

СТРУКТУРЫ ПАРАМЕТРОВ ПОРЯДКА В НЕОДНОРОДНЫХ ФАЗОВЫХ СОСТОЯНИЯХ СИЛЬНОКОРРЕЛИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Л. С. Исаев

*Нижегородский государственный университет
603950, Нижний Новгород, Россия*

*А. П. Протогенов**

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 19 декабря 2002 г.

Рассматриваются когерентные структуры параметров порядка, которые определяют границы существования фазовых состояний в рамках CP^1 -модели Гинзбурга–Ландау. С использованием формулировки этой модели [1] в терминах калибровочно-инвариантных параметров порядка — полей единичного вектора \mathbf{n} , плотности ρ^2 и импульса частиц \mathbf{s} , найдено, что некоторые универсальные свойства фаз и конфигураций полей определяются топологическими характеристиками, связанными с инвариантом Хопфа Q и его обобщениями. В области достаточно высокого уровня допирования обнаружено, что вне сверхпроводящей фазы распределение заряда в форме петель может быть более предпочтительным по сравнению с распределением в виде полосок. Показано, что в фазе с индексом $L < Q$ взаимного зацепления конфигураций области определения \mathbf{n} - и \mathbf{s} -полей возникает выигрыш свободной энергии при переходе в неоднородное сверхпроводящее состояние с ненулевым полным импульсом пар. Обсуждается универсальный механизм разрушения топологической когерентности сверхпроводящего состояния при уменьшении плотности заряда.

PACS: 74.25.-q, 74.80.-g, 71.10.Hf, 71.10.-w

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди актуальных проблем физики критических явлений в планарных системах вблизи моттовского перехода существуют такие, которые, на первый взгляд, не связаны с возникновением высокотемпературного сверхпроводящего состояния в допированных антиферромагнитных диэлектриках. Например, нас интересуют причины качественно похожего кооперативного поведения в различных соединениях и необычно богатого содержания их фазовой диаграммы, а также причины возникновения характерных для таких систем неоднородных состояний [2–6]. Низкоразмерные структуры в распределении спиновых [2, 3] и зарядовых [4–6] степеней свободы существуют в фазовом состоянии, которое

предшествует высокотемпературной сверхпроводящей фазе. Это свойство [7] позволяет отдать предпочтение такой модели для описания указанных фаз, которая содержала бы их как предельные случаи. Некоторое понимание при изучении подобного рода общих проблем может быть достигнуто при помощи теории среднего поля в модели Гинзбурга–Ландау с подходящим выбором параметра порядка. Ключевым вопросом в этом универсальном подходе является способ, с помощью которого параметр порядка кодирует одновременно состав и распределение зарядовых и спиновых степеней свободы возбуждений в различных фазовых состояниях.

Недавний прогресс при решении похожих задач в неабелевой теории поля [8] и его развитие в физике конденсированных сред [1] позволяют отдать предпочтение CP^1 -модели Гинзбурга–Ландау. Двухкомпонентный параметр порядка этой модели ис-

*E-mail: alprot@appl.sci.nnov.ru

пользуется при решении задач двухщелевой сверхпроводимости [9]. В теории электрослабого взаимодействия [10] он имеет смысл хиггсовского дублета стандартной модели. В настоящей работе будем полагать, что параметр порядка есть спинор, реализующий двумерные представления группы kos , возникающей при классификации квантовых состояний после перестановки частиц в $(2 + 1)$ -мерных системах. Ограничиваясь рассмотрением факторизации по центру этой неабелевой группы, имеем калибровочно-инвариантную CP^1 -модель Гинзбурга–Ландау. Обратим внимание на существенность размерности, равной двум, параметра порядка этой модели [1, 11]. Только в этом случае есть возможность ввести поле единичного вектора, описывающего в длинноволновом пределе распределение спиновых степеней свободы, использовать инвариант Хопфа для классификации конфигураций \mathbf{n} -поля и корректно рассмотреть фазы с различным распределением зарядовых степеней свободы. По упомянутым причинам будем опираться на обобщенную модель \mathbf{n} -поля, которая после точного отображения CP^1 -модели Гинзбурга–Ландау [1] включает слагаемое Фаддеева [12]. Параллели с неабелевой калибровочной теорией и происхождение модели позволяют нам надеяться на универсальность получаемых ответов и прояснение обсуждаемых проблем.

Инвариант Хопфа описывает степень зацепления или заузленности многообразия нитей, на которых определено поле единичного вектора \mathbf{n} . Изучение поведения клубка вихревых нитей является самостоятельной задачей и привлекает внимание благодаря нескольким причинам. Во-первых, ассоциированный с зацеплениями топологический порядок на малых расстояниях существует на фоне беспорядка из-за произвольного движения отдельных частей системы запутанных вихревых нитей. Тем самым, в отличие от точечной частицы, свойства клубка определяются поведением его фрагментов в ультрафиолетовом и инфракрасном пределах. Поскольку координаты кора вихря канонически сопряжены, отмеченные обстоятельства находят свое отражение в некоммутативности этих переменных, зависящей от степени зацепления. Во-вторых, такая мягкая среда, как клубок зацепленных нитей, является актуальным предметом изучения в физике конденсированного состояния и вне ее, в частности, в связи с проблемой ДНК. После превращения констант связи в искомые функции появление двойной спирали как решение уравнений движения в мягком варианте [13] модели \mathbf{n} -поля является ее общим свойством.

В настоящей работе мы рассматриваем некото-

рые свойства конфигураций полей в CP^1 -модели Гинзбурга–Ландау, определение которой приведено в следующем разделе. Основная цель работы состоит в том, чтобы найти границы свободной энергии Гинзбурга–Ландау в сверхпроводящем состоянии и в неоднородной фазе с нарушенным антиферромагнитным порядком, а также описать свойства распределений плотности заряда, соответствующие этому фазовому состоянию. Анализу эффектов зацепления посвящен третий раздел. В «мягкой» версии модели [13], рассматривая несверхпроводящую фазу, мы анализируем величину вклада в свободную энергию распределений зарядовой плотности в виде колец и в форме полосок. Вместе с подробным изложением результатов из кратких публикаций [14–16] в третьем и четвертом разделах мы обсуждаем свойства неоднородного сверхпроводящего состояния с ненулевым полным импульсом пар, сравнивая его с состояниями Ларкина–Овчинникова–Фулде–Феррела [17, 18] и с результатами, следующими из недавно предложенной [19] БКШ-подобной модели с двумя сортами частиц. Мы обращаем также внимание на зависимость границ существования фазовых состояний от обобщенного $(2 + 1)D$ -инварианта Хопфа в случае классов отображений $S^2 \times S^1 \rightarrow S^2$ и $S^1 \times S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ и от величины внешнего магнитного поля. В заключении обсуждаются некоторые открытые вопросы. В Приложение включено доказательство неравенства, устанавливающего соотношение между вкладами в свободную энергию конфигураций \mathbf{n} - и \mathbf{s} -полей.

