

# МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ИЗИНГОВСКИХ ДИПОЛЕЙ

*Е. З. Мейлихов\*, Р. М. Фарзетдинова*

*Российский научный центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 декабря 2002 г.

Построена обобщенная теория среднего поля для системы линейных изинговских диполей конечного размера  $a$  с конфигурационным беспорядком, основанная на анализе функции распределения локальных магнитных полей. Показано, что магнитное состояние такой системы зависит от концентрации  $n$  диполей: при  $na^3 \lesssim 5 \cdot 10^2$  система парамагнитна, при  $na^3 \gtrsim 5 \cdot 10^2$  существует ферромагнитное упорядочение. Найдена восприимчивость системы в парамагнитном состоянии.

PACS: 75.10.-b, 75.50.Lk

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитное состояние системы взаимодействующих магнитных диполей определяется сложной «игрой» дальнего действия и анизотропии такого взаимодействия с тепловыми и пространственными (за счет случайного расположения и ориентации диполей) флуктуациями магнитного поля. Традиционная теория среднего поля учитывает тепловые флуктуации, но предполагает, что среднее локальное поле одинаково для всех диполей. Тем самым не учитываются важные для случайной системы пространственные флуктуации локального поля, которые, в отличие от тепловых флуктуаций, препятствуют установлению магнитного порядка даже при нулевой температуре.

Для адекватного описания рассматриваемых магнитных систем традиционная теория среднего поля должна быть соответствующим образом обобщена. Один из возможных способов такого обобщения был предложен в работе [1] и использован в [2] для рассмотрения случайной системы сферических<sup>1)</sup> диполей. В работе [2] показано, что основное состояние такой системы является парамагнитным до тех пор, пока среднее расстояние

между сферическими диполями остается больше их размера. Ферромагнитное состояние достигается лишь в системе, концентрация диполей в которой превышает некоторую критическую величину. Тот же результат другим методом получен в работе [4].

Однако многие реальные системы рассматриваемого типа (например, феррожидкости или «нарисованные» среды (patterned media), актуальные для магнитной записи [5]) состоят из существенно несферических диполей. Поэтому при достаточно высокой концентрации таких диполей (когда среднее расстояние между ними сравнимо с их размерами) характер их взаимодействия существенно отличается от взаимодействия точечных диполей. Проиллюстрируем это обстоятельство на примере стержнеобразных однородно намагниченных линейных диполей с магнитными моментами  $m$ . Энергия взаимодействия двух таких диполей с параллельными моментами, центр одного из которых расположен в начале координат, а центр другого определяется радиус-вектором  $\mathbf{R}$ , выражается соотношением [6]

$$w_d = \frac{m^2}{4a^2} \left( \frac{2}{|\mathbf{R}|} - \frac{1}{|\mathbf{R} + 2a\mathbf{e}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{R} - 2a\mathbf{e}_0|} \right), \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}_0$  — единичный вектор в направлении магнитного момента диполей,  $2a$  — длина каждого диполя. Если угол между векторами  $\mathbf{e}_0$  и  $\mathbf{R}$  равен  $\alpha$ , то (1) можно переписать в виде

\*E-mail: meilikhov@imp.kiae.ru

<sup>1)</sup> Энергия взаимодействия однородно намагниченных сферических диполей (одномоментных сферических гранул) совпадает с энергией взаимодействия двух эквивалентных точечных диполей [3].

$$w_d = \frac{m^2}{4a^3} \times \left[ \frac{2}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 4 + 4\rho \cos \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 4 - 4\rho \cos \alpha}} \right], \quad (2)$$

где  $\rho = |\mathbf{R}|/a$ . При  $\rho \gg 1$  соотношение (2) переходит в известное выражение для энергии взаимодействия точечных диполей:  $w_d = m^2(1 - 3 \cos^2 \alpha)/|\mathbf{R}|^3$ .

Знак энергии  $w_d$  определяет характер основного состояния системы из двух диполей: если  $w_d < 0$ , то моменты диполей параллельны (ферромагнитное состояние), в противном случае ( $w_d > 0$ ) эти моменты антипараллельны (антиферромагнитное состояние). Плоскость, в которой расположены оба рассматриваемых диполя (для определенности плоскость  $xz$ , моменты направлены вдоль оси  $z$ ) распадается на две области с разными знаками  $w_d$  (и, значит, с разными типами основного магнитного состояния). Для точечных и линейных диполей эти области показаны на рис. 1. В то время как для точечных диполей соотношение между размерами этих областей не зависит от расстояния между диполями, для близко расположенных линейных диполей ( $\rho = \sqrt{(x/a)^2 + (z/a)^2} \lesssim 1$ ) доля пространства, соответствующая антиферромагнитному основному состоянию пары линейных диполей, существенно рас-

