

КВАЗИСТАЦИОНАРНАЯ СТАДИЯ НЕРАВНОВЕСНОГО ОПТИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ПОЛЕ БЕССЕЛЕВА ВОЛНОВОГО ПУЧКА

С. Б. Бодров, В. Б. Гильденбург, А. М. Сергеев*

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 27 января 2003 г.

Аналитически исследованы самосогласованные стационарные распределения поля и плазмы, создаваемые бесселевыми волновыми пучками в газе с ионизационной и керровской нелинейностью. В рамках стационарной модели, основанной на использовании условия постоянства амплитуды поля в ионизированной области, рассмотрены структуры, образуемые бесселевыми пучками двух типов: с азимутальным электрическим полем, равным нулю на оси симметрии, и квазипоперечным полем с максимумом поля на оси. Особенностью структуры формируемого плазменного канала в первом случае является наличие в его центральной части неионизированной области (трубчатый разряд), радиус которой не зависит от падающей погонной мощности. Во втором случае канал является сплошным. Найдена связь между падающей мощностью излучения и внешним радиусом разряда. Показано, что керровская нелинейность, особенно существенная при малых углах сходимости пучка, приводит к увеличению максимальной плотности плазмы и уменьшению радиуса разряда. На основании предложенной модели приведены оценки параметров плазменных образований, создаваемых при фокусировке гауссова пучка конической линзой.

PACS: 52.50.Jm

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование неравновесных разрядов, создаваемых в приосевой области фокусируемых лазерных пучков, привлекает внимание в связи с возможностью их использования для создания протяженных плазменных волноводов — основы современных проектов рентгеновских лазеров и ускорителей электронов. Весьма перспективными в этом плане представляются шнуровые (нитевидные) разряды, создаваемые в результате фокусировки пучка при помощи конической линзы (аксикона) [1–5]. Аксиконная фокусировка обеспечивает независимый распределенный подвод электромагнитной энергии к плазменному шнуру по всей его длине, способствуя тем самым повышению его осевой устойчивости и исключая ограничения на длину, связанные с дефокусирующим действием плазмы. Схематическое изображение аксиконной фокусировки волнового пучка и разряда, создаваемого в его приосевой области, пред-

ставлено на рис. 1. Характерные продольный (L) и поперечный (d) размеры разряда определяются при не слишком сильных превышениях пороговой интенсивности пробоя I_{th} соответствующими размерами приосевой каустики пучка и, в частности, при значении длины волны $\lambda \sim 1$ мкм, входного радиуса пучка $R \sim 1$ см и угла фокусировки $\vartheta \sim 10^{-1}$ составляют: $L \sim R/\operatorname{tg} \vartheta \sim 10$ см, $d \sim \lambda/\sin \vartheta \sim 10$ мкм.

Поле волнового пучка, формируемого аксиконом, близко к полю цилиндрической волны — его радиальное распределение на достаточно протяженном отрезке длины определяется функцией Бесселя (поперечная компонента электрического поля $E_{\perp} \sim J_0(k_{\perp}r)$, k_{\perp} — поперечное волновое число), благодаря чему и сам пучок часто называют бесселевым. При помощи специального фазового корректора, располагаемого перед аксиконом, могут быть сформированы пучки с ненулевыми азимутальными индексами $m = 1, 2, 3, \dots$, поперечное поле которых на оси равно нулю ($E_{\perp} \sim J_m(k_{\perp}r) \exp(im\varphi)$; r, φ — полярные координаты в плоскости поперечного сечения). Динамика и структура разрядов в

*E-mail: bosbor@mail.nnov.ru

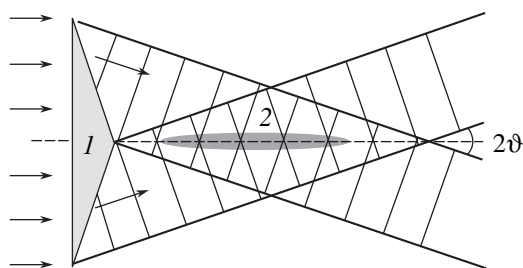


Рис. 1. Схематическое изображение аксиконной фокусировки и области пробоя: 1 — коническая линза, 2 — область разряда

бесселевых пучках различных видов (как с максимумом, так и с минимумом поля на оси) исследовалась экспериментально и путем численного моделирования несколькими группами авторов (см. работы [6–10] и цитированную в них литературу). В работах [6–9] изучались явления, характеризуемые сравнительно большими временными масштабами, на которых динамика разряда существенно определяется процессами нагрева и газодинамического расширения образующейся плазмы. Эти процессы на временах порядка 100 пс приводят к образованию в разряде требуемой волноводной структуры с минимумом плотности плазмы на оси [8, 9] и, как показало численное решение самосогласованной задачи [9], могут сопровождаться явлением самозахвата ионизирующего излучения в собственные моды образующегося плазменного волновода. На временах порядка 1–10 нс те же тепловые и газодинамические процессы могут вызывать продольную самомодуляцию плазмы [4–7], приводящую к разрушению регулярного волноводного канала. В работе [7] была также экспериментально продемонстрирована возможность получения (и сохранения на поздних стадиях процесса) плазменной структуры волноводного типа с минимумом плотности на оси, образующимся сразу (уже на начальной стадии пробоя среды) в поле «трубчатого» бесселева пучка, радиальная структура которого описывается функцией Бесселя ненулевого порядка.

При пробое газа лазерными импульсами достаточно высокой интенсивности и малой (< 10 пс) длительности процессы нагрева и движения газа не могут проявиться до окончания импульса. Можно ожидать, что в этом случае процесс быстрой (лавинообразной или туннельной) ионизации должен завершаться, ввиду экранирующего действия образующейся плазмы и весьма резкой зависимости скорости ионизации от амплитуды поля, установлении

ем некоторого неравновесного квазистационарного состояния, в котором газ еще остается холодным и неподвижным, а амплитуда электрического поля в плазме снижена до уровня, отвечающего порогу ионизации. Такой стационарный режим (будем называть его холодным разрядом) может устанавливаться за весьма малые времена (< 1 пс) и реализовываться в качестве начальной стадии любого разряда (до появления заметных изменений температуры газа) в импульсах большой длительности.

В работе [10] описаны эксперименты по аксиконному пробую, вызываемому в твердом диэлектрике высокоинтенсивными лазерными импульсами фемтосекундной длительности. Однако прямое наблюдение и измерение параметров описываемого квазистационарного состояния в этих экспериментах, как и в экспериментах с длинными импульсами, было затруднено из-за ограниченной разрешающей способности используемой аппаратуры. Возможно, подобные наблюдения удастся провести на основе усовершенствования методики, использующей зондирование плазмы слабыми пробными импульсами.

