 есть правая часть соотношения (11).

Чтобы вычислить предел (Б.1), используем условие нормировки

$$|A_1(t)|^2 + |A_2(t)|^2 + \int |B_\omega^{(+)}(t)|^2 d\omega + \int |B_\omega^{(-)}(t)|^2 d\omega = 1. \quad (\text{Б.3})$$

Амплитуды $B_\omega^{(+)}(t)$ и $B_\omega^{(-)}(t)$ выражаются через $A(t) \equiv A_1(t) = A_2(t)$ путем интегрирования двух последних уравнений (1). Решение (10) формально соответствует случаю, когда матричный элемент взаимодействия $V(\omega) = \text{const}$, т.е. интегрирование в (Б.3) распространяется на всю бесконечную ось. Отсюда, переходя к пределу, получаем

$$A_\infty^2 = 1 - \frac{2\gamma}{\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \cos \omega t_0) |\mathcal{I}_\omega(t)|^2 d\omega, \quad (\text{Б.4})$$

где использовано соотношение (5) и введено обозначение

$$\mathcal{I}_\omega(t) = \int_0^t A(\tau) e^{i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau. \quad (\text{Б.5})$$

Далее интегрируем (Б.5) по частям:

$$\mathcal{I}_\omega(t) = \frac{i}{\omega - \omega_0} \times \left[\frac{1}{\sqrt{2}} A(t) e^{i(\omega - \omega_0)t} + \int_0^t A'(\tau) e^{i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau \right], \quad (\text{Б.6})$$

после чего, исходя из (10) с дополнительным условием (Б.2), используем явный вид производной $A'(t)$ для вычисления входящего в (Б.6) интеграла с верхним пределом, стремящимся к бесконечности. В результате приходим к асимптотике для \mathcal{I}_ω в виде суммы осциллирующего и постоянного членов:

$$\mathcal{I}_\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left[-i A_\infty \frac{e^{i(\omega - \omega_0)t}}{\omega - \omega_0} + \frac{1}{\gamma(1 + e^{i\omega t_0}) - i(\omega - \omega_0)} \right]. \quad (\text{Б.7})$$

Далее, подстановка (Б.7) в (Б.4) приводит к следующему уравнению для искомой величины A_∞ :

$$A_\infty^2 \left(1 + \frac{\gamma}{\pi} Q_1 \right) - \frac{2\gamma}{\pi} A_\infty \text{Im} Q_2 = 1 - \frac{1}{\pi} Q_3, \quad (\text{Б.8})$$

где $Q_{1,2,3}$ (после замены переменной $x = \omega - \omega_0$ и с учетом условия (Б.2)) суть обозначения для трех интегралов, первый из которых табличный,

$$Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos xt_0}{x^2} dx = \pi t_0, \quad (\text{Б.9})$$

второй,

$$Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos xt_0) e^{ixt}}{\gamma(1 - e^{ixt_0}) - ix} dx, \quad (\text{Б.10})$$

стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, а третий — не вполне тривиальный⁸⁾:

$$Q_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(1 - \cos xt_0)}{[\gamma(1 - \cos xt_0)]^2 + [x + \gamma \sin xt_0]^2} dx. \quad (\text{Б.11})$$

Чтобы взять интеграл (Б.11), преобразуем его к виду

$$Q_3 = \text{Re} \left[\text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ix + \gamma - \gamma e^{-ixt_0}} \right]. \quad (\text{Б.12})$$

Далее выражаем входящее в (Б.12) главное значение через интеграл по контуру \mathcal{C} от $-\infty$ до ∞ с обходом в комплексной плоскости против часовой стрелки полюса $x = 0$ подынтегрального выражения:

$$\text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ix + \gamma - \gamma e^{-ixt_0}} = -\frac{\pi}{1 + \gamma t_0} + \int_{\mathcal{C}} \frac{dx}{ix + \gamma - \gamma e^{-ixt_0}}, \quad (\text{Б.13})$$

после чего остается вычислить интеграл по контуру \mathcal{C} . Для его вычисления замечаем, что после исключения полюса $x = 0$ выполнено неравенство $|\gamma e^{-ixt_0}| < |ix + \gamma|$ всюду на контуре \mathcal{C} . Поэтому можно входящее в (Б.12) подынтегральное выражение разложить в геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{ix + \gamma - \gamma e^{-ixt_0}} = \frac{1}{ix + \gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^n e^{-inx t_0}}{(ix + \gamma)^{n+1}}. \quad (\text{Б.14})$$

Явно выделенный первый член в правой части разложения (Б.14) при интегрировании по контуру \mathcal{C} дает величину, равную π , а члены суммы дают при интегрировании нуль, так как соответствующие функции экспоненциально затухают в нижней части комплексной плоскости и не имеют там полюсов. Отсюда с учетом (Б.13) находим, что

$$Q_3 = \pi - \frac{\pi}{1 + \gamma t_0} = \frac{\pi \gamma t_0}{1 + \gamma t_0}, \quad (\text{Б.15})$$

⁸⁾ Идея вычисления этого интеграла принадлежит В. П. Крайнову.