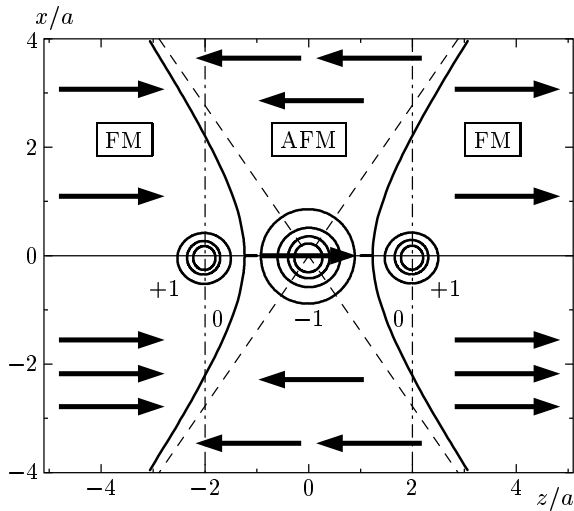


Рис. 1. Границы областей ферромагнитного (FM) и антиферромагнитного (AFM) основных состояний системы двух изинговских диполей. Штриховые линии  $x = \pm z\sqrt{2}$  — точечные диполи, сплошные кривые — линейные диполи длиной  $2a$ . Сплошные кривые соответствуют постоянной энергии взаимодействия линейных диполей (цифры у кривых — энергия  $w_d$  в единицах  $m^2/4a^3$ )

ширяется.

Отсюда, однако, не следует вывод о большей тенденции системы из многих линейных диполей к антиферромагнетизму, поскольку степень анизотропии взаимодействия линейных диполей существенно отличается от таковой для точечных диполей.

Таким образом, несферичность диполей должна существенным образом сказываться на характере магнитного состояния дипольной системы. Обобщению теории среднего поля для случайной системы линейных диполей и посвящена настоящая работа.

## 2. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИПОЛЕЙ

Пусть система, состоящая из случайно расположенных диполей, находится в ферромагнитном состоянии, характеризуемом средней намагниченностью  $\mathbf{I} \parallel \mathbf{e}_0$ . Локальные эффективные поля  $-w_d/m$ , создаваемые в начале координат случайно расположенными диполями, различны для разных диполей, и случайная величина их суммы  $H_3$  может быть охарактеризована функцией распределения  $F(j; H_3)$ , которая, вообще говоря, зависит от относительной намагниченности  $j \equiv I/mn$  системы ( $n$  — концентрация диполей), определяемой долей  $\eta = (1/2)(1 + j)$  диполей, средние моменты которых направлены вдоль намагниченности  $\mathbf{I}$  системы ( $F(1; H_0)$  — функция распределения для случая, когда все диполи внутри сферы Лоренца параллельны друг другу).

Для определения вида этой функции используем метод Маркова [7], согласно которому

$$F(j; H_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(q) \exp(-iqH_3) dq, \quad (3)$$

$$A(q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\zeta} \int_{\alpha} \int_{\rho=0}^{\rho_{max}} \exp[iqh\zeta(\rho, \alpha, \zeta)] \times \right. \\ \left. \times \tau(\rho, \alpha, \zeta) d\alpha d\rho d\zeta \right]^N,$$

где (см. (2))

$$h_{\zeta}(\rho, \alpha, \zeta) = \zeta h(\rho, \alpha),$$

$$h(\rho, \alpha) = \frac{m}{4a^3} \left[ -\frac{2}{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 4 + 4\rho \cos \alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 4 - 4\rho \cos \alpha}} \right] \quad (4)$$

— эффективное магнитное поле, которое создается точечным диполем со случайными координатами  $\rho, \alpha$  в начале координат (в рассматриваемом случае это проекция поля диполя на его направление), случайный параметр  $\zeta$  принимает значения  $+1$  и  $-1$  (с вероятностью соответственно  $\eta$  и  $1 - \eta$ ) и определяет направление магнитного момента диполя,  $\tau(\rho, \alpha, \zeta)$  — функция распределения случайных значений координат и параметра  $\zeta$ ,  $N$  — число диполей в сфере радиуса  $\rho_{max}$ , по объему которой проводится интегрирование. Далее, если предположить, что 1) случайный характер расположения диполей не изменяет их средней концентрации  $n$  (т.е.  $N \rightarrow 4\pi(\rho_{max})^3 n/3$  при  $\rho_{max} \rightarrow \infty$ ), 2) распределения координат и параметра  $\zeta$  равномерны и 3) корреляции отсутствуют, то

$$\begin{aligned} \tau(\rho, \alpha, \zeta) d\rho d\alpha d\zeta = \\ = [(1-\eta)\delta(\zeta+1) + \eta\delta(\zeta-1)] d\zeta \cdot (4\pi\rho_{max}^3/3)^{-1} \times \\ \times \rho^2 d\rho \cdot 2\pi \sin \alpha d\alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в (3), получаем