Целью данной работы является аналитическое исследование возможных самосогласованных стационарных распределений поля и плазмы в бесселевых пучках двух видов (с нулем или максимумом поля на оси). Плотность плазмы и амплитуда цилиндрической волны, формирующей бесселев пучок, рассматриваются как функции расстояния до оси симметрии и не зависят от продольной координаты. Анализ проводится на основе весьма простой приближенной модели, в которой плазма разряда рассматривается как среда с заданным уровнем нелинейного самоограничения амплитуды электрического поля. Такая модель была предложена и использовалась ранее для описания различных типов стационарных структур микроволнового [11–13] и оптического [14] разрядов. Как и в работах [14, 15], наряду с ионизационной мы принимаем во внимание также и керровскую (электронную) нелинейность, приводящую к искривлению лучевых траекторий в волновом пучке вне области разряда.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ

Скорость w изменения средней по периоду поля концентрации (плотности плазмы) N , определяемая в каждой точке как разность локальных скоростей ионизации w_i и рекомбинационных потерь w_r , в общем случае представляет собой функцию concentra-

ции электронов, нейтральных частиц N_m и амплитуды переменного электрического поля $|\mathbf{E}|$:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = w_i - w_r = w(N, N_m, |\mathbf{E}|). \quad (1)$$

Другие (нелокальные) механизмы изменения плотности, обусловленные, например, действием пondeмоторной силы или процессами переноса частиц и тепла, в интересующих нас условиях оптического пробоя газа импульсами достаточно малой длительности, не успевают стать существенными. Зависимость $w(|\mathbf{E}|)$ в этих условиях является весьма резкой в окрестности некоторого порогового значения амплитуды E_{th} , обычно определяемого как пороговое поле пробоя. При пробое газа в бесселевом пучке с частотой ω и поперечным волновым числом $k_{\perp} = (\omega/c) \sin \vartheta$ (ϑ — угол сходимости пучка) плотность образующейся плазмы весьма быстро достигает значения

$$N \sim N_s = N_{cr} \sin^2 \vartheta$$

($N_{cr} = m\omega^2/4\pi e^2$ — критическая концентрация), при котором становится заметным ее влияние на величину и структуру электромагнитного поля. Из-за экранирующего действия плазмы амплитуда поля внутри разряда уменьшается, что, в свою очередь, приводит к резкому уменьшению скорости и практической остановке роста концентрации. Таким образом, в разряде фактически происходит самоограничение электромагнитного поля на уровне E_{th} , после чего в течение некоторого промежутка времени (до начала газодинамических процессов), разряд остается в квазистационарном состоянии. В этом состоянии поле внутри плазмы можно принять равным пороговому, определяя величину и пространственное распределение плотности плазмы на основании решения соответствующей обратной задачи электродинамики, т. е. подчиняя решение уравнений Максвелла (при заданных характеристиках падающей цилиндрической волны) условию (см. также [11–14])

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}| &= E_{th} & \text{в области } N > 0, \\ |\mathbf{E}| &< E_{th} & \text{в области } N = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что данный подход обеспечивает высокую точность расчета самосогласованных стационарных распределений поля и плазмы в разряде при достаточно высоком уровне рекомбинационных потерь, когда в окрестности точки $|\mathbf{E}| = E_{th}$, определяемой условием $w = w_i - w_r = 0$, зависимость $w(|\mathbf{E}|)$ имеет достаточно высокую крутизну. При отсутствии рекомбинации на начальном этапе пробоя могут образоваться сравнительно узкие долгоживущие зоны

с плотностью плазмы, заметно превышающей значения, рассчитанные на основании условия (2), однако и в этом случае решение, получаемое при помощи этого условия, позволяет провести приближенный расчет основных структурных характеристик стационарного состояния и найти их зависимость от исходных параметров задачи.

Стационарное волновое уравнение для вектора комплексной амплитуды электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ в плазме и в окружающей ее нейтральной среде запишем в виде

$$-\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}] + k_0^2 [1 - n(1 - i\delta) + \beta |\mathbf{E}|^2] \mathbf{E} = 0. \quad (3)$$

Здесь $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме, $\delta = \nu/\omega$, ν — эффективная частота соударений электронов,

$$n = \frac{N}{N_{cr}} (1 + \delta^2)^{-1}$$

— безразмерная концентрация электронов, β — параметр керровской нелинейности — коэффициент в разложении диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_L + \beta |\mathbf{E}|^2$, определяемый нелинейной поляризуемостью среды (деформацией электронных орбит и смещением электронных уровней атомов в сильном оптическом поле). Линейной поляризуемостью атомов пренебрегаем, полагая $\varepsilon_L = 1 - n(1 - i\delta)$. В газах характерная величина β при атмосферном давлении составляет $(1-10) \cdot 10^{-21} \text{ см}^2/\text{В}^2$. При повышении давления коэффициент β растет пропорционально концентрации нейтральных частиц. Керровская нелинейность приводит к изменению фактического угла входа излучения в область пробоя и оказывается существенной при малых углах сходимости невозмущенного пучка ϑ .

Решение поставленной задачи существенно упрощается в условиях, когда разряд обладает цилиндрической симметрией, а вектор электрического поля представлен (точно или приближенно) одной скалярной проекцией. Мы рассмотрим ниже две такие модели: 1) разряд в поле симметричной TE -волны с азимутальным электрическим полем E_{φ} , обращаемся в нуль на оси симметрии (векторная модель), и 2) разряд, создаваемый квазипоперечным полем E_x широкого бесселева пучка с максимумом на оси (скалярная модель). В первом случае задача в рамках используемого подхода (2), (3) допускает сравнительно простое точное решение при любом значении угла сходимости пучка ϑ . Во втором случае задача может быть решена в скалярном (параксиальном) приближении при $\vartheta \ll 1$. В обоих случаях нас будут

интересовать решения уравнения (3), записываемые в цилиндрических координатах r, z в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \xi_0 E(r) \exp(ihz), \quad (4)$$

т. е. представляющие собой радиально-неоднородную бегущую волну с фиксированным продольным волновым числом $h = k_0 \cos \vartheta$ и задаваемой некоторым единичным вектором ξ_0 поляризации.