2. CP^1 -МОДЕЛЬ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

Будем использовать модель Гинзбурга–Ландау:

$$F = \int d^3x \left[\sum_{\alpha} \frac{1}{2m} \left| \left(\hbar \partial_k + i \frac{2e}{c} A_k \right) \Psi_{\alpha} \right|^2 + \sum_{\alpha} \left(-b_{\alpha} |\Psi_{\alpha}|^2 + \frac{c_{\alpha}}{2} |\Psi_{\alpha}|^4 \right) + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right] \quad (1)$$

с двухкомпонентным параметром порядка

$$\Psi_{\alpha} = \sqrt{2m} \rho \chi_{\alpha}, \quad \chi_{\alpha} = |\chi_{\alpha}| e^{i\varphi_{\alpha}}, \quad (2)$$

удовлетворяющим условию $|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = 1$. Это условие связи для двух образующих χ_{α} имеет место в комплексном проективном пространстве CP^1 , на котором определена рассматриваемая нами модель.

Модель (1), (2) с различными массами m_{α} использовалась ранее [1, 9] при рассмотрении двухщелевой сверхпроводимости, а также в стандартной мо-

дели неабелевой теории поля [8, 10]. В настоящей работе мы рассматриваем состояния в планарных системах, поэтому предполагаем, что Ψ имеет смысл параметра порядка, реализующего двумерные неабелевы представления группы кос, которая используется для классификации квантовых состояний при перестановке частиц в пространственно-двумерных системах. Вектор A_k , реализуя абелеву проекцию [20], компенсирует произвол при локальном выборе фазы функции Ψ . Последние слагаемые в (1) описывают потенциал Гинзбурга–Ландау $V(\Psi_1, \Psi_2)$ и собственную энергию калибровочного поля.

Недавно было показано [1], что существует точное отображение модели (1), (2) в следующую версию модели \mathbf{n} -поля:

$$F = \int d^3x \left[\frac{1}{4} \rho^2 (\partial_k \mathbf{n})^2 + (\partial_k \rho)^2 + \frac{1}{16} \rho^2 \mathbf{c}^2 + (F_{ik} - H_{ik})^2 + V(\rho, n_3) \right]. \quad (3)$$

Свободная энергия в выражении (3) определяется скаляром — плотностью числа частиц, ρ^2 , полем единичного вектора, $n^a = \bar{\chi} \sigma^a \chi$, где $\bar{\chi} = (\chi_1^*, \chi_2^*)$, σ^a — матрицы Паули, и полем импульса $\mathbf{c} = \mathbf{J}/\rho^2 = 2(\mathbf{j} - 4\mathbf{A})$. Они характеризуют пространственные распределения спиновых степеней свободы с током \mathbf{J} или без него. Полный ток содержит парамагнитную часть

$$\mathbf{j} = i [(\chi_1 \nabla \chi_1^* - \text{c.c.}) + (\chi_2 \nabla \chi_2^* - \text{c.c.})]$$

и диамагнитное слагаемое $-4\mathbf{A}$. При записи выражения (3) были использованы обозначения $F_{ik} = \partial_i c_k - \partial_k c_i$ и $H_{ik} = \mathbf{n} \cdot [\partial_i \mathbf{n} \times \partial_k \mathbf{n}]$, а также безразмерные единицы длины $L = (\xi_1 + \xi_2)/2$ с длиной когерентности $\xi_\alpha = \hbar/\sqrt{2m\bar{b}_\alpha}$, единицы импульса \hbar/L для измерения импульса \mathbf{c} , единицы плотности $c^2/(512\pi e^2 L^2)$ частиц в расчете на единицу массы (при параметризации Ψ_α в форме (2)) и единицы энергии γ/L с $\gamma = (c\hbar/e)^2/512\pi$.

В формулировке (3) функционал Гинзбурга–Ландау зависит от калибровочно-инвариантных параметров порядка ρ^2 , \mathbf{c} и \mathbf{n} . Функции χ_α задают ориентацию единичного вектора \mathbf{n} , который описывает в длинноволновом пределе свойства магнитного порядка. Кроме того, функции χ_α определяют величину парамагнитной части тока. Сравнивая различные формы представления CP^1 -модели Гинзбурга–Ландау, отметим, что вихревые конфигурации полей Ψ_α в модели (1), (2) эквивалентны текстурам \mathbf{n} -поля в терминах модели (3). Обратим также внимание на то, что анзац (2)

имеет смысл факторизации продольных ρ и поперечных χ_α степеней свободы. В сверхпроводящем состоянии существенно композиция спиновых \mathbf{j} и зарядовых степеней свободы, так как ток содержит диамагнитную $U(1)$ -компоненту $-4\mathbf{A}$.

В мягком варианте расширенной модели \mathbf{n} -поля (3) множители первого слагаемого описывают распределения соответственно спиновой жесткости и квадрата обратной характерной длины изменения поля плотности. Из этого примера видно, что соревнование конкурирующих параметров порядка ρ , \mathbf{n} и \mathbf{c} может быть причиной сосуществования фазовых состояний с различным упорядочением зарядовых и спиновых степеней свободы. Перечислим предельные случаи модели (3) в неоднородных ($\mathbf{n} \neq \text{const}$) ситуациях:

- 1) фазовое состояние с нарушенным антиферромагнитным порядком ($\mathbf{c} = 0, \rho = \text{const}$);
- 2) неоднородное состояние с квазиодномерными распределениями плотности ($\mathbf{c} = 0, \rho \neq \text{const}$);
- 3) неоднородное сверхпроводящее состояние ($\mathbf{c} \neq 0, \rho = \text{const}$);
- 4) $\mathbf{c} \neq 0, \rho \neq \text{const}$.

В случае $\mathbf{n} = \text{const}$ и $\mathbf{c} \neq 0, \rho \neq \text{const}$ функционал (1) эквивалентен однокомпонентной модели Гинзбурга–Ландау.