$$\begin{aligned} A(q) &= \exp[-na^3 C(q)], \\ C(q) &= 2\pi(1-\eta) \int_0^\infty \rho^2 d\rho \times \\ &\times \int_0^\pi \{1 - \exp[-iqh(\rho, \alpha)]\} \sin \alpha d\alpha + \\ &+ 2\pi\eta \int_0^\infty \rho^2 d\rho \int_0^\pi \{1 - \exp[iqh(\rho, \alpha)]\} \sin \alpha d\alpha = \\ &= 2\pi \int_0^\infty \rho^2 d\rho \int_0^\pi \{1 - \cos[qh(\rho, \alpha)] - ij \sin[qh(\rho, \alpha)]\} \times \\ &\times \sin \alpha d\alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (3) и (6), в частности, следует, что в отсутствие намагниченности ( $j = 0$ ) функция распределения  $F(0; H_3)$  локальных полей четна, т.е. симметрична относительно  $H_3 = 0$ .

Соотношения (6) не приводят к простому аналитическому выражению для функции распределения  $F(j; H_3)$ . Поэтому для определения последней мы использовали два взаимодополняющих метода: 1) «приближение малых  $q$ », основанное на том обстоятельстве, что в обратном фурье-преобразовании (3) область больших

значений  $q$  несущественна [2] и 2) численные расчеты для модельной случайной системы линейных изинговских диполей.

В рамках первого подхода функции  $\cos[qh(\rho, \alpha)]$  и  $\sin[qh(\rho, \alpha)]$ , подлежащие интегрированию в (6), заменяются своими приближенными степенными разложениями по малому аргументу  $qh$  (до первого не исчезающего по  $qh$  слагаемого). После этого становится возможным провести интегрирование, результат которого имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho^2 d\rho \int \{1 - \cos[qh(\rho, \alpha)]\} \sin \alpha d\alpha = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{mq}{a^3}\right)^2, \\ \int_0^\infty \rho^2 d\rho \int \sin[qh(\rho, \alpha)] \sin \alpha d\alpha = -\frac{2}{3} \frac{mq}{a^3}. \end{aligned} \quad (7)$$

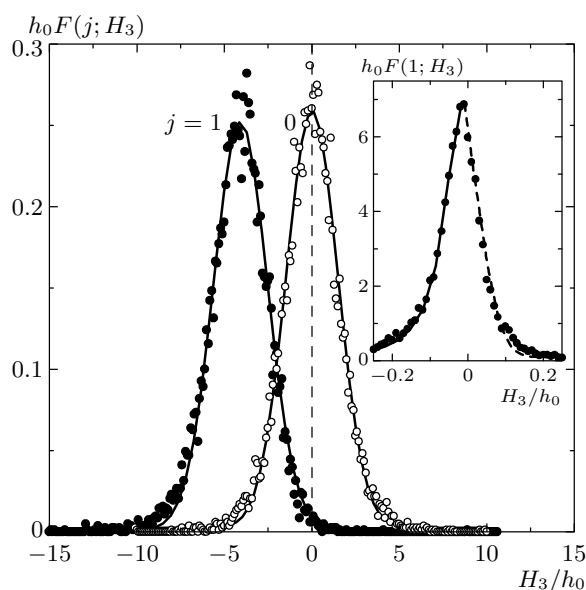
Подставляя (7) в (6), находим

$$F(j; H_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(H_3 + jH_j)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{H_j}{h_0} &= \frac{4\pi}{3} \approx 4.2, \\ \frac{\sigma}{h_0} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{na^3}} \approx \frac{0.89}{\sqrt{na^3}}, \quad h_0 = mn. \end{aligned}$$

Итак, в «приближении малых  $q$ » функции распределения  $F(j; H_3)$  имеют вид функций Гаусса, максимум ( $H_3 = -jH_j$ ) которых линейно сдвигается с ростом намагниченности в область отрицательных значений<sup>2)</sup> магнитного поля  $H_3$ . Использованное приближение справедливо, если вероятность появления сильных локальных полей, для которых  $qh \gtrsim 1$ , мала. Полученная выше гауссовская функция распределения (с экспоненциально убывающими «крыльями») таким свойством обладает. Однако при понижении концентрации линейных диполей их конечный размер становится все менее существенным и при  $na^3 \ll 1$  такие диполи можно рассматривать как точечные. В этом случае система, как известно, характеризуется лоренцевской функцией распределения [4], обладающей «длинными» (убывающими по степенному закону) крыльями. Поэтому представление (8) справедливо лишь в области концентраций