3. РАЗРЯД В СИММЕТРИЧНОЙ ТЕ-ВОЛНЕ С АЗИМУТАЛЬНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ (ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ)

Рассмотрим разряд, поддерживаемый полем симметричной ТЕ-волны с азимутальным электрическим полем. Полагая в выражении (4) $\xi_0 = \varphi_0$ (φ_0 — единичный вектор в направлении отсчета азимутального угла φ) и представляя соответствующую проекцию поля в виде $E = A \exp(i\psi)$, получаем на основании уравнений (2), (3) следующие уравнения: для комплексной амплитуды E в неионизованной области (при $n = 0$),

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r^2} + k_{\perp}^2 E + k_0^2 \beta |E|^2 E = 0, \quad (5)$$

и действительных функций $\psi(r), n(r)$ в области плазмы ($n > 0, A = E_{th}$),

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = k_0^2 \delta n, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 = k_0^2 (n_m - n) - \frac{1}{r^2}. \quad (7)$$

Здесь введено обозначение

$$n_m = (1 + \gamma) \sin^2 \vartheta, \quad \gamma = \frac{\beta E_{th}^2}{\sin^2 \vartheta}.$$

Условия на границе, разделяющей ионизованную и неионизованную области, эквивалентные условиям непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей, имеют вид

$$|E| = A = E_{th}, \quad \frac{\partial A}{\partial r} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right\} = 0, \quad (8)$$

где фигурные скобки обозначают скачок величины на границе.

Ввиду положительности n уравнение (7) не может выполняться в приосевой области и, следовательно, в рамках рассматриваемой стационарной модели разряд должен иметь внутреннюю полость, где

газ остается неионизованным. Плотность плазмы в общем случае может быть отличной от нуля лишь внутри некоторой кольцевой области $r_0 \leq r \leq r_1$, т. е. исследуемый стационарный разряд представляет собой цилиндрическую трубку.

Во внутренней области $r < r_0$, не занятой плазмой, ввиду отсутствия сторонних источников на оси, фаза $\psi = \text{const}$. При этом в отсутствие керровской нелинейности (при $\beta = 0$) решением уравнения (5) является функция Бесселя первого порядка: $E \sim J_1(k_{\perp} r)$, а радиус внутренней полости r_0 , как следует из граничных условий (8), определяется положением первого максимума (т. е. первым нулем производной) этой функции:

$$r_0 = \bar{r}_0 \approx \frac{1.84}{k_0 \sin \vartheta}.$$

Учет керровской нелинейности приводит к увеличению эффективного поперечного волнового числа и, следовательно, к уменьшению внутреннего радиуса плазменной трубки: $r_0 = \bar{r}_0 f(\gamma)$. Зависимость $f(\gamma)$, найденная на основании численного решения уравнения (5), приведена на рис. 2. Можно отметить, что радиус r_0 определяется только углом ϑ схождения цилиндрической волны и параметром γ (он не зависит от падающей мощности и частоты столкновений электронов).

Уравнение для концентрации в области $r_0 \leq r \leq r_1$ можно получить из уравнений (6), (7), исключая из них фазу ψ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sqrt{k_0^2 (n_m - n) - \frac{1}{r^2}} \right) = k_0^2 \delta n. \quad (9)$$

Величина плотности плазмы на внутренней границе ионизованной области, как следует из уравнения (7) и условия $d\psi(r_0)/dr = 0$, равна

$$n_0 = n(r_0 + 0) = n_m - \frac{1}{(k_0 r_0)^2}.$$

В отсутствие столкновений (при $\delta = 0$) условие $d\psi/dr = 0$ выполняется во всем пространстве; уравнение (7) в этом случае позволяет найти функцию $n(r)$ во всей области, где $n \neq 0$:

$$n = n_m - \frac{1}{(k_0 r)^2}. \quad (10)$$

В общем случае решение уравнения (9) для функции $n(r)$ выражается через функции Бесселя комплексного порядка. Ввиду громоздкости и недостаточной наглядности такого представления решения

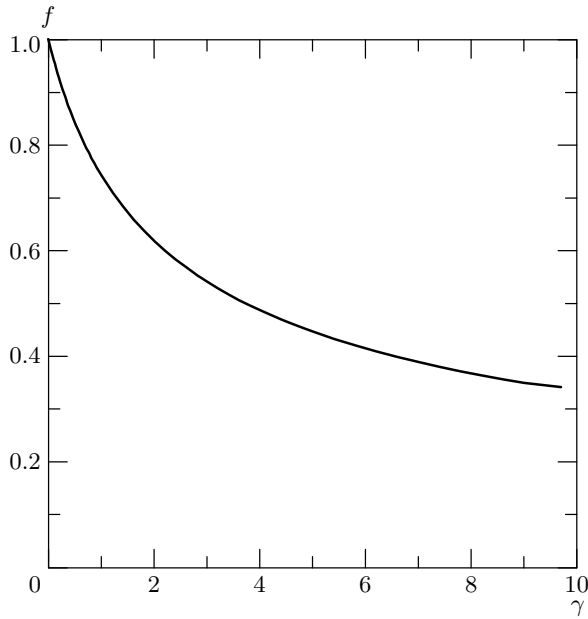


Рис. 2. Зависимость безразмерного внутреннего радиуса «трубчатого» разряда $f = r_0/\bar{r}_0$ от параметра керровской нелинейности $\gamma = \beta E_{th}^2 / \sin^2 \vartheta$ (векторная модель)

(см. Приложение) мы приведем здесь лишь результаты его приближенного анализа в некоторых предельных случаях, а также результаты численного расчета.

При малых частотах соударений электронов ($\delta \ll 1$) решение в области $r \ll 1/k_0\sqrt{n_m}\delta$ можно найти методом возмущений, рассчитывая на основании (9) первую поправку к нулевому приближению (10):

$$n = n_m - \frac{1}{(k_0 r)^2} - \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 \left[\frac{n_m}{2}(r^2 - r_0^2) + \frac{1}{k_0^2} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \right]^2. \quad (11)$$

