

ЭВОЛЮЦИЯ ПРОДОЛЬНОЙ И ПОПЕРЕЧНОЙ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДЕ С ПАРАМАГНИТНЫМИ ПРИМЕСЯМИ

А. А. Заболотский*

*Институт автоматизации и электрометрии
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 10 декабря 2002 г.

Изучается двухпарциальное взаимодействие продольной и поперечной компонент звуковых импульсов с системой парамагнитных примесей с эффективным спином $S = 1/2$ в кристаллическом слое или на поверхности в присутствии произвольно направленного внешнего постоянного магнитного поля. Выведена новая система эволюционных уравнений, описывающая такое взаимодействие, и показано, что в отсутствие потерь для равных фазовых скоростей этих звуковых компонент и при условии однонаправленности их распространения исходная система приводится к новой интегрируемой системе уравнений. Полученная интегрируемая система описывает динамику импульсов вне рамок приближения медленных огибающих. Для одной из редукций общей модели, отвечающей новой интегрируемой модели, в работе приводятся соответствующие уравнения метода обратной задачи, а также найдены солитонные решения. Исследуются динамика и условия формирования фононной лавины, возникающей при распаде начального полностью или не полностью инвертированного состояния спиновой системы. Обсуждается применение результатов для описания динамики взаимодействия спинов и акустических импульсов в разных спиновых системах с внешним магнитным полем.

PACS: 41.20.Jb, 42.50.Md, 43.25.+y

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные когерентные оптические явления, которые ассоциируются с солитонными и другими автомодельными решениями [1], [2], в настоящее время наиболее детально изучены аналитически в рамках интегрируемых моделей [3]. При распространении упругих волн в парамагнитных кристаллах аналогичные солитоноподобные импульсы могут образовываться за счет эффектов, связанных с ангармоническими колебаниями и дисперсией [4], а также в условиях нелинейного когерентного взаимодействия акустических волн с содержащимися в среде парамагнитными примесями и при акустической самоиндуцированной прозрачности (АСИП) [5–8]. Нелинейные когерентные явления, связанные с акустическим парамагнитным резонансом и распространением акустических импульсов, также изучаются уже достаточно длительное время. В ряде работ (см., например, [5–10]) были построены модели эволюции

акустических импульсов в объемных кристаллах с примесными парамагнитными частицами и найдены простейшие солитонные решения. В работах [6, 10] и др. исследовались когерентные эффекты, возникающие при эволюции поверхностных акустических волн рэлеевского типа. Такие волны могут распространяться вдоль границы раздела сред. Аналогичные явления могут наблюдаться при эволюции плоских волн в объемных средах [11–14].

В цитированных выше работах, как правило, использовалась аналогия между оптическими и акустическими эффектами. В то же время эволюция звукового импульса в кристалле с парамагнитными примесями имеет ряд качественных отличий от динамики световых волн в среде, связанных, например, с тем, что звуковая волна в кристалле может быть продольно-поперечной, т.е. в общем случае трехкомпонентной [7, 8].

При нахождении солитонных решений уравнений, описывающих поверхностные акустические волны, в известных нам работах, кроме работ [7] и рабо-

*E-mail: zabolotskii@okibox.iae.nsk.su

ты автора [15], применялось приближение квазимонохроматической волны. Характерная длина акустического импульса, как правило, не менее 10^{-4} см, т. е. много больше постоянной кристаллической решетки. В то же время для пикосекундного акустического импульса длительностью $\tau_a \sim 10$ пс его длина составляет 10^{-7} – 10^{-6} см и перспективы физики и техники акустических импульсов такой длительности выглядят привлекательными. Пространственная протяженность такого импульса в твердом теле всего лишь на порядок превышает характерный размер ячейки кристаллической решетки, что представляет принципиальный интерес для акустической спектроскопии и диагностики. Поэтому в идеале для создания таких импульсов можно использовать среды с длиной всего в сотни или десятки характерных размеров кристаллической решетки. На спектральном языке переход к пикосекундным акустическим импульсам означает освоение ранее недоступного диапазона частот, превышающих 100 ГГц. Концентрация звуковой энергии для столь малых интервалов позволяет рассчитывать и получение сильных звуковых давлений, превышающих 10^9 бар.

Генерация пикосекундных акустических солитонов наблюдалась экспериментально в недавней работе [4]. Солитоны образовывались на расстоянии много меньше 1 мм вследствие баланса дисперсии, обусловленной положением атомов в кристаллической решетке, и нелинейности, возникающей из ангармонизма межатомных сил. Аналог оптической самоиндуцированной прозрачности — акустический резонансный эффект — наблюдался в низкотемпературных кристаллических образцах, содержащих парамагнитные примеси. В работах [11, 12] этот эффект наблюдался на примесях Fe^{2+} в кристаллических матрицах MgO и LiNbO_3 , соответственно, при распространении продольного акустического импульса под углом к внешнему полю.

В общем случае групповые скорости продольной v_{\parallel} и поперечных v_{\perp} компонент акустического импульса в твердом теле различны. Это приводит к тому, что локальное взаимодействие импульсов этих компонент с характерной длиной l_a между собой ограничено временем

$$t_{int} \sim \frac{l_a}{v_{\parallel} - v_{\perp}}.$$

Наиболее эффективно взаимодействие импульсов происходит при близких групповых скоростях: $v_{\parallel} \approx v_{\perp}$. Такая ситуация реализуется в анизотропных кристаллах, в которых скорость

продольной и поперечной составляющих упругого поля не зависит от направления. Эти условия лучше всего выполняются для ионных кристаллов галогенидов щелочных металлов с центральными силами взаимодействия между атомами, например в NaBr [16].

Теория АСИП в среде парамагнитных примесей со спином 1/2 для продольно-поперечных акустических волн развивалась в работах [7] и [8], в которых были выведены уравнения, описывающие динамику акустических импульсов. Для решения общих эволюционных уравнений авторы использовали ряд ограничений на геометрию и динамику взаимодействия. В результате были получены достаточно сложные для анализа не интегрируемые точно системы уравнений, затем задача сводилась либо к хорошо известным уравнениям (типа синус-Гордон), либо к дисперсионным уравнениям, отвечающим эволюции малоамплитудных импульсов. Последние уравнения не могут применяться для описания динамики мощных акустических импульсов пикосекундной длительности.

В то же время достаточно богатая структура эволюционных уравнений, описывающих динамику акустических волн в парамагнитных средах, открывает возможность сведения их при выполнении вполне реалистических приближений к некоторым интегрируемым моделям без наложения аналогичных жестких условий. Эти уравнения не только могут отвечать более общей физической модели, но и позволяют аналитически описать новые физические явления в аналогичной или другой геометрии взаимодействия. Настоящая работа является продолжением работы [15], посвященной задаче нахождения таких интегрируемых уравнений и применения их для описания АСИП. Однако здесь рассматривается совершенно иная геометрия взаимодействия акустических волн, описываемая другой, отличающейся от найденной в [15], новой исходной физической системой уравнений и, соответственно, качественно новыми интегрируемыми редукциями этой системы.

В отличие от работы [15], в которой изучалась связанная динамика трех компонент акустических импульсов, в настоящей работе рассматривается «двухпарциальная» динамика акустических волн, т. е. учитывается взаимодействие одной поперечной и одной продольной компонент акустической волны, находящихся в плоскости xz . Вклад y -компоненты акустического поля не учитывается. Этому могут отвечать простейшие типы поверхностных волн — двухпарциальные поверхностные волны Рэлея и сдвиговые поверхностные волны (см., напри-

мер, в книге [17]). Другие физические предпосылки для реализации такой модели в объемном кристалле могут быть связаны с его сильной анизотропией. Например, в случае относительной малости коэффициентов спин-фононной связи, отвечающих y -компоненте акустической волны. Другими условиями могут быть условия близости групповых скоростей продольной и поперечной волн и их сильное отличие от групповой скорости еще одной поперечной компоненты (см. ниже и в [17]).