3. ГРАНИЦЫ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ

3.1. Фазовое состояние с нарушенным антиферромагнитным порядком

Рассмотрим первый из перечисленных случаев. В этом пределе свободная энергия Гинзбурга–Ландау равна

$$F = \int d^3x \left[g_1 (\partial_k \mathbf{n})^2 + g_2 (\mathbf{n} \cdot [\partial_i \mathbf{n} \times \partial_k \mathbf{n}])^2 \right]. \quad (4)$$

Мы предположили, что в рассматриваемой фазе постоянное значение $\rho = \rho_0$ может быть найдено из минимума потенциала V , и ввели обозначение g_i для констант связи.

Детальному изучению свойств модели (4) были посвящены работы [21–27]. Из анализа размерности следует, что первое слагаемое в выражении (4) пропорционально характерному размеру R_Q конфигураций поля \mathbf{n} , а второе слагаемое обратно пропорционально этому масштабу. Поэтому энергия (4) имеет минимум, который достигается при $R_Q = \sqrt{g_2/g_1}$. Отсюда видно, почему второе слагаемое в модели Фаддеева–Ниёми (4) позволяет обойти запрет Деррика на существование трехмерных статических кон-

фигураций с конечным размером. Это слагаемое характеризует в инфракрасном пределе среднюю степень неколлинеарности $\langle 0 | \mathbf{S}_1 \cdot [\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_3] | 0 \rangle$ в ориентации трех спинов, находящихся в узлах ячейки квадратной решетки¹⁾.

В работах [25–27] было показано, что нижняя граница энергии в модели (4),

$$F \geq 32\pi^2 |Q|^{3/4}, \quad (5)$$

определяется инвариантом Хопфа

$$Q = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ikl} a_i \partial_k a_l. \quad (6)$$

В этом выражении вектор a_i имеет смысл потенциала калибровочного поля, которое параметризует среднюю степень неколлинеарности ориентаций соседних спинов следующим образом:

$$H_{ik} = \mathbf{n} \cdot [\partial_i \mathbf{n} \times \partial_k \mathbf{n}] \equiv \partial_i a_k - \partial_k a_i.$$

Зависимость $F_{min} \propto |Q|^{3/4}$ (5) с использованием граничных условий $\mathbf{n} \rightarrow (0, 0, 1)$ на пространственной бесконечности была подтверждена [22–24] в численных расчетах конфигураций поля \mathbf{n} . Такое граничное условие означает, что пространство \mathbb{R}^3 определения поля \mathbf{n} эффективно компактифицируется в трехмерную сферу S^3 . Тем самым единичный вектор \mathbf{n} осуществляет отображение сферы S^3 в пространство двумерной сферы S^2 . Пусть вектор \mathbf{n} направлен в некоторую произвольную точку двумерной сферы. Нас будет интересовать ответ на следующий вопрос: что является прообразом этой точки в пространстве S^3 ? Или, другими словами, какое многообразие точек из области определения вектора $\mathbf{n}(x, y, z)$ дает вклад в след вектора \mathbf{n} на двумерной сфере? Поскольку пространство S^3 компактно и его размерность на единицу больше размерности сферы S^2 , прообразами точек на сфере S^2 являются замкнутые и, вообще говоря, зацепленные линии на сфере S^3 . Инвариант Хопфа Q (6) описывает степень зацепления или заузленности этих линий. Он принадлежит множеству целых чисел \mathbb{Z} , которому равна рассматриваемая гомотопическая группа $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$. В частности, для двух однократно зацепленных окружностей имеем $Q = 1$, для одного из простейших узлов — трилистника — $Q = 6$ и т. д. Таким образом, все конфигурации поля \mathbf{n} разбиваются на классы в соответствии со значениями инварианта Хопфа. Обратим внимание на то, что зацепленные или заузленные солитонные конфигурации

можно пронумеровать с помощью индекса Хопфа только в случае CP^1 -модели Гинзбурга–Ландау с ее двухкомпонентным параметром порядка, поскольку при $M > 1$ гомотопическая группа $\pi_3(CP^M) = 0$ тривиальна [11].

3.2. Квазиодномерные распределения плотности

Рассмотрим состояния вне сверхпроводящей фазы из второй строки списка предельных случаев, к которым приводит CP^1 -модель Гинзбурга–Ландау. В этой мягкой версии модели функционал (3) имеет вид

$$F = \int d^3x \times \left[\frac{1}{4} \rho^2 (\partial_k \mathbf{n})^2 + (\partial_k \rho)^2 + H_{ik}^2 - b\rho^2 + \frac{d}{2} \rho^4 \right], \quad (7)$$

где фаза с разрушенным антиферромагнитным порядком соответствует положительная константа b . Состояние с разрушенным антиферромагнитным порядком, рассмотренное в первом разделе, имеет меньшую энергию, чем интересующее нас сейчас «мягкое» состояние, которое может быть метастабильным [12]. Ниже мы рассмотрим именно такие состояния и сравним их вклады в энергию, не изучая их релаксацию, критические размеры зародышей различных фаз и т. п., которые представляют отдельный интерес. При условии, что спин и заряд электрона из одного из четырех узлов некоторых плакетов перенесены в резервуар допантов, слагаемые с H_{ik} в выражении (1) характеризуют в инфракрасном пределе среднюю степень неколлинеарности $\langle 0 | \mathbf{S}_1 \cdot [\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_3] | 0 \rangle$ в ориентации трех спинов, оставшихся в узлах ячейки квадратной решетки. При этом дефицит плотности заряда ρ_h^2 связан с плотностью ρ^2 , описывающей в (1) распределения обменного интеграла, соотношением $\rho^2 + \rho_h^2 = \text{const}$. С длинноволновой точки зрения, распределение спиновой плотности ρ^2 в ограниченной области с экспоненциальным законом убывания на ее границе (например, при распределении в круге радиуса r_0 с экспоненциальным уменьшением на длине $R \ll r_0$) будет сопровождаться квазиодномерным распределением плотности заряда ρ_h^2 вдоль границы этой области, т. е. вдоль кольца толщиной R и радиусом r_0 . Отсюда видно, что изучение пространственных конфигураций поля плотности ρ^2 в планарных системах позволяет найти при помощи указанной голографической проекции форму одномерных распределений плотности электрического заряда.

¹⁾ Будем считать, что спин и заряд электрона из четвертого узла некоторых плакетов перенесены в резервуар допантов, что приводит к разрушению антиферромагнитного порядка.