Определяемая этим выражением функция $n(r)$ достигает максимума

$$n_{max} = \tilde{n} \approx n_m(1 - \delta)$$

в точке

$$r = \tilde{r} \approx \sqrt{\frac{2}{k_0^2 n_m \delta}}.$$

На больших расстояниях от оси плотность плазмы при любых $\delta \neq 0$ монотонно убывает и в области

$$r \gg \frac{1 + \delta}{k_0 \delta \sqrt{n_m}}$$

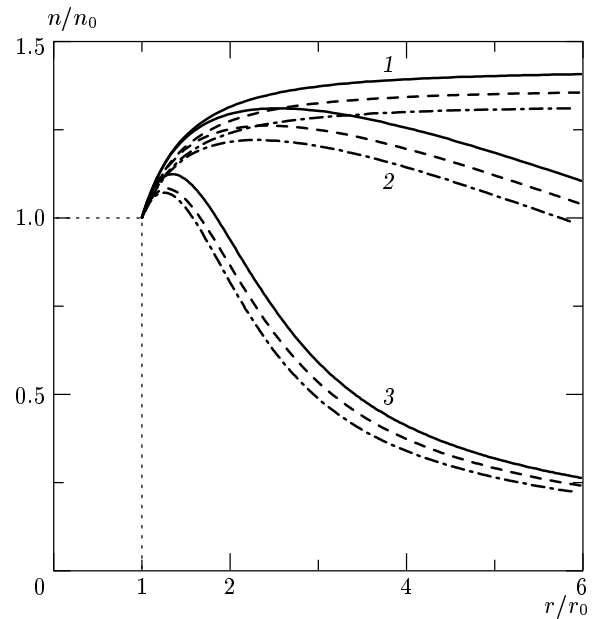


Рис. 3. Радиальные распределения плотности плазмы в «трубчатом» разряде при различных значениях параметров δ и γ (радиус r нормирован на внутренний радиус разряда $r_0 = 1.84f/k \sin \vartheta = 0.29\lambda f / \sin \vartheta$; значения f определяются графиком рис. 2): $\delta = 0$ (1), 0.1 (2), 0.5 (3); $\gamma = 0$ (сплошные кривые), 1 (штриховые), 10 (штрих-пунктирные)

выходит на свою асимптотику

$$n = \frac{\sqrt{n_m}}{k_0 r \delta}.$$

Результаты численного интегрирования уравнения (9) при различных значениях δ и γ показаны на рис. 3.

При любом конечном значении погонной мощности P падающей волны (определяемой как поток энергии падающей волны через охватывающую ось z поверхность цилиндра единичной длины) описанные выше распределения плотности должны быть оборваны в некоторой точке $r = r_1$, правее которой плотность плазмы вновь обращается в нуль ($n(r > r_1) = 0$). Положение этой внешней границы плазменной трубки r_1 , так же как и поглощаемая разрядом погонная мощность Q , зависит от параметров P , δ , ϑ , γ и может быть найдено на основании решения уравнения (5) с граничными условиями (8) при $r = r_1$ и условием излучения для поля отраженной волны на бесконечности. В частности, в отсутствие керровской нелинейности и при выполнении условия $k_{\perp} r_1 \gg 1$, когда решение выражается через

функции Бесселя, а последние близки к своим дальним асимптотикам, поле во внешней области может быть представлено в виде суперпозиции падающей и отраженной волн:

$$E = A \exp(i\psi) = \frac{C_i}{\sqrt{r}} \exp(ik_{\perp}r) + \frac{C_r}{\sqrt{r}} \exp(-ik_{\perp}r). \quad (12)$$

Граничные условия (8) позволяют связать амплитуду падающей волны, $|C_i|r^{-1/2}$, с производной фазы, $d\psi(r)/dr$, при $r = r_1$:

$$\frac{C_i}{\sqrt{r_1}} = \frac{1}{2} E_{th} \left(\frac{1}{k_0 \sin \vartheta} \frac{d\psi(r_1)}{dr} + 1 \right). \quad (13)$$

Отсюда на основании выражений для падающей и поглощаемой мощностей,

$$P = \frac{c}{4} |C_i|^2 \sin \vartheta, \quad Q = \frac{cr_1}{4k_0} \frac{d\psi(r_1)}{dr} E_{th}^2, \quad (14)$$

и уравнения (7), позволяющего выразить производную $d\psi/dr$ через плотность плазмы, получаем соотношения, связывающие мощности P и Q с радиусом r_1 при $r_1 \gg r_0$:

$$P = \frac{cr_1}{16} \sin \vartheta E_{th}^2 \times \left(1 + \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{\sin^2 \vartheta - n(r_1) - (k_0 r_1)^{-2}} \right)^2, \quad (15)$$

$$Q = \frac{cr_1}{4} E_{th}^2 \sqrt{\sin^2 \vartheta - n(r_1) - (k_0 r_1)^{-2}}. \quad (16)$$

Входящая сюда величина $n(r_1)$ определяется из решения уравнения (9). В отсутствие поглощения ($\delta = 0$, $d\psi/dr = 0$, $Q = 0$) для поддержания разряда с радиусом внешней границы r_1 требуется падающая мощность

$$P_0 = \frac{c \sin \vartheta}{16} r_1 E_{th}^2.$$

При сильном поглощении ($k_0 r_1 \sqrt{\sin \vartheta} \delta \gg 1 + \delta$) поглощаемая мощность близка к падающей: $Q \approx P = 4P_0$. Пороговая погонная мощность поддержания разряда P_{th} может быть найдена из условия $E_{max}^{(0)} = E_{th}$, которому должна удовлетворять максимальная амплитуда невозмущенного плазмой поля $E^{(0)}(r)$. В отсутствие керровской нелинейности (при $E^{(0)} \sim J_1(rk_{\perp})$) $P_{th} = 0.12cE_{th}^2/k_0$.

Керровская нелинейность дает малые поправки к приведенным выражениям при условии $\gamma \ll 1$. В области $r_1 k_{\perp} \gg 1$ учет этих поправок может быть

проведен аналитически. Делая замену $Y = E\sqrt{r}$ в (5), получим для Y уравнение нелинейного осциллятора с плавно меняющейся пространственной частотой:

$$Y'' + k_{\perp}^2 Y + k_0^2 \frac{\beta}{r} |Y|^2 Y - \frac{3}{4} \frac{Y}{r^2} = 0. \quad (17)$$

Граничное условие для функции Y имеет вид

$$Y(r_1) = E_{th} \sqrt{r_1}, \quad \frac{dY}{dr}(r_1) = i \frac{d\psi}{dr}(r_1) E_{th} \sqrt{r_1}. \quad (18)$$

Решение будем искать в виде бегущих навстречу друг другу волн с медленно меняющимися комплексными амплитудами $C_i(r)$ и $C_r(r)$:

$$Y = C_i(r) \exp(ik_{\perp}r) + C_r(r) \exp(-ik_{\perp}r).$$

На большом расстоянии от границы, где керровской нелинейностью можно пренебречь, величины $|C_i(r)|$ и $|C_r(r)|$ стремятся к постоянным значениям C_i и C_r , из которых по формуле (14) находится падающая мощность. При $\gamma \ll 1$ приближенное решение уравнения (17) можно найти, сохраняя в нелинейном слагаемом левой части лишь основные гармоники $\exp(\pm ik_{\perp}r)$ и пренебрегая более высокими. Выделение основных гармоник приводит при учете граничных условий (18) к системе алгебраических уравнений для их амплитуд, решение которой дает в первом приближении по γ следующий результат:

$$|C_{i,r}| = \frac{1}{2} E_{th} \sqrt{r_1} \left[1 \pm \alpha + \frac{\gamma}{16} (3 \mp \alpha + \alpha^2 \mp 3\alpha^3) \right], \quad (19)$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{(1 + \gamma) \sin^2 \vartheta - n(r_1) - (k_0 r_1)^{-2}}}{\sin \vartheta}. \quad (20)$$

При этом падающая мощность на единицу длины равна

$$P \approx \frac{cr_1}{16} \sin \vartheta E_{th}^2 (1 + \alpha)^2 \times \left[1 + \frac{\gamma}{8} (3 - \alpha + \alpha^2 - 3\alpha^3) \right]. \quad (21)$$

Поглощаемая погонная мощность по-прежнему определяется выражением (16).