В рамках такой геометрии взаимодействия показано, что для перехода от исходных эволюционных уравнений, описывающих когерентную динамику акустических импульсов, к интегрируемой системе уравнений достаточно применить одно приближение — однонаправленности распространения волн — и условие равенства фазовых скоростей продольной и поперечной акустических волн.

Построенная новая интегрируемая система эволюционных уравнений сложна для анализа, поэтому в настоящей работе аппарат метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [3] развит для ее частного случая. Применение МОЗР к этой модели позволяет исследовать различные режимы эволюции пикосекундных акустических импульсов вне рамок приближения медленных огибающих. В рамках МОЗР в настоящей работе найдено солитонное решение модели, которое описывает, в частности, в явном виде зависимость формы солитона от относительного вклада продольной и поперечной компонент.

Помимо солитонных решений, ассоциирующихся с явлением АСИП, в рамках МОЗР удается провести анализ и других режимов эволюции импульсов. Например, в случае начально полной или неполной инверсии спинов возникает неустойчивое состояние системы, для вывода из которого (в случае полной инверсии) достаточно слабой затравочной акустической волны. В работе обсуждается применение МОЗР для описания возникающего при этом явления «фононной лавины», наблюдавшегося в экспериментах [13, 14], и для других физических ситуаций, связанных с динамикой спин-фононных систем в магнитном поле.

Работа построена следующим образом. В следующем разделе приводится вывод основной системы эволюционных уравнений, описывающих динамику продольно-поперечной волны. В разд. 3 найдена наиболее общая интегрируемая редукция исходной системы уравнений этой системы. В следующем разделе развит аппарат МОЗР для редукции общей модели и найдено односолитонное решение этой модели. Раздел 5 посвящен обсуждению полученных резуль-

татов и их применений. В Приложении приводится представление Лакса для общей интегрируемой модели и некоторые интегрируемые редукции общей модели.

2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведем вывод уравнений, описывающих динамику продольно-поперечной волны в кристалле с парамагнитными примесями, следуя работам [7, 15]. Считаем, что внешнее постоянное и однородное магнитное поле \mathbf{B} направлено по оси z . Зеемановское взаимодействие магнитного момента $\hat{\mu}^{(a)}$, находящегося в точке a , вносит в общий гамильтониан вклад

$$\hat{H}_a = -\hat{\mu}^{(a)} \mathbf{B}.$$

Компоненты $\hat{\mu}^{(a)}$ выражаются через компоненты спина $\mathbf{S}^{(a)}(\mathbf{r}_a)$, где \mathbf{r}_a — радиус-вектор a -го спина, следующим образом:

$$\hat{\mu}_j^{(a)} = -\sum_k \mu_B g_{jk} \hat{S}_k^{(a)}.$$

Здесь μ_B — магнетон Бора, g_{jk} — компоненты тензора Ланде. С учетом этого

$$\hat{H}^z = \sum_{a=1}^N \hat{H}_a^z = \mu_B \sum_a \sum_{j,k} B_j g_{jk} \hat{S}_k^{(a)}, \quad (1)$$

где N — общее число спинов. Диагональные значения тензора Ланде могут различаться.

Поскольку эффективный спин равен $1/2$, он может быть разложен по матрицам Паули:

$$\begin{aligned} \hat{S}_x^a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{S}_y^a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_z^a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Считаем, что координаты x, y, z вдоль главных осей тензора Ланде совпадают с осями симметрии кристалла, тогда в недеформированной невозмущенной среде тензор Ланде диагонален:

$$g_{jk} = g_{jk}^{(0)} = g_{jj} \delta_{jk},$$

δ_{jk} — дельта-функция. Деформацию кристалла акустической волной описываем линейными поправками к тензору Ланде:

$$g_{jk} = g_{jk}^{(0)} + \sum_{p,q} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \right)_0 \mathcal{E}_{pq} + \dots, \quad (3)$$

где \mathcal{E} — тензор упругих деформаций кристалла в месте расположения спина. Производные берутся в точке с нулевой деформаций. Компоненты тензора деформаций выражаются через компоненты вектора смещений $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ следующим образом:

$$\mathcal{E}_{pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_p}{\partial x_q} + \frac{\partial U_q}{\partial x_p} \right). \quad (4)$$

Гамильтониан (1) принимает вид

$$\hat{H}_s = \sum_{\alpha} \sum_j \mu_B g_{jj} B_j \hat{S}_j^{(\alpha)}. \quad (5)$$

Спин-фононное взаимодействие в линейном по \mathcal{E}_{pq} приближении описывается следующим гамильтонианом:

$$\hat{H}_{int} = \sum_{\alpha} \sum_{j,k,p,q} \mu_B B_j F_{jk,pq} \mathcal{E}_{pq} \hat{S}_k^{(\alpha)}. \quad (6)$$

Здесь $F_{jk,pq} = (\partial g_{jk} / \partial \mathcal{E}_{pq})$ — постоянные спин-фононной связи [12, 18].

Динамика акустического поля в кристалле без учета ангармонизма описывается гамильтонианом

$$H_a = \int \left(\frac{1}{2n_0} \sum_j p_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l,m} \lambda_{jklm} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) d\mathbf{r}, \quad (7)$$

где n_0 — средняя плотность кристалла, p_j ($j = x, y, z$) — компоненты плотности импульса, возникающие при динамических смещениях, λ_{jklm} — тензор модулей упругости кристалла [19]. Интеграл в (7) берется по объему кристалла. Предполагается, что число фононов велико и справедливо классическое описание динамики акустического поля. В то же время двухуровневая спиновая система требует квантовомеханического описания. Для $S = 1/2$ и при наличии достаточно сильного магнитного поля члены, квадратичные по спиновым операторам, можно не учитывать (детальнее см. в работе [20]). Здесь справедлива аналогия с взаимодействием классического электромагнитного поля с оптической квантовой двухуровневой средой [21].

Как и в случае оптической среды, от описания динамики спина можно перейти к уравнениям эволюции для элементов матрицы плотности двухуровневой среды $\hat{\rho}$:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}}. \quad (9)$$

Здесь

$$H = H_a + \langle \hat{H}_{int} \rangle,$$

где взаимодействие спина и поля упругого импульса описывается классическими уравнениями Гамильтона для сплошной среды:

$$\langle \hat{H}_{int} \rangle = \sum_{\alpha} \sum_{j,k,p,q} \mu_B B_j F_{jk,pq} \times \int \mathcal{E}_{pq}(\mathbf{r}) \langle \hat{S}_k^{(\alpha)}(\mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r}. \quad (10)$$

Здесь n — концентрация парамагнитных примесей. Суммирование по однородно расположенным в кристалле ионам со спинами $1/2$ заменено интегрированием по всему пространству. Угловые скобки означают усреднение по квантовым состояниям:

$$\langle \hat{S}_k^{(\alpha)}(\mathbf{r}) \rangle = \text{Tr} \hat{S}_k^{(\alpha)} \hat{\rho}.$$