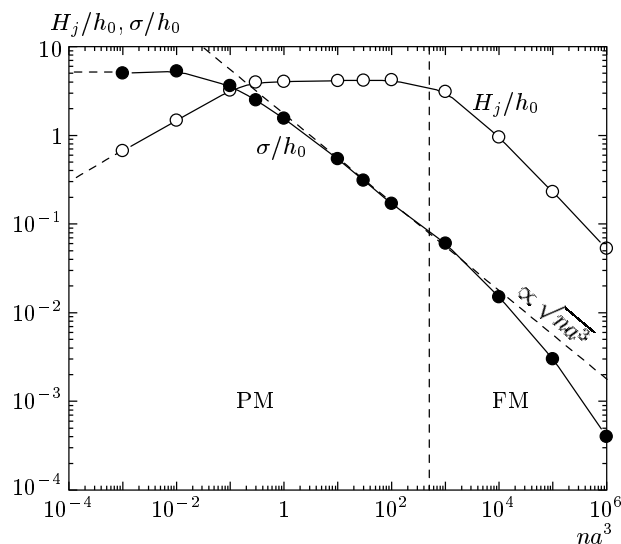
<sup>2)</sup> Формально это связано с конкретным видом угловой зависимости (4) поля линейного диполя. Последняя, как указывалось выше, увеличивает (по сравнению с точечными диполями) долю пространства, соответствующую антиферромагнитному взаимодействию пары близко расположенных линейных диполей ( $\rho \lesssim a$ ).



**Рис. 2.** Функции распределения  $F(0; H_3)$  и  $F(1; H_3)$  локальных полей для модельной системы случайно расположенных линейных изинговских диполей с  $na^3 = 1$ . Сплошные кривые — аппроксимирующие функции Гаусса. Расхождения наиболее заметны на левых крыльях распределений. На вставке — функция распределения  $F(1; H_3)$  для системы с  $na^3 = 0.01$ , близкой к системе точечных диполей (сплошная кривая — лоренцевская аппроксимация, пунктирная кривая — функция Гаусса)

$na^3 \gtrsim 1$ . С другой стороны, сильные поля создаются в основном ближайшими соседями [7], и вероятность их появления повышается с ростом концентрации  $n$  диполей, когда среднее расстояние между ними становится малым по сравнению с размером диполя  $a$ . Поэтому использованное приближение становится неприменимым при  $na^3 \gg 1$ . Для того чтобы более точно определить границы его применимости, мы предприняли численные расчеты функции распределения локальных полей в модельной случайной системе линейных изинговских диполей.

Система «создавалась» путем равномерного случайного размещения диполей в сфере (общее число диполей  $10^4$ ), после чего рассчитывалось магнитное поле  $H_3$  в центре этой сферы. Функции  $F(j; H_3)$  находились путем перебора большого числа (около  $10^4$ ) реализаций такой системы. Найденные в результате такого численного расчета функции распределения  $F(j; H_3)$  системы с  $na^3 = 1$  приведены на рис. 2. Видно, что они близки к гауссовским функциям, причем их ширина и положения максимумов близки к тем, которые предсказываются соотноше-



**Рис. 3.** Концентрационные зависимости расчетных параметров (положения максимума  $H_j$  и ширины  $\sigma$ ) распределения  $F(1; H_3)$  для модельной системы. Штриховые прямые: наклонная — степенная зависимость  $\sqrt{na^3}$ , вертикальная — левая граница между ферромагнитной (FM) и парамагнитной (PM) фазами

ниями (8). Из рис. 2 видно также, что на крыльях (и особенно для полей, лежащих влево от максимума) вид функций распределения существенно отклоняется от гауссовского. Это — области больших (по абсолютной величине) полей, которые в принципе не могут хорошо описываться приближением малых  $q$ . Вид функции распределения  $F(1; H)$  в этой области найден в Приложении.

При уменьшении концентрации диполей до значений  $na^3 \ll 1$ , когда система становится эквивалентной случайной системе точечных диполей, функция распределения действительно приближается к лоренцевской. Это явно видно на вставке к рис. 2, относящейся к системе с  $na^3 = 0.01$ : в то время как правое крыло функции распределения близко к гауссовскому, ее левое крыло уже является лоренцевским.

На рис. 3 представлены зависимости параметров  $H_j, \sigma$  функции распределения  $F(1; H_3)$  от концентрации диполей, определяемой величиной  $na^3$ . Видно, что функциональные зависимости  $H_j/h_0 = \text{const}$  и  $\sigma/h_0 \propto (na^3)^{-1/2}$ , предсказываемые приближением малых  $q$ , соблюдаются в диапазоне концентраций  $1 \lesssim na^3 \lesssim 10^3$ , т. е. для систем, в которых среднее расстояние между диполями в 1–10 раз меньше их размера.