Рассмотренный метод позволяет получить качественно верный (с точностью до множителей порядка единицы) результат также и в случае сильной керровской нелинейности. В частности, при отсутствии столкновений, получаем этим методом

$$P = \frac{cr_1}{16} \sin \vartheta E_{th}^2 \sqrt{1 + \frac{3}{4} \gamma}. \quad (22)$$

Близкий к выражению (22) результат в том же квазиплоском приближении ($r_1 k_{\perp} \gg 1$) можно получить другим способом. Решение уравнения (17) представим в виде эллиптической функции Якоби sn с медленно меняющимися «амплитудой» Y_0 , «частотой» u и параметром m :

$$Y(r) = Y_0(r) \text{sn}(u(r), m(r)). \quad (23)$$

В одномерной плоской задаче этот метод дает точное решение. Подставляя (23) в (17), можно получить систему алгебраических уравнений для Y_0 , u , m , решение которой совместно с граничными условиями (18) приводит к следующему результату:

$$P = \frac{cr_1}{16} \sin \vartheta E_{th}^2 \sqrt{1 + \gamma} \left[1 - \frac{\gamma}{2(1 + \gamma)} \right]^{1/4}. \quad (24)$$

При $\gamma \gg 1$ оба метода дают одинаковую зависимость радиуса канала от погонной мощности:

$$P = \frac{cr_1}{16} E_{th}^3 \sqrt{\beta} \eta. \quad (25)$$

В зависимости от метода решения уравнения (17) константа η равна 0.84 (из формулы (24)) или 0.86 (из формулы (22)); из численного расчета $\eta = 0.79$. Можно отметить, что при сильной керровской нелинейности радиус разряда не зависит от угла фокусировки.

Рассчитанные численно зависимости для различных значений параметров δ и γ показаны на рис. 4 (сплошные и пунктирные кривые). На рис. 5 изображены радиальные распределения плотности плазмы и амплитуды поля при значениях параметров $\delta = 0.5$, $\gamma = 1$, $Pk_0/cE_{th}^2 = 1$. Результаты численного расчета доли поглощаемой энергии $q(P) = Q/P$ и пороговой погонной мощности $g(\gamma) = P_{th}(\gamma)/P_{th}(0)$ приведены на рис. 6 и рис. 7 (сплошная кривая).

4. РАЗРЯД В ПАРАКСИАЛЬНОМ БЕССЕЛЕВОМ ПУЧКЕ С МАКСИМУМОМ ПОЛЯ НА ОСИ (СКАЛЯРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

При выполнении условий $\vartheta \ll 1$, $n \ll 1$ волновой пучок может быть описан на основании так называемого малоуглового (параксиального) приближения. Второе из этих условий для исследуемых стационарных состояний, как мы увидим, оказывается всегда выполненным при выполнении первого, которое, таким образом, можно рассматривать как достаточное условие применимости данного приближения.

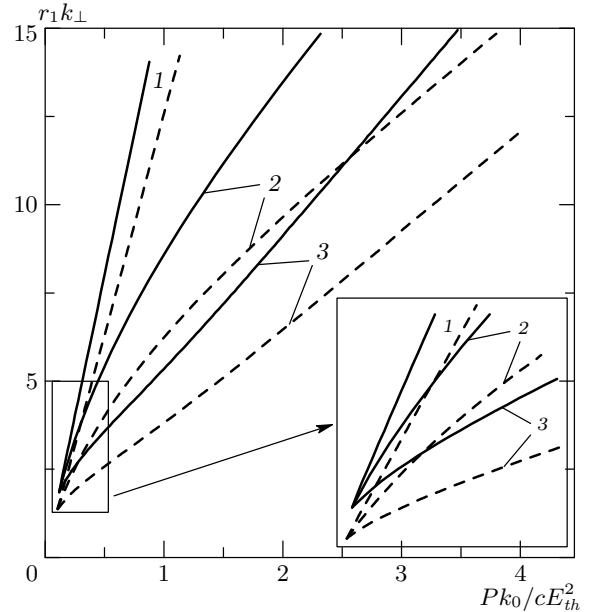


Рис. 4. Зависимость внешнего радиуса разряда (нормированного на поперечный масштаб пучка $k_{\perp} = 2\pi/\lambda \sin \vartheta$) от падающей мощности при различных параметрах δ и γ для векторной модели: $\delta = 0$ (1), 0.1 (2), 0.5 (3); $\gamma = 0$ (сплошные кривые), 1 (штриховые)

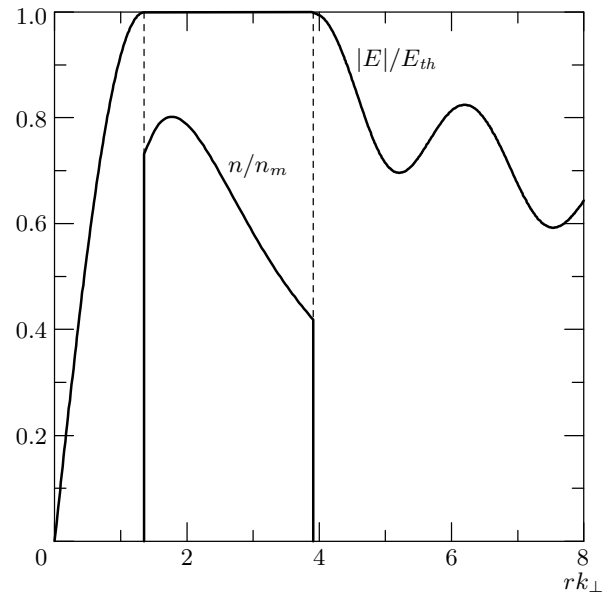


Рис. 5. Радиальные распределения плотности плазмы и амплитуды поля для векторной модели при значениях параметров $\delta = 0.5$, $\gamma = 1$, $Pk_0/cE_{th}^2 = 1$, $P/P_{th} = 10$