Рассматривается двухпарциальная динамика акустических полей, т.е. мы считаем, что вклад во взаимодействие вносят только продольная и поперечная компоненты поля (\mathcal{E}_{xz} и \mathcal{E}_{zz}). Такая ситуация возможна в случае, если коэффициенты $F_{yx,zz}, F_{yz,yz}$ много меньше коэффициентов $F_{xz,zz}, F_{xz,xz}, F_{zz,zz}$. Другой механизм, приводящий к квазидвухмерной динамике, может быть связан с отличием коэффициента эластичности λ_{yz} от коэффициентов $\lambda_{xz} \approx \lambda_{zz}$. Фазовые скорости компонент акустических волн пропорциональны $\sqrt{\lambda_{yz}}$. Поскольку в нелинейном импульсном режиме эффективность взаимодействия определяется длиной взаимодействия, для волн с почти совпадающими фазовыми скоростями ($v_1 \approx v_2 \approx v$) это взаимодействие существенно эффективнее, чем взаимодействие с волной, фазовая скорость которой существенно отличается от v . Эффект «убегания» компоненты акустической волны из области взаимодействия также используется для мотивации перехода к «двухпарциальному» описанию динамики акустических волн (см., например, [17]), т.е. без учета вклада y -компоненты акустической волны. Поскольку, как это будет показано ниже, групповые скорости генерируемых акустических импульсов в рамках исследуемых моделей близки к фазовым, ограничение двухпарциальным взаимодействием является оправданным. С учетом этих условий (см. также Введение) далее формально можно положить поперечную компоненту поля равной нулю ($\mathcal{E}_{yz} \equiv 0$).

Считаем, что акустические волны распространяются вдоль оси z . Направление вектора магнитного поля \mathbf{B} в пространстве может быть произвольным. Поскольку вклад во взаимодействие вносит только проекция \mathbf{B} на плоскость xz , считаем без потери общности, что

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2},$$

где B_j — компоненты вектора \mathbf{B} . При этих условиях остаются следующие произвольные действительные эффективные коэффициенты спин-фононной связи:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{B} \sum_{j=x,z} B_j F_{jz,xz}, \\ f_2 &= \frac{1}{B} \sum_{j=x,z} B_j F_{jz,zz}, \\ f_3 &= \frac{1}{B} \sum_{j=x,z} B_j F_{jx,xz}, \\ f_4 &= \frac{1}{B} \sum_{j=x,z} B_j F_{jx,zz}. \end{aligned} \quad (11)$$

В этом и следующем разделах при выводе общей интегрируемой системы уравнений никакие дополнительные ограничения на коэффициенты f_k , $k = 1-4$, накладываться не будут.

С учетом приведенных выше условий выражения для \hat{H}_s и \hat{H}_{int} принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_s &= \int \sum_{\alpha} n \hbar \omega_B \hat{S}_z^{(\alpha)} d\mathbf{r}, \quad (12) \\ \hat{H}_{int} &= \int \sum_{\alpha} \frac{n \hbar \omega_B}{g} \left\{ (f_1 \mathcal{E}_{zz} + f_2 \mathcal{E}_{xz}) \hat{S}_z^{(\alpha)} + \right. \\ &\quad \left. + (f_3 \mathcal{E}_{xz} + f_4 \mathcal{E}_{zz}) \hat{S}_x^{(\alpha)} \right\} d\mathbf{r}, \quad (13) \end{aligned}$$

здесь $\omega_B = g \mu_B B / \hbar$ — частота зеемановского расщепления крамерсовского дублета, $g = \|\hat{g}\|$, n — плотность ионов в среде. Коэффициенты f_k , $k = 1-4$, описывают связь продольного и поперечного акустических полей со спиновой системой, причем первые два из этих коэффициентов отвечают сдвигу частоты, зависящему от амплитуды акустических полей. Физическая природа этого сдвига может быть различна. По аналогии со случаем оптической среды с постоянным дипольным моментом, описанным выше (см. [22]), отличие f_1 от нуля может быть связано с наличием «постоянного магнитного момента» двухуровневой среды. Аналогичный вклад в сдвиг частоты дает механизм, описанный в работе [10].

При указанных выше условиях симметрии гамильтониан H_a принимает вид

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{p_x^2 + p_z^2}{n_0} + \lambda_{11} \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 + \lambda_{44} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \right)^2 \right\} d\mathbf{r}. \quad (14)$$

Здесь для индексов используются обозначения Фохта [18]:

$$xx \rightarrow 1, \quad zz \rightarrow 3, \quad xz \rightarrow 5.$$

Поскольку ангармонические эффекты не учитываются, прямого взаимодействия продольного и поперечного полей между собой нет (оно возникает опосредовано, лишь вследствие их взаимодействия со спиновой системой). Это, а также условие равенства фазовых скоростей (см. ниже), позволяет перейти к новому эффективному поперечному (или «квазипоперечному» [17]) полю — линейной комбинации компонент тензора напряжений, — взаимодействующему с x -компонентой спина (см. гамильтониан (13)):

$$\mathcal{W} = \mathcal{E}_{xz} + \frac{f_4}{f_3} \mathcal{E}_{zz}. \quad (15)$$

С учетом этой замены взаимодействие акустического поля \mathcal{W} со спиновой двухуровневой средой (см. формулу (8)) описывается следующим гамильтонианом:

$$\hat{H}_s + \hat{H}_{int} = \int \frac{n \hbar \omega_B}{g} [\sigma_3 (g + f \mathcal{E}_{zz}) + f_3 \hat{v} \cdot \mathcal{W}] d\mathbf{r}, \quad (16)$$

здесь

$$f = f_2 - \frac{f_1 f_4}{f_3}.$$

Последнему члену в (16) отвечает эффективный магнитный операторный момент $\mu_B \hat{v}$, где

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \quad (17)$$

и $a = f_1 / f_3$ — постоянный магнитный момент.

Используя (8)–(10) и (16), находим уравнения движения для компонент спина \mathbf{S} , описывающего переходы в эффективной двухуровневой среде, возникающей при зеемановском расщеплении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S_z &= \frac{f_3}{\hbar} \mathcal{W} S_y, \\ \frac{\partial}{\partial t} S_y &= \left(\omega_B + \frac{f}{\hbar} \mathcal{E}_{zz} + \frac{f_1}{\hbar} \mathcal{W} \right) S_x - \frac{f_3}{\hbar} \mathcal{W} S_y, \quad (18) \\ \frac{\partial}{\partial t} S_x &= - \left(\omega_B + \frac{f}{\hbar} \mathcal{E}_{zz} + \frac{f_1}{\hbar} \mathcal{W} \right) S_y, \end{aligned}$$

где

$$S_\gamma = \text{Tr} \hat{S}_\gamma^{(a)} \hat{\rho}, \quad \gamma = x, y, z,$$

т. е.

$$S_z = \frac{1}{2} (\rho_{11} - \rho_{22}), \quad S_x = \frac{1}{2} (\rho_{12} + \rho_{21}),$$

$$S_y = \frac{i}{2} (\rho_{12} - \rho_{21}).$$

Легко показать, что

$$S_z^2 + S_x^2 + S_y^2 = (\rho_{11} + \rho_{22})^2 \equiv 1 \quad (19)$$

(здесь длина спина нормирована на единицу). При выводе системы (18) предполагается, что справедливо классическое описание акустического поля (число фононов велико).