Хорошо известно, что в таком фазовом состоянии распределения плотности заряда имеют форму полосок²⁾. Благодаря градиентному слагаемому $(\partial_k \rho)^2$ в (7), квазиодномерные конфигурации поля ρ действительно являются более выгодными. Представляется почти очевидным, что распределение плотности в форме колец дает среди них наименьший вклад в энергию. Найдем вклад в свободную энергию (7) от квазиодномерных распределений плотности ρ^2 в форме колец и полосок и сопоставим результаты вычислений с экспериментальными данными. Для конфигураций поля ρ в форме кольца и полоски выберем следующие пробные функции:

$$\rho = \rho_0 \exp[-(r - r_0)^2/2R^2], \quad (8)$$

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2L_x^2}\right) \times \begin{cases} 1, & |y| \leq L_y, \\ \exp\left[-\frac{(|y| - L_y)^2}{2L_y^2}\right], & |y| > L_y. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $\rho_0 = \sqrt{b/d}$, r_0 — радиус кольца, R — его ширина, $2L_y = 2\pi r_0$ — длина полоски, $L_x = R$ — ее ширина. Так как конфигурации (8) и (9) от третьей координаты не зависят, будем считать, что вдоль нее размер ограничен длиной L_z , а также, что $R < r_0$.

Вычисление энергии (7) с помощью (8) и (9) дает следующий результат для вклада в свободную энергию от кольца, F_r (при $R \ll r_0$), и полоски, F_{xy} :

$$F_r = \pi \rho_0^2 L_z \frac{\bar{r}_0}{R} \left(1 + \frac{R^2}{\xi^2}\right), \quad (10)$$

$$F_{xy} = \pi \rho_0^2 L_z \frac{\bar{r}_0}{R} \left[1 + \frac{R^2}{\xi^2} + \frac{R}{\bar{r}_0} + \left(n_0 - \frac{3}{4}b\right) \frac{R^3}{\bar{r}_0}\right]. \quad (11)$$

Здесь

$$\bar{r}_0 = \sqrt{\pi} r_0, \quad 1/\xi^2 = 2 \left[n_0 - (1 - 1/\sqrt{8})b\right],$$

n_0 — некоторое характерное значение «множителя» $(\partial_k \mathbf{n})^2$ в (7), которое по порядку величины равно $c_1 R^{-2}$, тогда как $b = c_2 R^{-2} \delta T$, где $c_i \sim 1$ и $\delta T = (T_c - T)/T_c$. В этих выражениях слагаемое H_{ik}^2 из (2) мы опустили, так как считали его одинаковым для вкладов от обоих типов распределений.

²⁾ Мы предполагаем, что характерные размеры полоски гораздо больше, чем постоянная решетки, что оправдывает использование феноменологического подхода теории среднего поля Гинзбурга-Ландау.

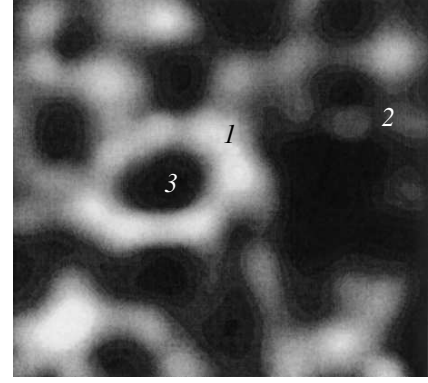


Рис. 1. Схематическое изображение замкнутых (1) и открытых (2) квазиодномерных структур плотности заряда (см. [28]) вокруг антиферромагнитных диэлектрических кластеров (3)

Точное выражение для F_r (в единицах $\pi \rho_0^2 L_z$) содержит слагаемое

$$\delta F_r = 2 [I_3(x_0) - x_0 I_2(x_0)] + \frac{bR^2}{2} [I_1(x_0 \sqrt{2}) - x_0 \sqrt{2} I_0(x_0 \sqrt{2})] + \frac{R^2}{\lambda^2} [I_1(x_0) - x_0 I_0(x_0)],$$

где

$$x_0 = \frac{R}{r_0}, \quad \frac{1}{\lambda^2} = 2(n_0 - b), \quad I_m(z) = \int_z^\infty x^m e^{-x^2} dx.$$

Однако это слагаемое уже при $R/r_0 \sim 1/4$ и $R \sim \lambda$ экспоненциально мало: $\delta F_r \sim 10^{-7}$.

Для оптимальной ширины $R = \xi$ (при $R \ll r_0$) разница свободных энергий $\Delta F = F_{xy} - F_r$ в единицах $\pi \rho_0^2 L_z$ имеет вид

$$\Delta F = 1 + c_1 - \frac{3}{4} c_2 \delta T.$$

Из этого выражения следует, что при $4(1 + c_1)/3c_2 < 1$ в области температур

$$[1 - 4(1 + c_1)/3c_2] T_c < T < T_c,$$

примыкающей к критической температуре T_c перехода в состояние со спиновой псевдощелью³⁾, предпочтение следует отдать кольцам (см. рисунок). В области температур

$$T < T_c [1 - 4(1 + c_1)/3c_2]$$

³⁾ В этом состоянии корреляционная длина $\xi \approx R \sim 10 \text{ \AA}$.

основными конфигурациями являются полоски. Как известно, приближаться к T_c , поддерживая постоянную температуру, можно за счет увеличения уровня допирования. Именно при такой постановке эксперимента в недавней работе [28] были получены свидетельства существования кольцеобразных зарядовых структур в недодопированных фазовых состояниях. Туннельный микроскоп в этом эксперименте фактически собирает данные с двумерного среза узлов [21].

Сделаем несколько замечаний относительно распределения спиновой плотности ρ^2 в диске, окруженном кольцевым распределением заряда. Все сказанное выше относилось к случаю, когда неупорядоченность спинов возникла лишь в области, непосредственно прилегающей к краю диска, так что фактически внутри мы имели антиферромагнитную фазу. Если антиферромагнитный порядок нарушен везде в круге, то необходимым является рассмотрение соответствующего распределения плотности ρ^2 в виде диска с целью дальнейшего сравнения его вклада с F_r . При рассмотрении вклада в свободную энергию распределений плотности ρ^2 в форме диска мы выигрываем по сравнению с кольцами в два раза за счет границы и проигрываем за счет площади. Расчет показывает, что при малом отношении R/r_0 энергетически более выгодными являются распределения типа колец.