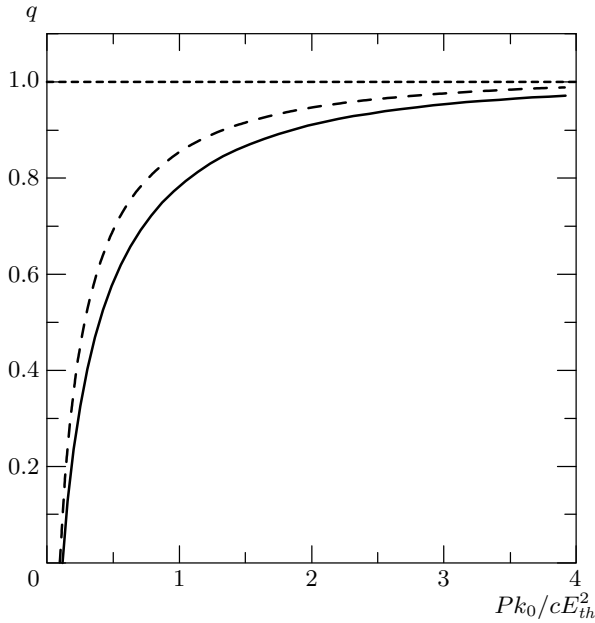


Рис. 6. Зависимость доли поглощенной мощности $q = Q/P$ от падающей мощности P для векторной модели при $\gamma = 0$ (сплошная кривая), 10 (штриховая); $\delta = 0.1$

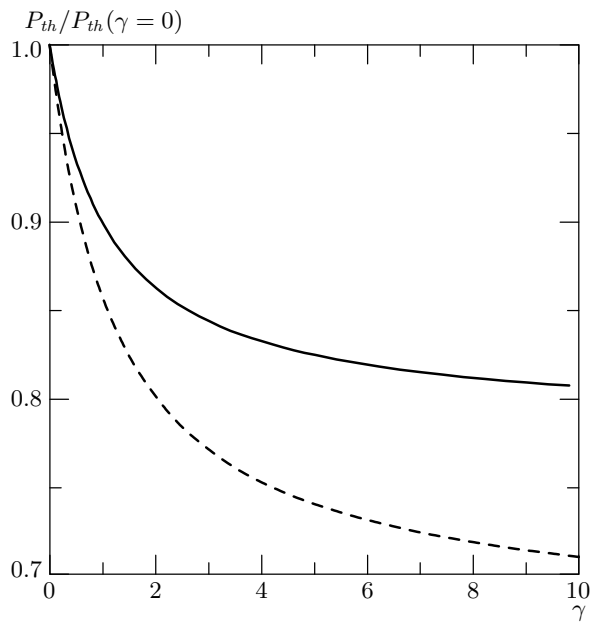


Рис. 7. Зависимость пороговой мощности от параметра керровской нелинейности γ для векторной (сплошная кривая) и скалярной (штриховая) моделей

В рамках этого приближения электромагнитное поле является почти поперечным и векторное волновое уравнение (3) сводится к скалярному уравнению Гельмгольца для поперечной (декартовой) компоненты электрического поля $E_x = E(r) \exp(iz)$:

$$\Delta_{\perp} E + k_0^2 [\sin^2 \vartheta - n(1 - i\delta) + \beta|E|^2] E = 0, \quad (26)$$

где

$$\Delta_{\perp} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$$

— поперечная (радиальная) часть оператора Лапласа. Для неионизованной области в этом уравнении следует положить $n = 0$. Уравнения для фазы $\psi(r)$ и плотности плазмы $n(r)$ в области разряда, аналогичные полученным в предыдущем разделе, имеют вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = k_0^2 \delta n, \quad (27)$$

$$\left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 = k_0^2 (\sin^2 \vartheta - n + \beta E_{th}^2), \quad (28)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sqrt{n_m - n}) = k_0 \delta n. \quad (29)$$

Обозначения параметров здесь те же самые, что и в предыдущем разделе. Структура разряда, определяемая этими уравнениями, в отличие от предыдущего случая, не содержит внутренней полости: плазма занимает область $0 \leq r < r_1$, где амплитуда поля $A = E_{th}$, а плотность, определяемая на основании уравнения (29),

$$n = n_m \left\{ 1 - \left[\frac{I_1(\delta \sqrt{n_m} k_0 r)}{I_0(\delta \sqrt{n_m} k_0 r)} \right]^2 \right\} \quad (30)$$

(I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя). Плотность достигает максимального значения

$$n = n_m = (1 + \gamma) \sin^2 \vartheta$$

при $r = 0$ и плавно убывает с характерным масштабом $R = 1/k_0 \sqrt{n_m} \delta$ при увеличении r в области $r < r_1$ (рис. 8). На граничной поверхности $r = r_1$ плотность скачком обращается в нуль. В отсутствие соударений (при $\delta = 0$) $n = n_m = \text{const}$ во всей области $r < r_1$. Положение границы r_1 и поглощаемая разрядом погонная мощность Q , как и в предыдущем разделе, зависят от величины падающей погонной мощности P и определяются путем сшивания решений для внутренней и внешней областей на основании тех же граничных условий (8). При условии $r_1 k_{\perp} \gg 1$ величины r_1 и Q связаны с падающей погонной мощностью формулами, отличающимися от подобных формул (15), (16), (20) лишь

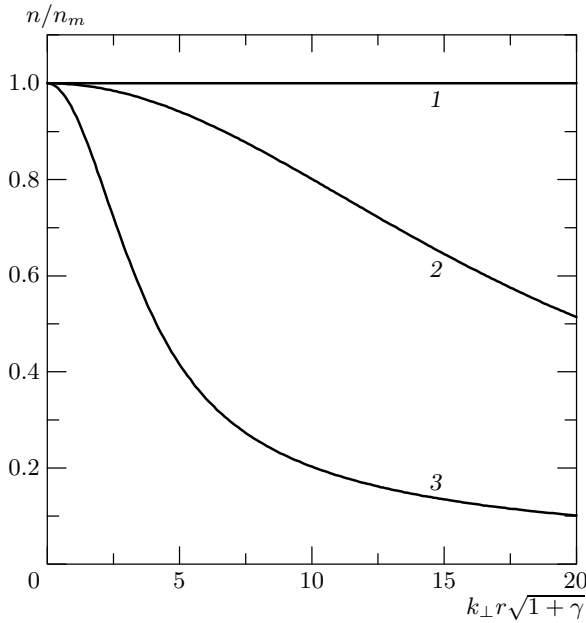


Рис. 8. Радиальные распределения плотности плазмы в скалярной модели при различных значениях параметра δ : $\delta = 0$ (1), 0.1 (2), 0.5 (3)