Для вывода эволюционных уравнений, описывающих динамику классических полей (линейных комбинаций компонент тензора напряжений) \mathcal{W} и \mathcal{E}_{zz} , вначале получаем волновые уравнения для смещений U , затем дифференцируем их по z и используем выражения для этих полей через дифференциалы от смещений по z , следующие из определения (4). Предполагаем также, что фазовые скорости, отвечающие компонентам смещения U_z и U_x , равны друг другу. В итоге получаем систему эволюционных уравнений для акустических полей с учетом усреднения по квантовым состояниям:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial t^2} - v_1^2 \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial z^2} = \frac{n \hbar \omega_B f_3}{g n_0} \frac{\partial^2 \text{Tr} \hat{v} \hat{\rho}}{\partial z^2}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{zz}}{\partial t^2} - v_2^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{zz}}{\partial z^2} = \frac{2 n \hbar \omega_B f}{g n_0} \frac{\partial^2 S_3}{\partial z^2}, \quad (21)$$

где

$$v_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{11}}{n_0}} = v_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{44}}{n_0}}.$$

В правой части (20)

$$\text{Tr} \hat{v} \hat{\rho} = 2a S_z + 2S_x.$$

Полученная новая система эволюционных уравнений (18)–(21) описывает распространение акустических импульсов в двухуровневой среде. В уравнениях Блоха (18) продольная компонента акустического поля \mathcal{E}_{zz} приводит лишь к нелинейной фазовой модуляции. Однако, как будет показано ниже, продольная компонента связана с поперечной, и ее учет приводит к качественно новой динамике акустического импульса.

3. ВЫВОД ОБЩЕЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ МОДЕЛИ

В этом разделе получим наиболее общую, т. е. возникающую при минимальном числе физических ограничений, интегрируемую редукцию основной системы уравнений (18)–(21). Точнее говоря, мы найдем редукцию выведенной выше физической системы нелинейных уравнений (18)–(21), имеющую представление Лакса, и покажем применимость аппарата МОЗР.

Выше уже предполагалось, что фазовые скорости эффективной продольной и поперечной акустических волн равны:

$$v_1 = v_2 = v.$$

Дополнительные условия интегрируемости будем искать, предполагая, что редукция исходной системы (18)–(21) должна описывать динамику акустических импульсов длительностью порядка или менее $\pi \omega_B^{-1}$. При таком условии неприменимо приближение медленных огибающих. Как было отмечено выше, в реальных средах этому могут отвечать пикосекундные акустические импульсы. Мы пренебрегаем также релаксационными эффектами, что справедливо для выбранного диапазона длительностей импульсов.

Уравнения, описывающие динамику таких импульсов, сложны для анализа, однако остается возможность упрощения системы (20), (21), возникающая при достаточно малой плотности парамагнитных примесей. Отметим, что такая физическая ситуация реализуется во всех известных нам случаях. Это приближение аналогично использованному авторами работы [23] при выводе редуцированных уравнений Максвелла–Блоха для двухуровневой оптической среды и называется условием однонаправленности распространения волн. Последнее условие отвечает следующему приближенному формальному равенству:

$$\partial_z \approx -v^{-1} \partial_t + O(\epsilon),$$

где ϵ — малый параметр. Физически это означает, что акустические импульсы распространяются в среде со скоростью, близкой к фазовой v . Условием выполнения приближения служит то, что нормированная плотность примесей имеет тот же порядок малости, что и производная от амплитуд акустических полей

$$\partial_{\tilde{x}} = \partial_z + v^{-1} \partial_t.$$

В рамках этого приближения производную по z в правых частях уравнений (20), (21) можно с точ-

ностью $O(\epsilon^2)$ заменить на $v^{-1}\partial_t$. Таким образом, при выполнении условия однонаправленности распространения импульсов акустического поля система (20), (21) приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{\chi}} = \frac{n\hbar\omega_B f_3}{2v^2 n_0 g} \frac{\partial \text{Tr}(\hat{v}\hat{\rho})}{\partial t}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{zz}}{\partial \tilde{\chi}} = \frac{n\hbar\omega_B f}{v^2 n_0 g} \frac{\partial S_3}{\partial t}. \quad (23)$$

Здесь выбрано $f \neq 0$. Случай $f \rightarrow 0$ обсуждается в Приложении. При вычислении производных по t учитываем уравнения Блоха (18) и приводим уравнения (22) и (23) к виду

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{\chi}} = -\frac{n\hbar\omega_B f f_3}{v^2 n_0 g} \left(\frac{\hbar\omega_B}{f} + \mathcal{E}_{zz} \right) S_y, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{zz}}{\partial \tilde{\chi}} = \frac{n\hbar\omega_B f f_3}{v^2 n_0 g} \mathcal{W} S_y. \quad (25)$$

Теперь из (24) и (25) легко найти, что амплитуды продольного и эффективного поперечного полей связаны простым соотношением:

$$\mathcal{W}^2 + \left(\mathcal{E}_{zz} + \frac{\omega_B \hbar}{f} \right)^2 = U_0^2(t). \quad (26)$$

Здесь произвольная действительная функция $U_0(t) \neq 0$ определяется граничными условиями. Зависимость U_0 от t приводит лишь к перенормировке переменной t и функций $\mathcal{E}_{zz}, \mathcal{W}$. Из (26) следует, что $\forall t U_0(t) \neq 0$ и можно использовать аппарат МОЗР, развитый для бесконечного интервала. С другой стороны, формирование акустических солитонов и других когерентных структур может происходить в кристаллах толщиной меньше миллиметра [4]. Поэтому нетрудно создать условия, в которых интервал, на котором

$$U_0(t) \neq \frac{\omega_B \hbar}{f},$$

много больше характерных интервалов времени образования солитонов и прочих нелинейных структур.

С учетом (26) получаем из (18), (24) и (25) новую интегрируемую систему эволюционных уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_\chi E &= -b U S_y, \\ \partial_\tau S_y &= (a E + b U) S_x - E S_z, \\ \partial_\tau S_x &= -(a E + b U) S_y, \\ \partial_\tau S_z &= E S_y. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь все функции действительны и

$$E(\chi, \tau) = \frac{\mathcal{W}(\chi, \tau)}{U_0(t)}, \quad U^2(\chi, \tau) + E^2(\chi, \tau) = 1,$$

$$\chi = \tilde{\chi} \frac{n\omega_B f_3}{g n_0 v^2}, \quad \tau = \frac{f_3}{\hbar} \int_0^t U_0(t') dt', \quad b = \frac{f}{f_3}.$$

Представления этой системы в виде условия совместности двух линейных систем с произвольным (спектральным) параметром приведены в Приложении. Там же отмечается, что система (27) достаточно сложна для применения МОЗР, и поэтому в настоящей работе мы ограничимся исследованием ее физически интересной редукции, возникающей, если положить $a = 0$. По-видимому, эта редукция отвечает также новой интегрируемой системе уравнений.

4. АППАРАТ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЙНИЯ ДЛЯ $a = 0$

Условие $a = 0$ означает, что вклад эффективного поперечного акустического поля в частотную модуляцию компоненты матрицы плотности ρ_{12} не учитывается. Такая физическая ситуация возникает, если координаты x, z вдоль главных осей тензора Ланде совпадают с осями симметрии кристалла. При этом в недеформированной невозмущенной среде тензор Ланде диагонален. Предполагается, что магнитное поле \mathbf{B} направлено по оси z , т. е. вдоль оси распространения акустических волн.

Будем решать задачу на всей оси для достаточно быстро затухающего на бесконечностях поля:

$$E(\tau) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \pm\infty.$$

Предполагаем, что спиновая система в начальный и конечный моменты находится в основном устойчивом состоянии, отвечающем минимуму энергии, т. е.

$$S_z(\tau, \chi) = -1, \quad \tau \rightarrow \pm\infty.$$

Считаем, что в кристалл вводится импульс акустического поля $E(\tau, 0)$ с достаточно большой для образования солитонов площадью. Для описания соответствующей солитонной динамики удобно выбрать следующее представление Лакса для системы уравнений (27) при $a = 0$:

$$\partial_\tau \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda U & (\lambda + \beta)E \\ -(\lambda - \beta)E & i\lambda U \end{pmatrix} \Phi = \hat{L}_0 \Phi, \quad (28)$$

$$\partial_\chi \Phi = \frac{b}{b^2 - 4\lambda^2} \times \begin{pmatrix} -i\lambda S_z & (\lambda + \beta)(bS_x - 2i\lambda S_y) \\ (\beta - \lambda)(2i\lambda S_y + bS_x) & i\lambda S_z \end{pmatrix} \Phi = \hat{A}_0 \Phi, \quad (29)$$

здесь

$$U^2 + E^2 = 1, \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - 1},$$

λ — спектральный параметр.