### 3. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИПОЛЕЙ

Понятно, что существенный сдвиг функции распределения  $F(1; H_3)$  в область отрицательных магнитных полей при  $na^3 \gtrsim 1$  «мешает» появлению магнитного упорядочения в рассматриваемой системе. Ее намагниченность есть  $\mathbf{I} = n \langle \mathbf{m}_i \rangle_T$ , где средний магнитный момент  $\langle \mathbf{m}_i \rangle_T$  должен вычисляться с учетом разброса локальных полей  $H_3$  путем очевидного обобщения уравнения

$$\frac{I}{mn} = \text{th} \left[ \frac{m(4\pi I/3 + H_3)}{kT} \right],$$

относящегося к регулярной системе (здесь слагаемое  $4\pi I/3$  отвечает магнитному полю, создаваемому диполями на поверхности сферы Лоренца):

$$\frac{I}{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{th} \left[ \frac{m(4\pi I/3 + H_3)}{kT} \right] F(j; H_3) dH_3. \quad (9)$$

Ясно, что уравнение (9) может при  $T = 0$  иметь решение  $j = 1$  только при обязательном условии  $F(1; H_3 < 4\pi I/3) = 0$ , которое никогда не может быть реализовано в системе совершенно случайно расположенных диполей. «Помочь» возникновению ферромагнетизма можно так же, как и в случае точечных диполей [4], — ограничением конфигурационной случайности (например, соответствующим ограничением снизу междипольного расстояния, которое эквивалентно «обрезанию» крыльев функции распределения случайных полей).

Используя выражение (8) для функции распределения  $F(j; H_3)$ , получаем уравнение, обобщающее стандартное уравнение среднего поля:

$$j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma/h_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \text{th} \left[ \frac{1}{\Theta} \left( \frac{4\pi}{3} j + u \right) \right] \times \exp \left[ -\frac{(u + jH_j/h_0)^2}{2(\sigma/h_0)^2} \right] du, \quad (10)$$

где  $\Theta = kT/m^2n$  — приведенная температура (равная отношению тепловой энергии к характерной энергии магнитного взаимодействия диполей).

Парамагнитное состояние ( $j = 0$ ), очевидно, является решением этого уравнения, так как его правая часть при  $j = 0$  равна нулю. Для того чтобы выяснить, имеет ли оно решение, соответствующее ферромагнитному состоянию ( $j \neq 0$ ), заметим, что при  $\Theta \rightarrow 0$  это уравнение приобретает вид

$$j = -\text{sign}(z_0)\Phi(|z_0|j), \quad (11)$$

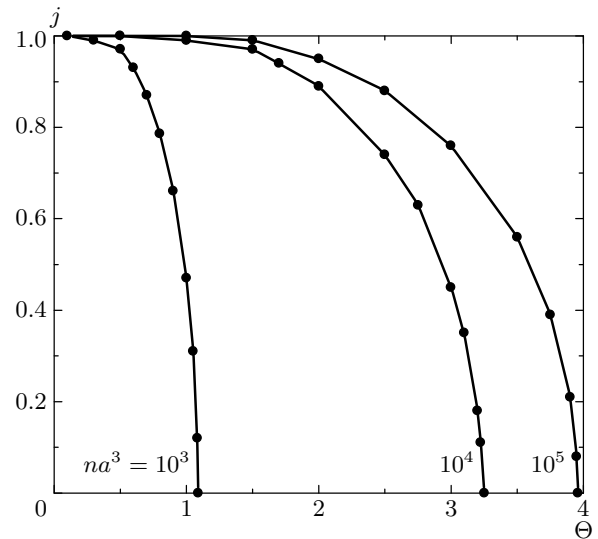


Рис. 4. Температурные зависимости намагниченности системы в ферромагнитном состоянии при различных концентрациях диполей

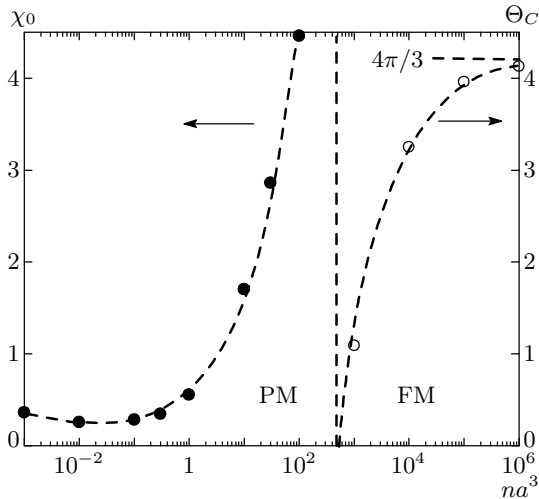
где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2) dx$$

— интеграл вероятности,  $z_0 = (H_j/h_0 - 4\pi/3) \times (h_0/\sqrt{2}\sigma)$ . Уравнение (11) имеет решение  $j \neq 0$  только в случае  $z_0 < 0$ ,  $|z_0| > \sqrt{\pi}/2$ , т. е. при

$$\frac{4\pi}{3} mn > H_j + \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (12)$$