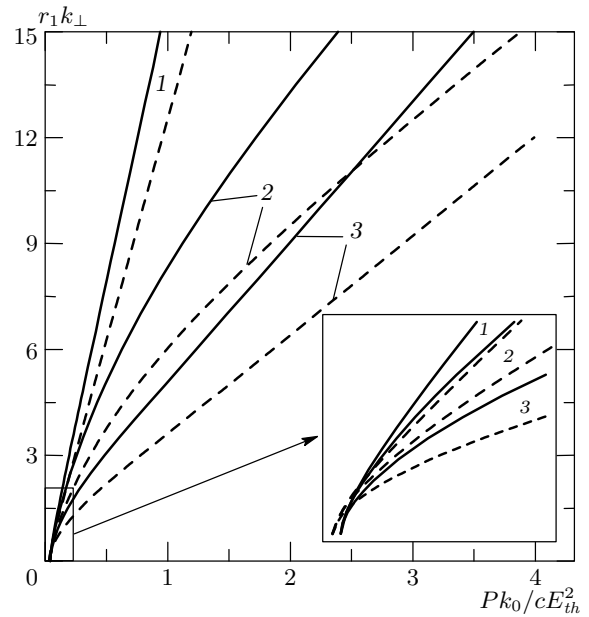


Рис. 9. Зависимость радиуса плазменного канала от падающей мощности в скалярной модели при различных параметрах δ и γ : $\delta = 0$ (1), 0.1 (2), 0.5 (3); $\gamma = 0$ (сплошные кривые), 1 (штриховые)

отсутствием члена r^{-2} в подкоренных выражениях, а формулы (22), (24) сохраняют свой вид. Пороговая погонная мощность в данном случае в три раза меньше, чем в предыдущем: $P_{th} = 0.04cE_{th}^2/k_0$. Зависимости радиуса плазменного канала от падающей мощности P при различных параметрах задачи и пороговой мощности P_{th} от γ приведены на рис. 9 и рис. 7 (пунктирная кривая). На рис. 10 изображены радиальные распределения плотности плазмы и амплитуды поля при значениях параметров $\delta = 0.5$, $\gamma = 1$, $Pk_0/cE_{th}^2 = 1$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании приближенной модели стационарного разряда как системы с заданным уровнем нелинейного самоограничения амплитуды поля проведены аналитические и численные расчеты осесимметричных стационарных распределений плотности плазмы в оптических разрядах, создаваемых «бесселевыми» волновыми пучками различных типов. В пучке с азимутальным электрическим полем, равным нулю на оси симметрии, формируется разряд в виде плазменной трубки, внутренний радиус которой определяется углом сходимости пучка, а внешний — погонной мощностью сходящейся цилиндрической волны, образующей пучок. Подобного типа

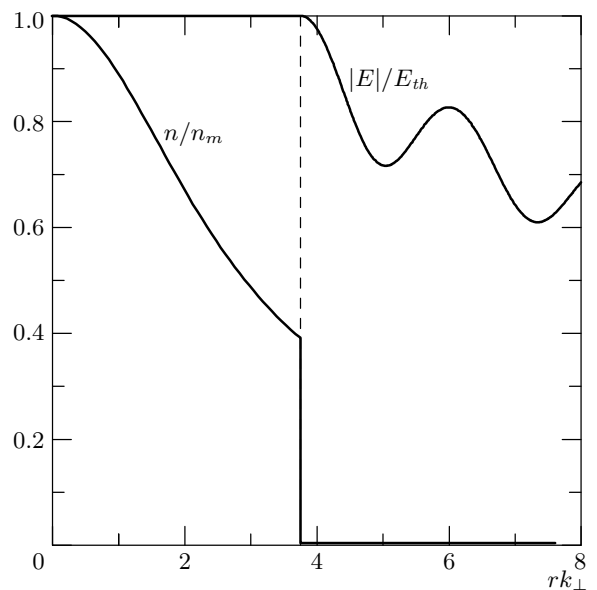


Рис. 10. Радиальные распределения плотности плазмы и амплитуды поля для скалярной модели при значениях параметров $\delta = 0.5$, $\gamma = 1$, $Pk_0/cE_{th}^2 = 1$, $P/P_{th} = 30$

разряды могут быть использованы в качестве волноводных структур, осуществляющих каналирование электромагнитного излучения на достаточно большие расстояния. В пучке с максимумом поля на оси разряд является сплошным: плотность плазмы в нем при удалении от оси симметрии сначала плавно и монотонно убывает, а затем скачком обращается в нуль. Максимальные значения плотности плазмы в разрядах обоих типов пропорциональны квадрату угла сходимости пучка. Показано, что учет уже весьма слабой керровской нелинейности в среде при малых углах сходимости пучка сильно влияет на величину максимальной плотности плазмы и положение границ разряда.

Найденные решения пригодны для описания квазистационарных состояний аксиконных разрядов также и в продольно-неоднородных бесселевых волновых пучках, формируемых в условиях реального лабораторного эксперимента (например, при аксиконной фокусировке гауссова пучка). В этих условиях параметры найденных структур, в частности, внешний радиус разряда, должны рассматриваться как локальные функции падающей погонной мощности, плавно изменяющейся вдоль осевой координаты. Необходимо отметить, однако, что в реальных условиях стационарные разряды подвержены действию самофокусировочной [16] и ионизационной [17] неустойчивостей, от рассмотрения которых в данной работе мы полностью отвлекались. В частности, первая из них развивается в неионизованной среде [4], если характерный поперечный размер пучка k_{\perp}^{-1} превышает характерный поперечный масштаб неустойчивости $(k_0 \sqrt{\beta E_{max}^2})^{-1}$ [16] (E_{max} — максимальная амплитуда поля в невозмущенном пучке), т. е. при выполнении условия

$$P > P_{cr}, \quad P_{cr} \sim \frac{ck_0 \sin^2 \vartheta}{10\beta}. \quad (31)$$

Если

$$\vartheta < \vartheta_{sf} \sim \sqrt{\frac{10\beta P_{th}}{ck_0}} \approx \sqrt{\beta E_{th}^2}$$

и $P_{th} > P > P_{cr}$, то пробой газа возникает лишь после развития самофокусировочной неустойчивости и также может сопровождаться образованием стационарных волноводных каналов, в которых дефокусирующее действие плазмы компенсируется керровской фокусировкой [14, 18].