Спектральная проблема (28) для действительных полей может рассматриваться как родственная проблемам для комплексных полей, возникающим при решении в рамках МОЗР интегрируемых уравнений Ландау–Лифшица [24], а также уравнений комбинационного рассеяния или четырехволнового смещения [25]. Аппарат МОЗР для этих задач развит достаточно детально. Для указанных родственных моделей найдены солитонные и периодические решения. В работе [26] найдено выражение, определяющее квазиавтомодельную асимптотику, описывающую распад начального неустойчивого состояния. С учетом специфики, обусловленной действительностью поля E и симметрией задачи, эти результаты могут быть использованы для модели (28) после необходимой модификации.

Решения спектральной задачи (28) обладают следующей инволюцией:

$$\Phi = \widehat{M} \Phi(\lambda^*)^* \widehat{M}^{-1}, \quad (30)$$

где

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa = \begin{cases} \frac{\lambda + \beta}{\lambda - \beta}, & |b| > 1, \\ 1, & |b| \leq 1. \end{cases} \quad (31)$$

При нахождении солитонных решений следует определить устойчивое основное состояние системы, на фоне которого распространяются солитоны. Рассмотрим режим, в котором асимптотики $\tau \rightarrow \pm\infty$ отвечают устойчивым основным состояниям, соответствующим нулевому полю $E(\chi, \tau) = 0$. Эти состояния различны для разных $|b|$. Нетрудно показать, что в линейном приближении устойчивыми являются следующие основные состояния системы:

$$E = 0, \quad S_3 = \pm 1, \quad S_+ = 0, \quad S_- = 0, \quad |b| > 1, \quad (32)$$

$$E = 0, \quad S_3 = -1, \quad S_+ = 1, \quad S_- = 0, \quad |b| < 1, \quad (33)$$

$$ES_3 = -S_+U, \quad S_- = 0, \quad |b| = 1. \quad (34)$$

В случае $|b| = 1$ основное состояние (34) безразлично устойчиво.

Для потенциала, исчезающего на бесконечностях ($\tau = \pm\infty$), стандартным способом вводим функции Йоста Ψ^\pm (решения (28) с асимптотиками):

$$\Psi^\pm = \exp(-i\lambda\sigma_3\tau), \quad \tau \rightarrow \pm\infty, \quad |b| < 1, \quad (35)$$

$$\Phi^\pm = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\xi}{\beta - \lambda} \\ \frac{\xi}{\beta + \lambda} & 1 \end{pmatrix} \exp(-i\lambda\sigma_3\tau), \quad \tau \rightarrow \pm\infty, \quad |b| > 1. \quad (36)$$

Свойство симметрии (30), (31) отвечает следующей матричной форме функций Йоста:

$$\Psi^\pm = \begin{pmatrix} \psi_1^\pm & -\psi_2^{\pm*} \kappa \\ \psi_2^\pm & \psi_1^{\pm*} \end{pmatrix}.$$

Эти решения связаны матрицей рассеяния \hat{T} :

$$\Psi^- = \Psi^+ \hat{T}. \quad (37)$$

Из свойств симметрии (30), (31) следует, что матрица рассеяния может быть выбрана в виде

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^* & \mathcal{B}\kappa \\ -\mathcal{B}^* & \mathcal{A} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Функции Йоста имеют стандартные аналитические свойства (ср., например, [27]). Функция $a(\lambda)$ голоморфна в верхней полуплоскости λ , где ее нули отвечают солитонным решениям.

Представим функции Йоста в виде

$$\Psi^+(\tau) = \exp(-i\lambda\sigma_3\tau) + \int_\tau^\infty \begin{pmatrix} \lambda K_1(\tau, s) & (\lambda + \beta) K_2(\tau, s) \\ -(\lambda - \beta) K_2^*(\tau, s) & \lambda K_1^*(\tau, s) \end{pmatrix} \times \exp(-i\lambda\sigma_3 s) ds. \quad (39)$$

Из системы (37) следует

$$\psi_1^{+*} = \frac{\psi_1^{-*}}{\mathcal{A}} - \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \kappa \psi_2^+, \quad (40)$$

$$\psi_2^{+*} = -\frac{\psi_2^{-*}}{\mathcal{A}} + \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \psi_1^+. \quad (41)$$

Подставляем компоненты этих функций из (39) в (40) и (41) и интегрируем полученные в результате подстановки уравнения (40) по λ от $-\infty$ до ∞ с весом $\exp(-i\lambda y) [2\pi(\lambda - \beta)]^{-1}$ и (41) с весом $\exp(-i\lambda y) (2\pi\lambda)^{-1}$. В итоге получаем уравнения Марченко для правого конца оси ($y \geq \tau$):

$$K_2^*(\tau, y) = F_\beta(\tau + y) + i \int_\tau^\infty K_1(\tau, s) i \partial_y F_\beta(s + y) ds, \quad (42)$$

$$K_1^*(\tau, y) = - \int_\tau^\infty K_2(\tau, s) (\pm\beta + i\partial_y) F_0(s + y) ds. \quad (43)$$

В правой части (43) знак «+» перед β отвечает $b^2 > 1$, а знак «-» отвечает $b^2 < 1$. Ядро F_β определено следующим образом:

$$F_\beta(y) = \int_C \frac{B(\chi)}{A(\chi)} \frac{e^{-i\lambda y}}{2\pi(\lambda - \beta)} d\lambda, \quad (44)$$

где C — контур, включающий действительную ось и проходящий выше всех полюсов в верхней половине комплексной плоскости, $F_0 = F_\beta(\beta = 0)$.

С учетом вычетов в полюсах λ_k , находящихся в верхней полуплоскости, ядро F_0 можно представить в виде

$$F_\beta(y) = \int_{-\infty}^\infty \frac{B}{A} \frac{e^{-i\lambda y}}{2\pi(\lambda - \beta)} d\lambda - i \sum_k \frac{B}{\partial_\lambda A(\lambda = \lambda_k)} \frac{e^{-i\lambda_k y}}{\lambda_k - \beta}. \quad (45)$$

Аналогичным образом можно найти уравнения Марченко для левого конца оси (для $y \leq \tau$), после этого, используя полученные ниже результаты, нетрудно показать, что соответствующие решения сшиваются при $y = \tau$ (детальнее см. в [27]).

Подставив выражение для Ψ^+ (39) в спектральную задачу (28) и приравняв выражения для разных степеней λ , находим, в частности, следующее соотношение:

$$K_2(\tau, \tau) [1 + U(\tau)] = E(\tau) [1 - iK_1(\tau, \tau)], \quad (46)$$

применяя которое, нетрудно найти связи между потенциалом F_3 и ядрами $K_{1,2}$ в виде

$$E(\tau) = \frac{2[1 - iK_1(\tau, \tau)] K_2^*(\tau, \tau)}{[1 + iK_1^*(\tau, \tau)][1 - iK_1(\tau, \tau)] + |K_2(\tau, \tau)|^2}. \quad (47)$$

4.1. Односолитонное решение модели для $|b| < 1$

Солитонные решения, ассоциируемые с АСИП, описывают распространение акустических импульсов без изменения формы на фоне устойчивого основного состояния. Таким состоянием для системы (28) при $|b| < 1$ является (33). Условие действительности поля E приводит к ограничениям на параметры солитона. В частности, дискретные собственные значения должны быть либо мнимыми, либо входить в виде антисопреженных пар $\{\lambda, -\lambda^*\}$.