и в результате подстановки Q_1 (Б.9) и Q_3 (Б.15) в уравнение (Б.8) приходим к окончательному результату для искомого предела:

$$A_\infty = \frac{1}{1 + \gamma t_0}, \quad (\text{Б.16})$$

что ровно в два раза больше предельных значений (9) для амплитуд A_1 и A_2 в случае, когда начальное условие соответствует возбуждению одного из атомов, и в $\sqrt{2}$ раз больше чем $A_{1,2}$ в случае «симметричного» начального условия.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Weisskopf, E. Wigner, Zs. Phys. **63**, 54 (1930).
2. П. Лоудон, *Квантовая теория света*, Мир, Москва (1976), гл. 8.
3. Н. Мотт, И. Снеддон, *Волновая механика и ее применения*, Наука, Москва (1966), § 48.
4. В. П. Быков, Г. В. Шепелев, *Излучение атомов вблизи материальных тел*, Наука, Москва (1986).
5. S. Haroche and J. M. Raimond, in *Cavity Quantum Electrodynamics*, ed. by P. Berman, Academic Press, New York (1994), p. 123.
6. E. Yablonovich, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
7. S. John, Phys. Rev. Lett. **58**, 2486 (1987).
8. V. V. Klimov, M. Ducloy, and V. S. Letokhov, J. Mod. Optics **43**, 2251 (1996).
9. V. V. Klimov and V. S. Letokhov, Phys. Rev. A **54**, 4408 (1996).
10. В. В. Климов, М. Дюклуа, В. С. Летохов, КЭ **31**, 569 (2001).
11. R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
12. M. S. Feld and J. C. MacGillivray, in *Coherent Nonlinear Optics*, ed. by M. S. Feld and V. S. Letokhov, Springer-Verlag, Berlin (1980), *Topics in Current Physics*, Vol. 21, p. 7.
13. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).
14. R. G. DeVoe and R. G. Brewer, Phys. Rev. Lett. **76**, 2049 (1996).
15. J. Eschner, Ch. Raab, F. Schmidt-Kaler, and R. Blatt, Nature **413**, 495 (2001).
16. U. Fano, Phys. Rev. **124**, 1866 (1961).
17. А. А. Макаров, В. Т. Платоненко, В. В. Тяхт, ЖЭТФ **75**, 2075 (1978).
18. А. А. Макаров, в кн. *Лазерная спектроскопия колебательно-возбужденных молекул*, под ред. В. С. Летохова, Наука, Москва (1990), с. 77 (Приложение 3.А).
19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982), § 91.
20. Л. Д. Ландау, Е. М., Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматгиз, Москва (1963), § 42.
21. J. C. Knight, T. A. Birks, P. St. J. Russel, and D. M. Atkin, Opt. Lett. **21**, 1547 (1996).
22. А. М. Желтиков, УФН **170**, 1203 (2000).
23. M. J. Renn, E. A. Donley, E. A. Cornell et al., Phys. Rev. A **53**, R648 (1996).
24. В. С. Летохов, Письма в ЖЭТФ, **7**, 348 (1968).
25. V. S. Letokhov, in *Proc. Conf. «Methods of Spectroscopy without Doppler Broadening of Excited Levels of Simple Molecules»* (Aussois, France, May 1973), CNRS, Paris (1974), p. 127.
26. V. S. Letokhov, Laser and Unconv. Opt. № 43, 3 (1973).
27. P. S. Jessen, C. Gerz, P. D. Lett et al., Phys. Rev. Lett. **69**, 49 (1992).
28. V. I. Balykin, V. G. Minogin, and V. S. Letokhov, Rep. Progr. Phys. **63**, 1429 (2000).
29. В. И. Балыкин, В. В. Климов, В. С. Летохов, частное сообщение.
30. И. В. Багратин, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, УФН **171**, 625 (2001).
31. C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*, John Wiley & Sons, New York (1992), p. 64.
32. M. A. Rippin and P. L. Knight, J. Mod. Optics **43**, 807 (1996).
33. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1967), гл. 2.