Рассмотрим зависимость критической температуры T_c от уровня допирования. Для этого представим отношение F_r/F_{xy} следующим образом:

$$\frac{F_r}{F_{xy}} = \frac{1}{1 + B R/\bar{r}_0}, \quad (12)$$

где

$$B = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{n_0 - 3b/4}{n_0 - (1 - 1/\sqrt{8})b} \right] = \frac{3}{4} \frac{n_0 - 0.68b}{n_0 - 0.65b}.$$

Мы видим, что конфигурации в виде полосок являются энергетически более выгодными в интервале $0.65 < n_0/b < 0.68$, где $F_{xy} < F_r$. Нормируя плотность ρ_0^2 на число N допируемых частиц условием $N = 2\pi r_0 \xi L_z m \rho_0^2$, получим соотношение между параметрами n_0 и b , которое запишем в виде

$$x = b/\sqrt{n_0 - 0.65b}.$$

Здесь $x = Nd/(\sqrt{2}m\pi L_z r_0)$. Отсюда для границ рассмотренного выше интервала, где $n_0 \sim b \sim \delta T$, имеем $T(x) = T_c(1 - Ax^2)$ с некоторой константой A . Таким образом, внутри области, принадлежащей фазовому состоянию с разрушенным антиферромагнитным порядком, существует более узкая область, в

которой зарядовые структуры имеют форму полосок.

3.3. Неоднородное сверхпроводящее состояние

Рассмотрим сверхпроводящее состояние с отличным от нуля полным током \mathbf{J} , существующим на фоне некоторого распределения поля \mathbf{n} , считая, что $\rho = \rho_0 = \text{const}$. В этом случае свободная энергия

$$F = F_n + F_c - F_{int} = \int d^3x \left[\left((\partial_k \mathbf{n})^2 + H_{ik}^2 \right) + \left(\frac{1}{4} \mathbf{c}^2 + F_{ik}^2 \right) - 2F_{ik} H_{ik} \right]. \quad (13)$$

Знак «минус» перед энергией взаимодействия F_{int} полей \mathbf{c} и \mathbf{n} отражает диамагнетизм рассматриваемого состояния. Благодаря ему константа связи $g_2 = 1$ у слагаемого H_{ik}^2 уменьшается из-за перенормировки так, что сверхпроводящее состояние с $\mathbf{c} \neq 0$ имеет энергию меньшую, чем минимальное значение в неравенстве (5).

Чтобы найти точную нижнюю границу свободной энергии в сверхпроводящем состоянии с $\mathbf{c} \neq 0$, будем использовать следующее вспомогательное неравенство:

$$F_n^{5/6} F_c^{1/2} \geq (32\pi^2)^{4/3} |L|, \quad (14)$$

где число

$$L = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ikl} c_i \partial_k a_l \quad (15)$$

определяет степень взаимного зацепления [29, 30] токовых линий и линий магнитного поля $\mathbf{H} = [\nabla \times \mathbf{a}]$. Так же как и Q , оно является интегралом движения [30, 31] в рассматриваемом баротропном состоянии. Доказательство [14] неравенства (14) приведено в Приложении к настоящей работе.

Индексы зацепления, характеризующие корреляции спиновых и зарядовых степеней свободы, образуют матрицу

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ikl} a_i^\alpha \partial_k a_l^\beta = \begin{pmatrix} Q & L' \\ L & Q' \end{pmatrix}. \quad (16)$$

В этой симметричной матрице ($L = L'$) с $a_i^1 \equiv a_i$ и $a_i^2 \equiv c_i$ интеграл мог бы быть определен также с помощью асимптотического числа зацеплений [29]. Обратим внимание на существенное для дальнейшего обстоятельство. Вектор импульса $\mathbf{c} = \mathbf{J}/\rho^2$, будучи нормированным на плотность заряда, в отличие

от единичного вектора \mathbf{n} принадлежит некомпактному многообразию. Это приводит к тому, что определяемые с его помощью числа Хопфа в (16), вообще говоря, не являются целыми: $(L, Q') \notin \mathbb{Z}$. В сверхпроводящем состоянии, где абелева $U(1)$ -симметрия нарушена и заряд не сохраняется, числа L и Q' играют роль непрерывных интерполяционных параметров, соединяющих рассматриваемую сжимаемую и несжимаемую ($K_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$) фазы. С этой точки зрения, сверхпроводящие состояния с $K_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ и $K_{\alpha\beta} \notin \mathbb{Z}$ принадлежат одному и тому же классу универсальности [32].

Для нахождения нижней границы функционала (13) наряду с неравенством (14) будем опираться на неравенство Коши–Буняковского:

$$F_{int} \leq 2 \|F_{ik}\|_2 \cdot \|H_{ik}\|_2 \leq 2F_c^{1/2} F_n^{1/2}. \quad (17)$$

Здесь $\|F_{ik}\|_2 \equiv [\int d^3x F_{ik}^2]^{1/2}$. Отметим, что равенство в правой части выражения (17) достигается в ультрафиолетовом пределе, когда размер зацепленных вихревых конфигураций достаточно мал. Подставляя граничное значение F_{int} в (13), получаем

$$F \geq F_{min} = (F_n^{1/2} - F_c^{1/2})^2. \quad (18)$$

Конфигурация Хопфа с $Q = 1$, для которой в неравенстве (5) имеет место нижний предел, представляет собой два зацепленных кольца с радиусом R и минимальным значением свободной энергии

$$(F_n)_{min} = 2\pi^2 R^3 \left(\frac{8}{R^2} + \frac{8}{R^4} \right) \Big|_{R=1} = 32\pi^2.$$

Будем предполагать, что и в нашем случае $\mathbf{s} \neq 0$ существуют конфигурации, для которых справедливо равенство в выражении (14). Обратим внимание на важное обстоятельство, которое более подробно обсудим в следующем разделе. Для малых значений ρ и поэтому для больших значений поля \mathbf{s} , поскольку все слагаемые в (13) одного порядка, мы сталкиваемся с неустойчивостью зацепленных конфигураций относительно малых отклонений. Это приводит к ограничению значений F_c сверху. Имея в виду это замечание, при использовании в выражении (18) для F_c нижней границы

$$F_c^{1/2} = (32\pi^2)^{4/3} F_n^{-5/6} |L|$$

из выражения (14) и $F_n = 32\pi^2 |Q|^{3/4}$ получим для состояний с $Q \neq 0$, что

$$F \geq 32\pi^2 |Q|^{3/4} (1 - |L|/|Q|)^2. \quad (19)$$

Из выражения (19) видно, что для всех чисел $L < Q$ энергия основного состояния меньше, чем в модели (4), для которой справедливо неравенство (5). Причина понижения энергии может быть понята из сравнения величины различных слагаемых в выражении (13). Даже в условиях существования значительного парамагнитного вклада \mathbf{j} в ток диамагнитное взаимодействие в сверхпроводящем состоянии для всех классов состояний с $L < Q$ сокращает в (13) собственную энергию F_c тока и часть энергии F_n , связанной с динамикой поля \mathbf{n} . В рассматриваемом состоянии полный импульс с сверхпроводящих пар не равен нулю. В этом отношении неоднородное состояние с током аналогично [33] состоянию, предложенному в работах [17, 18].