Найдем односолитонное решение задачи, ассоциированное с единственным собственным значением λ . Представим ядро F , отвечающее этому значению $\lambda = i\eta$, в виде

$$F_\beta(y) = \frac{iC_1(\chi) \exp(-i\lambda y)}{\eta - \beta_0}. \quad (48)$$

Здесь

$$\beta = i\beta_0, \quad \text{Im}\beta_0 = 0.$$

Зависимость действительной величины

$$C_1 = \frac{B(\chi; \lambda)}{\partial_\eta A(\chi; \eta)} \Big|_{\eta=\lambda}$$

от χ найдена ниже.

Для решения уравнений Марченко вводим новые функции:

$$Q_n(\tau) = \int_\tau^\infty K_n(\tau, s) e^{-i\lambda s} ds, \quad n = 1, 2.$$

Подставляя эти функции в уравнения Марченко (43), (44) и интегрируя по y , находим в итоге

$$K_1(z, z) = \frac{-i|\gamma_1|^2 \exp(4\eta z)}{2\eta^2 [1 + |\gamma_1(\chi)|^2 \exp(4\eta z)]}, \quad (49)$$

$$K_2(z, z) = \frac{C_1 \exp(2\eta z)}{(\eta - \beta_0) [1 + |\gamma_1(\chi)|^2 \exp(4\eta z)]}, \quad (50)$$

где обозначено

$$\gamma_1(\chi) = \frac{C_1(\chi)}{2\eta}.$$

Далее необходимо найти зависимость $C_0(\chi)$, которая определяется из системы (29) для

$$S_z(\pm\infty, \chi) \equiv -1, \quad E(\pm\infty, \chi) = 0.$$

В более общем случае для временного интервала $[\tau_0, \infty)$ зависимость находится с помощью формулы (см. [26], а также вывод в книге [27])

$$\partial_\chi \hat{T} = -\hat{T} \hat{V}_0 \hat{A}_s(\tau_0, \chi) \hat{V}_0^{-1} + \hat{V}_\infty \hat{A}_s(\infty, \chi) \hat{V}_\infty^{-1} \hat{T}. \quad (51)$$

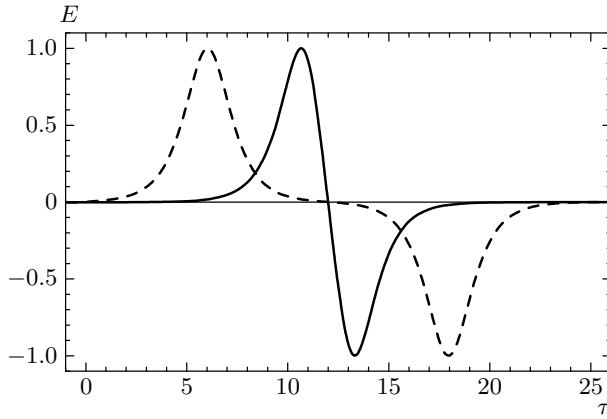


Рис. 1. Зависимость амплитуды эффективной поперечной компоненты акустического импульса E от τ . Сплошная линия — $b = 0.9$, штриховая линия — $b = 0.1$, $\eta = 0.5$. Положение солитона на оси τ произвольно

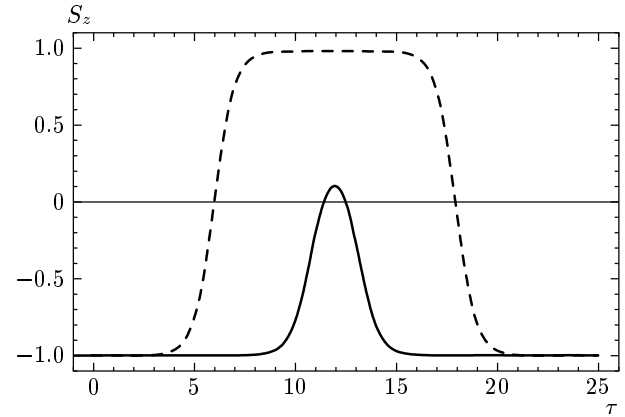


Рис. 2. Зависимость разности заселенностей уровней от τ в случае солитонного режима. Сплошная линия — $b = 0.9$, штриховая линия — $b = 0.1$

Здесь $\widehat{V}_0, \widehat{V}_\infty$ — матрицы, составленные из собственных векторов — решений задачи (27), найденных соответственно в начальный момент τ_0 и для $\tau = \infty$.

Пусть

$$E(\tau, 0) = 0, \quad \tau = \tau_0, \infty,$$

тогда

$$\widehat{V}_0 = \widehat{V}_+ = \exp(-i\sigma_3 \lambda \tau), \quad \tau = \tau_0, \infty.$$

Отсюда для выбранных начальных и граничных условий, отвечающих солитонной динамике, находим

$$\gamma_1(\chi) = \gamma_0 \exp\left(\frac{-2b\chi\eta}{4\eta^2 + b^2}\right), \quad (52)$$

где γ_0 — константа. Применяя (47), (49), (50) и (52), находим односолитонное решение модели (28) для $a = 0$ в виде

$$E(\tau, \chi) = \frac{4\gamma_0\eta(\eta - \beta_0)(1 + |\gamma_0|^2 e^{2\phi}) e^\phi}{(\eta - \beta_0)^2 [1 + |\gamma_0|^2 e^{2\phi}]^2 + (2|\gamma_0|\eta)^2 e^{2\phi}}, \quad (53)$$

где

$$\phi = 2\eta \left(\tau - \frac{b\chi}{b^2 + 4\eta^2} \right).$$

Из решения (53) видно, что форма и скорость солитона зависят от коэффициента b . С ростом b скорость солитона уменьшается, стартуя с фазовой скорости в среде v . При $b \sim 2\eta$ скорость достигает минимума и затем вновь стремится к фазовой. На рис. 1 показаны зависимости амплитуды солитона $E(\tau)$ для разных значений параметра b . Из рисунка видно, что форма $E(\tau)$ имеет провал до нуля в

центре. С уменьшением b происходит разбиение на солитон и антисолитон, расстояние между которыми стремится к бесконечности при $b \rightarrow 0$. Из формулы (50) следует также, что нормированная амплитуда солитона не превышает единицы. В этом важное отличие динамики акустического поля в данной модели от изученной, например, в работе [5]. Полученное солитонное решение (53) описывает перекачку энергии между продольной и поперечной компонентами поля, вызванную взаимодействием со спиновой системой. На рис. 2 показана зависимость разности заселенностей уровней от τ .

4.2. Распад инвертированного начального состояния спиновой системы

Полностью инвертированная спиновая система неустойчива и после действия слабого возмущения стремится к устойчивому основному состоянию. Такая динамика в нелинейных двухуровневых оптических средах описывается решением, выходящим на автомодельную асимптотику. В работе [26] показано, что асимптотика полей в случае комбинационного рассеяния для довольно общих начально-краевых условий описывается комплексным дифференциальным уравнением первого порядка с правой частью, пропорциональной известной функции. Эта функция выражается через решения трансцендентного уравнения Пенлеве третьего типа (P_{III}) [28]. Решение отвечает несолитонной, радиационной динамике, ассоциированной с непрерывным спектром соответствующей спектральной задачи. Следуя результатам работы [26], можно показать, что такая динамика характерна для произвольных зна-

чений $S_\gamma(\chi, 0)$, медленно меняющихся с χ , и достаточно малого импульса затравочного акустического поля $|E(\tau, 0)| \ll 1$. Для таких малых амплитуд поля и его производных нетрудно найти коэффициент рассеяния

$$\rho(\chi; \lambda) = \frac{B(\chi; \lambda)}{A(\chi; \lambda)}$$

при $\chi = 0$, используя спектральную задачу (28):

$$\rho(0; \lambda) = \rho_0 = \frac{B(0; \lambda)}{A(0; \lambda)} \approx \frac{-\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(\tau, 0) e^{2i\lambda\tau} d\tau. \quad (54)$$

Пусть $E(\tau, 0) = \text{const}$, тогда коэффициент рассеяния ρ_0 не зависит от λ .