Смысл последнего условия состоит в том, что коллективное поле  $(4\pi/3)mn$ , создаваемое диполями на поверхности лоренцевской сферы, должно «пересилить» локальные поля обратного знака со средним значением  $-H_j$  и разбросом  $\pm\sigma$ . Как видно из рис. 3, оно выполняется только при  $na^3 \gtrsim 5 \cdot 10^2$ , т. е. при достаточно высокой концентрации диполей. В этом случае система ферромагнитна и из (10) можно найти температурную зависимость ее намагниченности, представленную на рис. 4. Область температур, где она отлична от нуля, расширяется с ростом концентрации  $na^3$  диполей. Соответствующая концентрационная зависимость температуры Кюри приведена на рис. 5. Как видно из рис. 3,  $H_j, \sigma \rightarrow 0$  при  $na^3 \rightarrow \infty$ . Это означает, что функция распределения  $F(j; H_3)$  приближается к дельта-функции, centered near  $H_3 = 0$ . При этом уравнение (10) сводится к уравнению  $j = \text{th}(4\pi j/3\Theta)$ , из которого при  $\Theta \approx \Theta_C$  (когда  $j \ll 1$ ) следует, что при высоких концентрациях диполей  $\Theta_C = 4\pi/3$ .



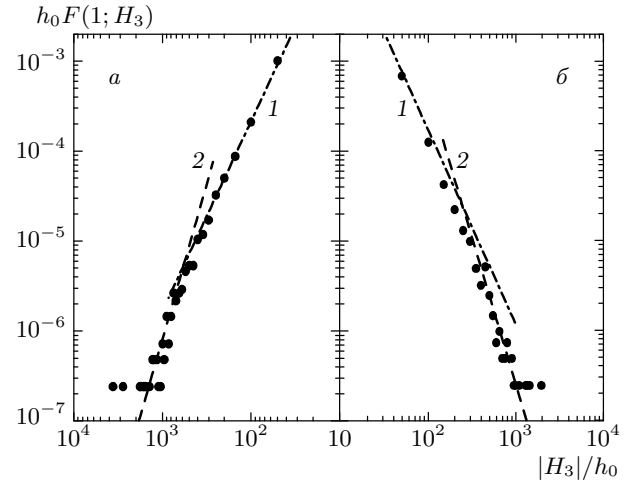
**Рис. 5.** Концентрационные зависимости низкотемпературной восприимчивости парамагнитной фазы и температуры Кюри ферромагнитной фазы случайной системы линейных изинговских диполей. С ростом их концентрации ( $na^3 \rightarrow \infty$ ) температура Кюри насыщается ( $\Theta_C \rightarrow 4\pi/3$ ). Вертикальная штриховая линия — левая граница области ферромагнетизма

В пределе малых концентраций диполей ( $na^3 \ll 1$ ) рассматриваемая система становится похожей на случайную систему точечных диполей, в которой ферромагнитного упорядочения нет<sup>3)</sup> [4]. Тем не менее полная эквивалентность между системами линейных и точечных диполей достигается лишь в пределе их исчезающе малой концентрации. Дело в том, что, как показано в Приложении, при любой конечной концентрации диполей функция распределения в области сильных полей убывает гораздо быстрее, чем лоренцевская функция, а именно, по закону  $1/H^4$  (см. (20)) (низкополевая граница этой области, разумеется, зависит от концентрации диполей и при ее уменьшении сдвигается в сторону больших полей).

Одна из модельных функций распределения, отвечающая концентрации диполей  $na^3 = 10^{-3}$ , показана на рис. 6, где явно видны ее быстроубывающие (по закону  $1/H^4$ , соответствующему формуле (20)) крылья.

В области малых концентраций ( $na^3 \lesssim 5 \cdot 10^2$ ) система парамагнитна. Для описания ее свойств во

<sup>3)</sup> Речь идет о системе, в которой диполи могут располагаться сколь угодно близко друг к другу и функция распределения является лоренцевской. В такой системе ферромагнетизму препятствуют сильные случайные поля, соответствующие характерным для такой функции длинным крыльям.



**Рис. 6.** Левое (а) и правое (б) крылья функции распределения  $F(1; H_3)$  локальных полей для линейных диполей с концентрацией, соответствующей  $na^3 = 10^{-3}$ : 1 — функция Лоренца, 2 — степенные зависимости  $1/H^4$

внешнем магнитном поле  $H_e$  достаточно в аргументе гиперболического тангенса в уравнении (9) провести замену  $H_3 \rightarrow H_3 + H_e$ , что приведет к замене  $u \rightarrow u + H_e/h_0$  в уравнении (10). В слабом внешнем поле ( $H_e/h_0 \ll 1$ ) намагниченность парамагнитной системы мала ( $j \ll 1$ ), и после разложения функций, входящих в (10), по  $H_e$  и  $j$  находим

$$j = I_1 \left( \frac{4\pi}{3} j + \frac{H_e}{h_0} \right) - I_2 \frac{H_j}{h_0} j, \quad (13)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\Theta \text{ch}^2[(\sigma/h_0 \Theta)x]} dx, \quad (14)$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \text{th} \left[ \frac{\sigma}{h_0 \Theta} x \right] e^{-x^2/2} dx.$$

Соотношение (13) позволяет найти низкополевую магнитную восприимчивость системы  $\chi = I/H_e = j/(H_e/h_0)$  и ее температурную зависимость.