4. СВОЙСТВА ФАЗОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Состояние с нарушенным антиферромагнитным порядком при $(\partial_k \rho)^2 \neq 0$ является фоном, на котором осуществляется переход в неоднородную сверхпроводящую фазу с $F_{ik} \neq 0$. Обсуждение свойств этого перехода при изменении плотности ρ^2 нам удобно провести, начиная со сверхпроводящего состояния. В этой фазе постоянное значение плотности заряда вследствие нарушения $U(1)$ -инвариантности играет роль управляющего параметра системы.

Пусть параметр ρ_0 изменяется в некотором интервале. Так как все слагаемые в выражении (3) одного порядка, при увеличении ρ_0 импульс \mathbf{s} и, следовательно, индекс L взаимного зацепления уменьшаются⁴⁾. В этом случае при достаточно малом L наименьшая из сверхпроводящих щелей убывает с возрастанием Q на уровне большого значения $32\pi^2 |Q|^{3/4}$ спиновой псевдощели.

При уменьшении ρ_0 имеет место следующий эффект. Радиус \mathcal{R} компактификации $\mathbb{R}^3 \rightarrow S^3$, будучи пропорциональным $g_1^{-1/2} \propto \rho_0^{-1}$, возрастает до тех пор, пока не превысит некоторое критическое значение \mathcal{R}_{cr} . При $\mathcal{R} > \mathcal{R}_{cr}$ отображение Хопфа неустойчиво [27] относительно малых возмущений зацепленных вихревых конфигураций поля. В результате $U(2)$ -симметрия, которая связана с тождественным отображением Хопфа, оказывается спонтанно нарушенной. Это означает, что топологические конфигурации полей \mathbf{n} и \mathbf{s} , вместо того чтобы быть распределенными по всему пространству S^3 , собираются око-

⁴⁾ Возрастание ρ_0 означает физически, что концентрация ρ_h^2 вакантных мест (так называемых дырок) уменьшается.

ло некоторой точки (базовой точки стереографической проекции $\mathbb{R}^3 \rightarrow S^3$) и коллапсируют в локализованные структуры [27]. Мы видим, что существуют оптимальное значение ρ_0 и, следовательно, значения характерного импульса \mathbf{s} и отношения $|L|/|Q|$, для которых возникает наибольший выигрыш при переходе в сверхпроводящее состояние.

До сих пор вектор \mathbf{A} характеризовал степени свободы, связанные с внутренней зарядовой калибровочной $U(1)$ -симметрией. Если приложено внешнее электромагнитное поле, то вектор \mathbf{A} равен сумме внутреннего и внешнего калибровочных потенциалов. Из-за диамагнетизма сверхпроводящего состояния при наложении внешнего магнитного поля импульс \mathbf{s} уменьшается. Подобно случаю с возрастанием ρ_0 , это приводит к подавлению сверхпроводящей щели. Внешнее магнитное поле, играя роль плавного управляющего параметра, определяет граничные условия задачи. В результате ответ на вопрос о степени полноты мейсснеровской экранировки зависит от результатов соревнования вкладов от парамагнитной (спиновой) \mathbf{j} и диамагнитной (зарядовой) $-4\mathbf{A}$ частей полного тока \mathbf{J} .

Подобно распределению энергий в дробном квантовом эффекте Холла с фактором заполнения $\nu = p/q$ и $p, q \in \mathbb{Z}$, энергетический выигрыш в выражении (19) зависит от отношения $|L|/|Q|$. Инвариант Хопфа $Q \in \mathbb{Z}$, нумеруя вакуумы [34], эквивалентен степени вырождения q основного состояния, а L играет роль степени заполнения p несжимаемого состояния заряженной жидкости в дробном квантовом эффекте Холла. С этой точки зрения множитель $1 - |L|/|Q|$ в выражении (19) эквивалентен фактору заполнения $1 - \nu$ для дырок. Отличие нашей системы от состояний в дробном квантовом эффекте Холла заключается в сжимаемости сверхпроводящего состояния, где, как уже отмечалось, эффективное число L зарядовых степеней свободы, вообще говоря, не является целым числом. Минимальному значению свободной энергии (13) отвечают конфигурации полей \mathbf{n} и $\mathbf{s} = \mathbf{a}$ с целым значением $L = Q$, удовлетворяющих соотношению дуальности $F_n = F_c$. В этом пределе матрица $K_{\alpha\beta}$ пропорциональна матрице $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, которая использовалась [35] для описания топологического порядка в теории дробного квантового эффекта Холла с фактором заполнения $1 - \nu$ при $\nu = 1/2$.

Граничные условия, которые определяют импульс \mathbf{s} и топологические инварианты L, Q , зада-

ются не только значением управляющего параметра ρ_0 модели и внешним магнитным полем. Их физический смысл и величина зависят также от размерности многообразия, на котором определена модель. В (3+0)-мерном случае свободной энергии (3) инвариант Хопфа (6) аналогичен действию Черна–Саймонса

$$\frac{k}{4\pi} \int dt d^2x \varepsilon_{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda.$$

Это слагаемое в действии (2+1)-мерных систем описывает зависимость вклада нелинейных мод в свободную энергию от статистического параметра k . Коэффициент k в действии Черна–Саймонса имеет геометрический смысл числа переплетений мировых линий возбуждений. В частности, при перестановке полуфермионных возбуждений (семионов) и возвращении их в исходные позиции на плоскости мировые линии переплетаются дважды⁵⁾ и $k = 2$. При этом статистические корреляции нелинейных мод имеют характер притяжения, и для значений $k \sim 2$ их наибольший относительный вклад в энергию составляет несколько процентов [37]. Для характерной энергии 0.1–1 эВ это составляет несколько десятков или сотен градусов. Принимая во внимание соотношение между размерностью систем при их динамическом и статистическом описаниях, заметим, что (2+1)-мерный случай $k = 2$ с открытыми концами мировых линий возбуждений эквивалентен (после отождествления концов) компактному статистическому (3+0)-мерному примеру зацепления Хопфа с $Q = 1$.