Будем решать «начальную» (для $\chi = 0$) задачу с тривиальными граничными условиями, отвечающими неустойчивому при $\tau = 0$ состоянию (полной инверсии) и малой (затравочной) акустической деформации кристалла:

$$|E(\tau, 0)| = \text{const} \ll 1, \quad S_z(0, \chi) = 1. \quad (55)$$

Затравочное поле $E(\tau, 0)$ вызывает распад этого состояния, и система стремится к устойчивому состоянию:

$$E = 0, \quad S_z(0, \chi) = -1,$$

которое достигается при $\chi \rightarrow \infty$.

Коэффициент рассеяния $\rho_0(\chi)$ зависит от λ . Вычислим ядро F (45) с учетом зависимости данных рассеяния от χ и условий (55), т. е. без учета дискретного спектра. Для начально-краевых условий (55) достаточно учесть вклад только непрерывного спектра задачи. Зависимость $\rho(\chi)$ определяется с помощью выражения (51) и имеет вид

$$\rho(\chi) = \rho_0 \exp\left(\frac{2ib\chi\lambda}{b^2 - 4\lambda^2}\right). \quad (56)$$

Теперь найдем линейное решение задачи, отвечающее начальной стадии распада инвертированного состояния и образования фононной лавины. Ниже будет показано, что основной вклад в решение вносит область больших $|\lambda|$, поэтому считаем, что $4|\lambda^2| \gg b^2$. Для вычисления ядер вводим в правой части выражения (45) новую переменную интегрирования

$$\lambda = \frac{i\nu}{2\sqrt{b\chi/\tau}}$$

и приводим его к виду

$$F_\beta(\chi, \tau) = \frac{\rho_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[(\vartheta/2)(\nu - 1/\nu)]}{\nu - 2\beta_0\sqrt{\tau/b\chi}} d\nu \approx i\rho_0 \left[I_0(\vartheta) + 2\beta_0\sqrt{\frac{\tau}{b\chi}} I_1(\vartheta) + \dots \right], \quad (57)$$

где $I_{0,1}$ — модифицированные функции Бесселя и $\vartheta = \sqrt{4b\chi\tau}$. Было использовано предположение, что

$$4\beta_0\sqrt{\tau/b\chi} \ll 1.$$

Из (42), (47) и (57) следует, что на линейной стадии происходит рост амплитуды поля:

$$E(\chi, \tau) \approx 2K_2(\chi, \tau, \tau) \approx 2F_\beta(\chi, 2\tau) \sim \rho_0 e^\vartheta. \quad (58)$$

Другой вывод, следующий из полученных выражений для ядра (57), состоит в том, что решение для акустического поля сосредоточено для малых ρ_0 , таких, что $-\ln|\rho_0| \gg 1$, в области $\vartheta \gg 1$. В этой области интегралы, входящие в уравнения Марченко (41), (43), могут быть вычислены приближенно методом перевала. Из уравнений Марченко следует, что ядра $K_{1,2}$ экспоненциально растут на начальной стадии с ростом τ , т. е. решение для $|E|$ может достигать значений порядка единицы для произвольно малых амплитуд затравочного поля $E(0, \tau)$.

Полная спиновая инверсия может быть достигнута применением достаточно сильного лазерного излучения [13]. Более общей ситуации отвечает неполная начальная инверсия среды, т. е.

$$-1 < S_z(0, \chi) < 1.$$

В этом случае возникает смешанная начально-краевая задача на полуоси ($\tau \in [0, \infty)$), решение которой намного сложнее случаев, когда $S_z(0, \chi) = \pm 1$. Для некоторых нелинейных систем уравнений такая задача была решена в случае, отвечающем $E(\tau, 0) = 0$ (задача Дирихле, [26, 29], см. также метод решения более общей задачи в работах [30, 31]).

Используя результаты работы [26], найдем асимптотическое решение задачи Дирихле, применимое для описания динамики фононной или спиновой лавин, возникающих при следующих начально-краевых условиях:

$$\begin{aligned} S_z(0, \chi) &\equiv S_z(0, 0) = S_x^{(0)}, \\ S_x(0, \chi) &\equiv S_x(0, 0) = S_x^{(0)}, \\ S_y(0, \chi) &\equiv 0, \quad E(\tau, 0) \equiv 0. \end{aligned} \quad (59)$$

С этой целью, следуя работе [26], сведем спектральную проблему (28) к проблеме Захарова–Шабата [3] простым калибровочным преобразованием вида

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \hat{D}^{-1}\Phi, \quad \hat{L}_0 \rightarrow \hat{D}\hat{L}_0\hat{D}^{-1} - \hat{D}\partial_\tau\hat{D}^{-1}, \\ \hat{D} &= \hat{I}\cos(v/2) + i\hat{\sigma}_1\sin(v/2). \end{aligned} \quad (60)$$

Здесь \hat{I} , $\hat{\sigma}_1$ — соответственно, единичная матрица и матрица Паули. Мы ввели следующие обозначения:

$$E = \sin v, \quad U = \cos v.$$

Преобразование (60) сводит спектральную проблему (28) к виду

$$\partial_z\Psi = \begin{pmatrix} -i\lambda & V \\ -V^* & i\lambda \end{pmatrix} \Psi \equiv L_1\Psi, \quad (61)$$

$$V(\chi, \tau) = \frac{i}{2} \left(\sqrt{1-b^2} \sin v + \partial_\tau v \right), \quad (62)$$

где считаем, что $b^2 < 1$. Решение задачи свелось к исследованию более простой спектральной проблемы и восстановлению E по известному решению $V(\tau, \chi)$ с помощью (62).

Уравнения Марченко для задачи Захарова–Шабата хорошо известны (детальнее см. в [3]). Для справки они приведены в Приложении. Для произвольно инвертированной в начальный момент среды ($S_x^{(0)} \neq 0$) коэффициент рассеяния $\rho(\chi)$ и ядра, входящие в уравнения Марченко, могут быть вычислены асимптотическим методом, предложенным в работе [26]. Чтобы определить зависимость данных рассеяния от χ с помощью формулы (51), следует найти значения матрицы

$$\hat{A}'_0(\tau) = \hat{V}_\tau \left(\hat{D}\hat{A}_0\hat{D}^{-1} - \hat{D}\partial_\tau\hat{D}^{-1} \right) \hat{V}_\tau^{-1} \quad (63)$$