При высоких температурах ( $\Theta \gg 1$ )  $I_1 = 1/\Theta \rightarrow 0$ ,  $I_2 \rightarrow 0$  и из (13) следует  $\chi(\Theta \gg 1) = 1/\Theta$ , или  $I = mn(mH_e/kT)$  — обычный закон Кюри для невзаимодействующих изинговских диполей.

При низких температурах ( $\Theta \ll 1$ )

$$I_1 = I_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h_0}{\sigma},$$

что дает

$$\chi_0 \equiv \chi(\Theta \ll 1) = \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{h_0} + \frac{H_j}{h_0} - \frac{4\pi}{3} \right)^{-1},$$

т.е. не зависящую от температуры восприимчивость. Вблизи ферромагнитного перехода (граница которого определяется условием (12)) она неограниченно возрастает. Концентрационная зависимость  $\chi_0$  показана на рис. 5.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применительно к случайным системам теория среднего поля для систем с магнитным взаимодействием требует обобщения, учитывающего неэквивалентность отдельных магнитных моментов, составляющих такую систему. В работе рассмотрен вариант такой теории, основанный на определении и анализе функций распределения случайных магнитных полей, создаваемых нерегулярно распределенными в пространстве магнитными моментами. Эти функции распределения найдены двумя способами: аналитически — с помощью метода Маркова [7] — и численно — путем статистической обработки результатов вычисления случайных полей в модельной системе. В рассматриваемом случае первый метод позволяет найти лишь приближенные аналитические выражения для функций распределения в ограниченном диапазоне концентраций диполей, которые, однако, позволяют делать вполне надежные качественные суждения о виде этих функций и магнитном состоянии изучаемой системы.

Основные результаты получены путем численного моделирования случайной системы линейных изинговских диполей. В рамках обобщенной теории среднего поля показано, что магнитное состояние такой системы зависит от концентрации  $n$  диполей: при концентрациях диполей, больших  $na^3 \gtrsim 5 \cdot 10^2$ , она ферромагнитна, а при меньших — парамагнитна. В области малых концентраций ( $na^3 \ll 1$ ) система близка к совокупности точечных диполей, но не эквивалентна ей: в области сильных случайных полей функция их распределения характеризуется не длинными лоренцевскими крыльями, а более быстрым убыванием (закон  $1/H^4$ ).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 03-02-17029, 02-02-16974, 01-02-16420).

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Представление о виде функции распределения  $F(1; H)$  в области сильных полей можно получить, полагая, что поле  $H$  создается в основном ближайшим диполем. Закон  $w_R(R)$  распределения расстояний  $R$  до ближайшего соседа при случайном (некоррелированном) расположении диполей дается выражением [7]

$$w_R(R) = 4\pi R^2 n \exp(-4\pi R^3 n/3), \quad (\text{П.1})$$

а распределение  $w_\alpha(\alpha)$  углов  $\alpha$  между вектором  $\mathbf{e}_0$  и определяющим положение ближайшего диполя вектором  $\mathbf{R}$  будем считать равномерным:  $w_\alpha(\alpha) = |\sin \alpha| d\alpha$ .

В отличие от энергии взаимодействия точечных диполей, неограниченно возрастающей при их сближении, энергия взаимодействия линейных диполей имеет три (бесконечных) экстремума (см. рис. 1), соответствующих сближению их центров ( $R \ll a$ ) или концов ( $R - 2a \ll a, \sin \alpha \rightarrow 0$ ). Из (2) следует, что в окрестности этих экстремумов при  $R \ll a$

$$H \approx -\frac{a}{2R} H_1, \quad (\text{П.2a})$$

а при  $R - 2a \ll a, \alpha' = \alpha$  или  $\alpha' = \pi - \alpha$

$$H \approx \frac{a}{4\sqrt{(R - 2a)^2 + 4a^2 \alpha'^2}} H_1, \quad (\text{П.2б})$$

где  $H_1 = m/a^3$ . Три указанные области определяют вид функции распределения  $f(H)$  при больших абсолютных значениях  $H$ . Для той, которая соответствует отрицательным значениям магнитного поля (П.2a), находим

$$F(1; H) \propto w_R[R(H)] \left| \frac{dR(H)}{dH} \right| = \frac{\pi}{2} \frac{na^3}{H_1} \times \left( \frac{H_1}{H} \right)^4 \exp \left[ -\frac{\pi}{6} na^3 \left( \frac{H_1}{|H|} \right)^3 \right], \quad H < 0. \quad (\text{П.3})$$