В заключение приведем оценку характерных параметров стационарного разряда, формируемого в

результате аксиконной фокусировки гауссова пучка с интенсивностью (перед аксиконной линзой)

$$I_{in}(r) = I_0 \exp\left(-\frac{r^2}{R_0^2}\right)$$

в воздухе при атмосферном давлении. Как показывает расчет на основании геометрической оптики [4, 5], погонная мощность

$$P(z) = I_{in}(z \operatorname{tg} \vartheta) 2\pi z \operatorname{tg}^2 \vartheta$$

в пучке, сходящемся за аксиконом под малым углом ϑ , медленно изменяется вдоль продольной оси z , достигая максимума $P_{max} \approx 2.7 I_0 R_0 \operatorname{tg} \vartheta$ на расстоянии $z_m \approx 2^{-1/2} R_0 / \operatorname{tg} \vartheta$. Полагая $E_{th} \approx 2.3 \cdot 10^8$ В/см, $\beta = 1.4 \cdot 10^{-21}$ см²/В² [18], находим величину критического угла $\vartheta_{sf} \approx 0.01$ рад, при превышении которого самофокусировочная неустойчивость (до пробоя газа) не будет развиваться и минимальная входная интенсивность I_{0th} для пробоя среды определяется на основании использованной в работе модели: $I_{0th} = P_{th} / 2.7 R_0 \operatorname{tg} \vartheta$. Например, для лазерного пучка радиусом $R_0 = 0.5$ см перед аксиконом и длиной волны $\lambda = 1$ мкм при изменении угла ϑ в пределах от 0.1 до 0.02 рад величина I_{0th} изменяется от $9 \cdot 10^9$ до $4 \cdot 10^{10}$ Вт/см². При максимальной входной интенсивности $I_0 = 10^{11}$ Вт/см² указанному диапазону изменения угла фокусировки ϑ соответствуют изменения длины разряда от 10 до 31 см, его максимального радиуса r_{1m} от $1.2 \cdot 10^{-3}$ до 10^{-3} см и максимальной плотности плазмы $N = N_c \sin^2 \vartheta$ от 10^{17} до $4 \cdot 10^{15}$ см⁻³. При фокусировке излучения под углом $\vartheta < \vartheta_{sf}$ будет развиваться самофокусировочная неустойчивость, приводящая к локальному увеличению поля и, следовательно, к пробоя газа. Например, если $\vartheta = 0.005$ рад и входная интенсивность лежит в пределах $8 \cdot 10^{10} < I_0 < I_{0th} = 1.3 \cdot 10^{11}$ Вт/см², то пробой газа возможен только за счет развития этой неустойчивости. Если увеличить входную интенсивность до значения больше порогового, то ионизация газа будет происходить и в отсутствие неустойчивости, однако ее появление приведет к более раннему пробоя (ближе к аксиконо) и к увеличению длины разряда. В последнем случае в области, где погонная мощность превышает пороговую ($P > P_{th}$), радиус разряда r_1 можно найти на основании использованной модели. При $I_0 = 2 \cdot 10^{11}$ Вт/см² максимальный радиус разряда составит $r_{1m} = 4 \cdot 10^{-4}$ см. Концентрация плазмы в этом случае может быть найдена по формуле (30)

$$N = N_c (\sin^2 \vartheta + \beta E_{th}^2) \approx N_c \beta E_{th}^2 = 1.3 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{см}^3}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение уравнения (9) в общем случае имеет вид

$$n = n_m - \frac{1}{(k_0 r)^2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2, \quad (\text{П.1})$$

где

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = k_0 \sqrt{n_m} \frac{M I_{i\delta+1}(x) - K_{i\delta+1}(x)}{M I_{i\delta}(x) - K_{i\delta}(x)} + \frac{i}{r}, \quad (\text{П.2})$$

M — константа, определяемая из граничного условия $\partial \psi / \partial r = 0$ на внутренней границе разряда r_0 :

$$M = \frac{k_0 r_0 \sqrt{n_m} K_{i\delta+1}(x_0) - i K_{i\delta}(x_0)}{k_0 r_0 \sqrt{n_m} I_{i\delta+1}(x_0) + i I_{i\delta}(x_0)}, \quad (\text{П.2})$$

$$x = \delta \sqrt{n_m} r k_0, \quad x_0 = \delta \sqrt{n_m} r_0 k_0,$$

$I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго родов.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. N. McLeod, J. Opt. Soc. Amer. **44**, 592 (1954).
2. Б. Я. Зельдович, Б. Ф. Мульченко, Н. Ф. Пилипецкий, ЖЭТФ **58**, 794 (1970).
3. Ф. В. Бункин, В. В. Коробкин, Ю. А. Куриный и др., КЭ **10**, 443 (1983).
4. Н. Е. Андреев, Ю. А. Аристов, Л. Я. Полонский, Л. Н. Пятницкий, ЖЭТФ **100**, 1756 (1991).
5. Н. Е. Андреев, Л. Я. Марголин, И. В. Плешанов, Л. Н. Пятницкий, ЖЭТФ **105**, 1232 (1994).
6. Л. Я. Марголин, Л. Я. Полонский, Л. Н. Пятницкий, Письма в ЖТФ **13**, 218 (1987).
7. С. С. Бычков, С. В. Горлов, Л. Я. Марголин и др., КЭ **26**, 229 (1999).
8. Н. М. Milchberg, T. R. Clark, C. G. Durfee, and T. M. Antonsen, Phys. Plasmas **3**, 2149 (1996).
9. J. Fan, E. Parra, and N. M. Milchberg, Phys. Rev. Lett. **84**, 3085 (2000).
10. А. А. Бабин, А. М. Киселев, К. И. Правденко и др., УФН **169**, 80 (1999).
11. В. Б. Гильденбург, С. В. Голубев, ЖЭТФ **67**, 89 (1974).
12. В. Б. Гильденбург, *Нелинейные волны*, Наука, Москва (1981), с. 87.
13. V. B. Gildenburg, T. A. Petrova, and A. D. Yunakovsky, Physica D **87**, 335 (1995).
14. D. Anderson, A. V. Kim, M. Lisak et al., Phys. Rev. E **52**, 4564 (1995).
15. L. Berge and A. Couairon, Phys. Plasmas **7**, 210 (2000).
16. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **3**, 471 (1967).
17. В. Б. Гильденбург, А. В. Ким, ЖЭТФ **74**, 141 (1978).
18. A. Braun, G. Korn, X. Liu et al., Opt. Lett. **20**, 73 (1995).