Различие (3+0)- и (2+1)-мерных ситуаций заключается в топологии областей определения поля \mathbf{n} [38–40]. Как в слоистых системах в статическом случае (3), когда система периодична по одной из пространственных переменных, так и при вычислении статистической суммы в планарных системах одна из трех координат — переменная Мацубару — является периодической переменной. Это значит, что вместо сферы S^3 , какой стала область определения поля \mathbf{n} после компактификации пространства \mathbb{R}^3 , мы имеем дело с топологией трехмерного тора $T^{2 \times 1} = S^2 \times S^1$ или $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ и с соответствующими классами отображений. Содержание инварианта Хопфа в этом случае оказывается более богатым [38–40]. Для трехмерного тора T^3 инвариант Хопфа определен по модулю $2q$, где q —

⁵⁾ Для фермионов мировые линии не переплетены и $k = 1$. В классическом пределе бозонов $k \gg 1$ и входящее в действие Черна–Саймонса статистическое калибровочное поле a_μ отцепляется [36] от полей, описывающих состояния частиц.

наибольший общий делитель чисел $\{q_1, q_2, q_3\} \in \mathbb{Z}$. Здесь q_i — степень отображения $T^2 \rightarrow S^2$, где T^2 есть сечение T^3 с фиксированной i -й координатой. Четыре целых числа $\{q_i, Q\}$, где число Q определено по модулю $2q$, обеспечивают нас полной гомотопической классификацией отображений $T^3 \rightarrow S^2$ с $\pi_1[\text{Map}_q(S^2 \rightarrow S^2)] = \mathbb{Z}_{2q}$ и фиксированной степенью q [38–40]. Геометрический смысл этого модифицированного инварианта Хопфа — целого числа из интервала $\{0, 2q - 1\}$ — прежний. Это есть индекс зацепления прообразов двух произвольных точек отображения $T^3 \rightarrow S^2$. Случаи $T^{2 \times 1}$ и T^3 характеризуются физически различными граничными условиями. Они меняются при увеличении угловой скорости вращения нейтральной сверхтекучей фазы в ^3He [38, 39] или при увеличении величины внешнего магнитного поля в нашей заряженной системе. Переход $T^{2 \times 1} \rightarrow T^3$, уменьшая возможность мягкого изменения инварианта Хопфа, способствует рождению несжимаемой фазы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из приведенного анализа следует, что выигрыш свободной энергии при переходе в сверхпроводящее состояние с $\mathbf{c} \neq 0$ возникает при условии существования ассоциированной со спиновыми степенями свободы когерентной фазы, которая характеризуется псевдощелью (5) и топологическим порядком, связанным с зацеплениями. В случае достаточно большой плотности ρ_0^2 импульс \mathbf{c} мал и переход в сверхпроводящее состояние энергетически невыгоден. Это второе по нашей классификации состояние характеризуется переменными значениями параметров порядка ρ и \mathbf{n} . Проигрыш в энергии за счет слагаемого $(\partial_k \rho)^2$ может быть уменьшен благодаря развитию одномерных структур. Будут ли эти одномерные зарядовые структуры открытыми в виде полосок или замкнутыми почти одномерными структурами в форме колец, зависит от параметров потенциала $V(\rho, n_3)$. В фазе $n_3 = \text{const}$ с нейтральными спиновыми токами ответ будет зависеть от величины и знака множителя $b(n_3)$ в потенциале

$$V(\rho, n_3) = -b\rho^2 + \frac{d}{2}\rho^4.$$

Если $b > 0$, то вдали от T_c предпочтительными являются зарядовые структуры с открытыми концами [13], а в случае $T \rightarrow T_c$ предпочтение следует отдать кольцам. Первое экспериментальное указание на существование зарядовых структур в форме ко-

лец в недодопированной фазе планарных систем содержится в работе [28].

Сравнивая результаты настоящей работы, базирующейся на рассмотрении локальных полей, с выводами, следующими из БКШ-подобной модели [19] с двумя сортами частиц, обратим внимание на следующее качественное совпадение. Параметр ρ_0 , как это видно из выражения (3), определяет величину константы связи. Поэтому возникновение решений для сверхпроводящей щели в работе [19], начиная с конечного значения константы связи, в отличие от стандартной модели БКШ, аналогично существованию порога для малых значений ρ_0 в настоящей работе.

Сверхпроводящая фаза занимает на фазовой плоскости «температура – плотность заряда» только часть области, относящейся к фазе с нарушенным антиферромагнитным порядком. Границы ее существования на фазовой плоскости, связанные с характерными значениями плотности заряда ρ_0^2 , определяются при больших значениях ρ_0 неравенством (13) [14], а при малых ρ_0 зависят от критического размера узла [27], начиная с которого возникает неустойчивость отображения Хопфа.

В отличие от модели [19], рассмотренные в настоящей работе состояния существенно неоднородны. Анализ состояния $F_{ik} \neq 0$, $\rho \neq \text{const}$ представляет собой в настоящее время нерешенную проблему. Мы видим, что вклад вследствие условия $(\partial_k \rho)^2 \neq 0$ уменьшает выигрыш свободной энергии [14] в однородной сверхпроводящей фазе. Здесь мы лишь отметим, что сверхпроводящий ток с амплитудой \mathbf{c}_0 , текущий по кольцам (8), дает дополнительное слагаемое порядка $\mathbf{c}_0^2 R^2$ в множителе выражения (10). Это, в частности, поясняет, почему сверхпроводящая область на фазовой диаграмме «температура – уровень допирования» смещена к линии $\delta T(x) = 0$ перехода в состояние со спиновой псевдощелью. Действительно, в этом случае

$$V_{eff}(\rho, n_3) = -b_{eff}\rho^2 + \frac{d}{2}\rho^4,$$

$$b_{eff} = b - (n_0 + \mathbf{c}_0^2) = \frac{\text{const}}{R^2}\delta T.$$

Отсюда следует, что конечное значение импульса \mathbf{c} сверхпроводящих пар уменьшает δT .

Изучение сверхпроводимости в гранулированных системах можно, по-видимому, провести, не основываясь на подходах теории среднего поля, например, на применении точного решения Ричардсона с использованием уравнений анзаца Бете [41] и методов конформной теории поля [42].

Точное решение задачи о спектре возбуждений и структуре основного сверхпроводящего состояния в системе квантовых кластеров при условии конечного значения полного импульса пар является при таком подходе одной из актуальных проблем. Конформная природа размерности $3/4$ [29] в (5), отражаясь в скейлинговом характере закона изменения энергетического масштаба вклада в динамическую магнитную восприимчивость [43], который пропорционален $T^{3/4}$, также нуждается в детальном изучении.