Для областей с положительным магнитным полем (П.2б) воспользуемся следующим правилом преобразования случайных величин [8]: если известны функции  $f_r(r), f_\chi(\chi)$  распределения независимых случайных величин  $r, \chi$ , то функция распределения случайной величины  $\Lambda = \sqrt{r^2 + \chi^2}$  есть

$$f_\Lambda(\Lambda) = \Lambda \int_0^{2\pi} f_r(\Lambda \cos \varphi) f_\chi(\Lambda \sin \varphi) d\varphi.$$

Отсюда следует, что функция  $f_h(h)$  распределения случайной величины  $h = 1/\Lambda = 1/\sqrt{r^2 + \chi^2}$  есть

$$f_h(h) = f_\Lambda[\Lambda(h)] \left| \frac{d\Lambda}{dh} \right| = \frac{1}{h^3} \int_0^{2\pi} f_r\left(\frac{\cos \varphi}{h}\right) f_\chi\left(\frac{\sin \varphi}{h}\right) d\varphi.$$

В нашем случае  $r = R - 2a$ ,  $\chi = 2a\alpha'$ ,  $H = (m/4a^2)h$  и  $f_r(r) = w_R(2a + r)$ ,  $f_\chi(\chi) = (1/2a)f_\alpha(\chi/2a)$ . Поэтому

$$F(1; H) \propto 2 \frac{4a^2}{m} f_h\left(\frac{H}{m/4a^2}\right) = \frac{\pi na^3}{H_1} \left(\frac{H_1}{H}\right)^3 \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{1}{8} \frac{H_1}{H} \cos \varphi\right]^2 \times \exp\left\{-\frac{32\pi na^3}{3} \left[1 + \frac{1}{8} \frac{H_1}{H} \cos \varphi\right]^3\right\} \times \left|\sin\left[\frac{1}{8} \frac{H_1}{H} \sin \varphi\right]\right| d\varphi \quad (\text{П.4})$$

(множитель 2 в правой части первого из соотношений (П.4) учитывает наличие двух экстремумов положительного магнитного поля). Для полей  $H/H_1 \gg \sqrt{na^3}$  функция распределения (П.4) имеет вид подобный (П.3):

$$F(1; H) \propto \frac{\pi}{2} \frac{na^3}{H_1} \left(\frac{H_1}{H}\right)^4 \exp\left(-\frac{32\pi na^3}{3}\right) \times \left\{\frac{\text{sh}[4\pi na^3(H_1/H)]}{4\pi na^3(H_1/H)}\right\}, \quad H > 0. \quad (\text{П.5})$$

Из (П.3), (П.5) следует, что левое крыло функции распределения  $F(1; H)$  должно быть выше ее правого крыла. На вставке к рис. 2 это явно замет-

но. При малой концентрации диполей ( $na^3 \ll 1$ ) оба крыла функции распределения согласно (П.3), (П.5) имеют одинаковый степенной вид

$$F(1; H) \propto \frac{na^3}{H_1} \left(\frac{H_1}{H}\right)^4, \quad (\text{П.6})$$

который, однако, существенно отличается от лоренцевского<sup>4)</sup>.

Что касается области слабых магнитных полей ( $H < H_1$ ), то они создаются более или менее симметричной совокупностью всех окрестных диполей и потому определить вид соответствующей функции распределения  $f(H)$  с помощью приближения ближайшего соседа невозможно. В этом случае необходимо использовать подходящий статистический метод (например, метод Маркова).

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. W. Klein, C. Held, and E. Zuroff, Phys. Rev. B **13**, 3576 (1976).
2. H. Zhang and M. Widom, Phys. Rev. B **51**, 8951 (1995).
3. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York (1999).
4. Е. З. Мейлихов, ЖЭТФ **124**, 650 (2003).
5. R. L. White, J. Magn. Magn. Mat. **209**, 1 (2000).
6. M. D. Costa and Yu. G. Pogorelov, Phys. Stat. Sol. (a) **189**, 923 (2001).
7. S. Chandrasekhar, Rev. Mod. Phys. **15**, 1 (1943).
8. В. С. Пугачев, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Физматлит, Москва (2002).

<sup>4)</sup> В отличие от (П.6), крылья лоренцевского распределения убывают гораздо медленнее — по закону  $1/H^2$ , т.е. настолько медленно, что среднеквадратичное значение  $\sqrt{\langle H^2 \rangle}$  случайного поля бесконечно велико. Именно по этой причине ферромагнетизм в системе точечных диполей невозможен и для появления спонтанной намагниченности крылья лоренцевского распределения, отвечающие полям  $|H| \gtrsim 5h_0$ , должны быть обрезаны [4].