Мы благодарны А. Г. Абанову, С. А. Бразовскому, В. А. Вербусу, Г. Е. Воловику, С. М. Гирвину (S. M. Girvin), В. Е. Кравцову, Е. А. Кузнецову, А. И. Ларкину, А. Г. Литваку, Л. Д. Фаддееву, Й.-Ш. Ву (Y.-S. Wu) за советы и полезные обсуждения. Эта работа была частично поддержана РФФИ (грант № 01-02-17225).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство неравенства (14) использует следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |L| &< \|c\|_6 \cdot \|\mathbf{H}\|_{6/5} \leq 6^{1/6} \|[\nabla \times c]\|_2 \cdot \|\mathbf{H}\|_{6/5} \leq \\ &\leq 6^{1/6} \|[\nabla \times c]\|_2 \|\mathbf{H}\|_1^{2/3} \|\mathbf{H}\|_2^{1/3} \leq \\ &\leq (32\pi^2)^{-4/3} F_c^{1/2} F_n^{2/3} F_n^{1/6} = \\ &= (32\pi^2)^{-4/3} F_c^{1/2} F_n^{5/6}. \quad (\text{П.1}) \end{aligned}$$

Здесь $\|\mathbf{H}\|_p \equiv (\int d^3x |\mathbf{H}|^p)^{1/p}$. На первом и третьем шагах мы использовали неравенство Гельдера

$$\|\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}\| \leq \|\mathbf{f}\|_p \cdot \|\mathbf{g}\|_q$$

с $1/p + 1/q = 1$. Второй шаг при условии $\nabla \cdot c = 0$ предполагает, что имеет место неравенство Ладыженской [44]:

$$\|c\|_6 \leq 6^{1/6} \|[\nabla \times c]\|_2.$$

Четвертый шаг в последовательности неравенств возникает после сравнения слагаемых $\|[\nabla \times c]\|$ и $\|\mathbf{H}\|$ со слагаемыми F_n и F_c в выражении (13). Последняя строка показывает также отдельные вклады от \mathbf{n} - и \mathbf{c} -частей свободной энергии (13) в окончательный результат (14). Совершенно аналогично, пользуясь цепочкой неравенств Гельдера и Ладыженской, можно найти, что

$$F_n^{1/2} F_c^{5/6} \geq (16\pi^2)^{4/3} |L'|.$$

Отличие коэффициента в этом неравенстве от коэффициента в (14) возникает из-за коэффициента $1/4$ (вследствие заряда $2e$ сверхпроводящих пар) при первом слагаемом свободной энергии F_c в (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Babaev, L. D. Faddeev, and A. J. Niemi, Phys. Rev. B **65**, 100512 (2002).
2. B. Lake et al., Science **291**, 1759 (2001).
3. B. Lake et al., Nature **415**, 299 (2002).
4. J. E. Hoffman et al., Science **295**, 466 (2002).
5. S. H. Pan et al., Nature **413**, 282 (2001).
6. S. J. L. Billinge, E. S. Bozin, M. Gutmann, and H. Takagi, E-print archives, cond-mat/0005032.
7. S. Caprara, C. Castellani, C. Di Castro, M. Grilli, and A. Perali, E-print archives, cond-mat/9907265.
8. L. D. Faddeev and A. J. Niemi, Phys. Rev. Lett. **82**, 1624 (1999); Phys. Lett. **525B**, 195 (2002).
9. E. Babaev, Phys. Rev. Lett. **88**, 177002 (2002).
10. Y. M. Cho, Phys. Rev. Lett. **87**, 252001 (2001); E-print archives, hep-th/0110076.
11. A. G. Abanov and P. W. Wiegmann, E-print archives, hep-th/0105213.
12. L. D. Faddeev, Preprint IAS-75-QS70, Princeton (1975).
13. M. Lübke, S. M. Nasir, A. Niemi, and K. Torokoff, Phys. Lett. **534B**, 195 (2002).
14. А. П. Протогенов, В. А. Вербус, Письма в ЖЭТФ **76**, 60 (2002).
15. А. П. Протогенов, E-print archives, cond-mat/0205133.
16. L. S. Isaev and A. P. Protogenov, E-print archives, cond-mat/0210295.
17. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **47**, 1136 (1964).
18. P. Fulde and R. A. Ferrell, Phys. Rev. A **135**, 550 (1964).
19. W. V. Liu and F. Wilczek, E-print archives, cond-mat/0208052.
20. P. van Baal, E-print archives, hep-th/0109148.
21. L. D. Faddeev and A. J. Niemi, Nature **387**, 58 (1997).

22. J. Gladikowski and M. Hellmund, *Phys. Rev. D* **56**, 5194 (1997).
23. R. A. Battye and P. M. Sutcliffe, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4798 (1998).
24. J. Hietarinta and P. Salo, *Phys. Lett.* **451B**, 60 (1999).
25. А. Ф. Вакуленко, Л. В. Капитанский, *ДАН* **246**, 840 (1979).
26. A. Kundu and Yu. P. Rubakov, *J. Phys. A* **15**, 269 (1982).
27. R. S. Ward, *Nonlinearity* **12**, 1 (1999); E-print archives, hep-th/9811176.
28. H. Takagi, <http://agenda.ictp.trieste.it/agenda/current/fullAgenda.php?email=0&ida=a01152>
29. V. I. Arnold and B. A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*, *Appl. Math. Sci.* **125** (1998), Chapt. 3.
30. H. K. Moffatt, *J. Fluid Mech.* **106**, 117 (1969).
31. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, *УФН* **167**, 1137 (1997).
32. N. Read and D. Green, *Phys. Rev. B* **61**, 10267 (2000).
33. А. И. Ларкин, частное сообщение.
34. P. van Baal and A. Wipf, E-print archives, hep-th/0105141.
35. X.-G. Wen, E-print archives, cond-mat/9506066.
36. А. П. Протогенов, *УФН* **162**, 1 (1992).
37. Л. А. Абрамян, В. А. Вербус, А. П. Протогенов, *Письма в ЖЭТФ* **69**, 839 (1999); А. П. Протогенов, *Письма в ЖЭТФ* **73**, 292 (2001).
38. V. M. H. Ruutu, U. Parts, J. H. Koivuniemi, M. Krusius, E. V. Thuneberg, and G. E. Volovik, *Письма в ЖЭТФ* **60**, 659 (1994).
39. Ю. Г. Махлин, Т. Ш. Мисирпашаев, *Письма в ЖЭТФ* **61**, 48 (1995).
40. А. Г. Абанов, частное сообщение.
41. J. von Delft and R. Poghossian, E-print archives, cond-mat/0106405.
42. G. Sierra, *Nucl. Phys. B* **572** [FS], 517 (2000); E-print archives, hep-th/0111114.
43. P. Coleman, C. Pepin, Q. Si, R. Ramazashvili, *J. Phys.: Condens. Matter* **13**, 723 (2001).
44. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1970).