на концах интервала ($\tau = 0, \infty$). В работе [26] показано, что вклад в радиационное асимптотическое решение определяется большими значениями $|\lambda| \gtrsim |\lambda_a|$, т.е. в рассматриваемом случае $|\lambda_a| \gg b, \sqrt{1-b^2}/2$. Для такой асимптотики и условий (59) компоненты матрицы \hat{A}'_0 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} [A'_0(0)]_{11} &= -[A'_0(0)]_{22} \approx \frac{ibS_z^{(0)}}{4\lambda}, \\ [A'_0(0)]_{21} &= -[A'_0(0)]_{12} \approx \frac{bS_x^{(0)}}{4\lambda}, \\ [A'_0(\infty)]_{11} &= -[A'_0(\infty)]_{22} = \frac{-ib}{4\lambda}, \\ [A'_0(\infty)]_{21} &= [A'_0(\infty)]_{12} = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Такие граничные условия приводят к появлению бесконечной серии полюсов $\rho(\chi)$, положение которых зависит от χ . Для определения решения при не малых χ следует найти суммарный вклад всех этих полюсов. Для достаточно больших χ ядра F_r , входящие в уравнения Марченко (76), (77), вычисляются асимптотически так же, как это сделано в [26] для другой задачи. Используя результаты работы [26], после некоторой модификации, связанной с значениями матрицы \hat{A}'_0 в нуле, легко показать, что для условий (59) и больших χ ядро F_r имеет вид

$$F_r(\tau + \tau', \chi) = \frac{2\chi b |S_x^{(0)}|}{\theta' \left[\Omega_0 + |S_z^{(0)}| \right]^2} I_1(\theta'), \quad (65)$$

где

$$\theta' = \sqrt{2(\tau + \tau')b\chi}, \quad \Omega_0 = \left[1 - S_x^{(0)2} (1 - b^2) \right]^{1/2},$$

I_1 — функция Бесселя. Это ядро отвечает условию

$$\pi/2 > \alpha_0 > \pi/4, \quad S_x^{(0)} = \sin \alpha_0.$$

Для $\pi/4 \geq \alpha_0 > 0$ следует заменить $I_1 \rightarrow J_1$.

Для такого ядра в работе [26] найдено решение уравнений Марченко (76), (77) и явное решение для $V(\tau, \chi)$, состоящее из набора осцилляций, затухающих с ростом χ . Это решение с точностью до множителя χ является автомодельным, зависящим от переменной $\theta = 2\sqrt{b\tau\chi}$.

В пределе $b \rightarrow 1$ асимптотическое решение для амплитуды акустической волны описывается уравнением

$$\partial_\tau v = \frac{8b\chi}{\theta} \mathcal{B}(\theta), \quad (66)$$

где $\mathcal{B}(\theta)$ — автомодельное решение уравнения синус-Гордон

$$\left(\frac{d}{d\theta} \right)^2 \mathcal{B} + \frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} \mathcal{B} = \sin \mathcal{B}(\theta) \quad (67)$$

с начальными условиями

$$\mathcal{B}(0) = S_x^{(0)}, \quad \left. \frac{d\mathcal{B}(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0.$$

Это автомодельное решение выражается через решение R_{III} известным образом [28].

Результаты численного решения исходной системы для условий (59) приведены на рис. 3. Эти результаты и анализ асимптотик исходной системы уравнений и решений (66) показывают, что общее решение состоит из пакета затухающих нелинейных

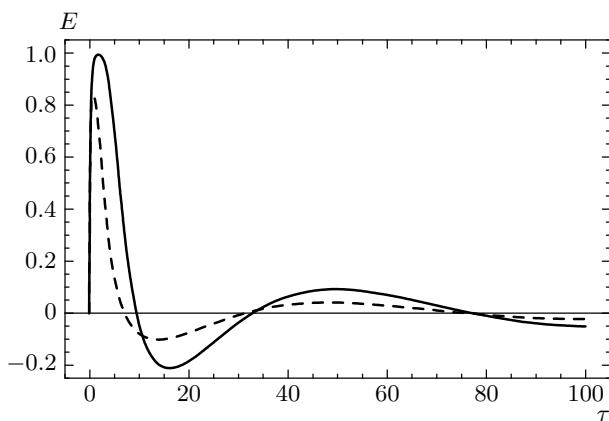


Рис. 3. Зависимость амплитуды акустического импульса E от τ для неполной начальной инверсии среды $S_x^{(0)} = \sin(\pi/2.7)$. Сплошная линия — $b = 0.9$, штриховая линия — $b = 0.1$, $\eta = 0.5$

пульсаций с растущей длительностью. В реальных средах релаксационные и дифракционные процессы приводят к существенному относительному подавлению амплитуд осцилляций по сравнению с передним фронтом. Поэтому на практике часто бывает достаточно найти выражение для первой нелинейной осцилляции. Полученное решение демонстрирует, что асимптотика (при больших χ) носит несолитонный характер и характеризуется автомодельной переменной $\sqrt{b\chi\tau}$. Это решение для амплитуды акустической волны описывает фоновую лавину и лавинный переход спиновой системы в устойчивое состояние.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ИХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

В работе изучалась динамика акустических импульсов длительностью близкой ω_B^{-1} в рамках интегрируемых редукций эволюционных уравнений. Эти системы уравнений описывают эволюцию продольно-поперечных волн, распространяющихся вдоль направления магнитного поля в среде примесных ионов с эффективным спином $1/2$. При изучении когерентной динамики акустических импульсов применялось только условие равенства фазовых скоростей продольной и поперечной волн и приближение однонаправленности распространения акустической волны. Это позволило найти интегрируемую модель, отвечающую наиболее общей физической ситуации для рассмотренной геометрии взаимодействия. Отметим, что, с другой стороны, для наблюдения по-

ведения поля, описанного в настоящей работе, требуются более мягкие физические условия, чем в моделях, построенных и изученных в других работах, например в [7], поскольку модели настоящей работы могут быть применены при более высоких температурах и более низких значениях магнитного поля.

Солитонная динамика, ассоциируемая с АСИП, в чистом виде для своего наблюдения требует создания на границе среды достаточно мощного импульса с формой, близкой к солитонной. С другой стороны, как показано выше, если спиновая система первоначально частично или полностью инвертирована и находится в неустойчивом состоянии, то решение, описывающее переход к устойчивому состоянию, носит несолитонный характер. Похожая динамика фононов наблюдалась в серии экспериментов, проведенных авторами работ [13, 14]. В этих работах исследовалась стимулированная эмиссия резонансных акустических фононов, вызванная распадом начальной инверсии заселенностей в системе крамерсовских дублетов $\tilde{E}(^2E)$ примесных ионов Cr^{3+} , находящихся в рубине (Al_2O_3). Внешнее магнитное поле, равное по величине приблизительно 3.48 Тл, приводило к зеемановскому расщеплению дублета. Кристалл находился при температуре 1.8 К. Начальная инверсия заселенностей уровней, т. е. спиновая инверсия, вызывалась накачкой лазера на длине волны 693 нм. В этих работах обнаружено, что для достаточно большой эффективной длины инвертированной среды возникает немонотонная зависимость заселенности нижнего уровня от времени. Такого рода динамика поля может быть описана в рамках модели (27) при начальном условии (59). В работах [13, 14] этот эффект, называемый «фононной лавиной», объясняется с использованием аналогии между динамикой поперечных акустических волн и динамикой фотонов при оптическом сверхизлучении для квазимонохроматических волн. Результаты настоящей работы показывают, что аналогичная фононная лавина может наблюдаться для акустических импульсов длительностью близкой ω_B^{-1} и в более общем случае, отвечающем продольно-поперечной волне и при неполной инверсии.

Полученные в настоящей работе новые интегрируемые модели могут найти применение и в других областях физики, например, в системах с пространственно локализованными электронами. Рассмотрим фононо-индуцированный переход с изменением ориентации электрона между зеемановскими подуровнями в системе квантовых точек в GaAs. В работе [32] оценивается скорость такого перехода для различных механизмов спин-орбитального

взаимодействия. Показано, что спин-решеточная релаксация для электронов, локализованных в квантовых точках, много меньше, чем для свободных электронов. Для достаточно большой величины приложенного магнитного поля вклад спин-фононного взаимодействия может быть существен. В работе [32] показано, что для длины волны фонона много большей, чем размеры одной квантовой точки ($g_0 \mu_B B \ll \sqrt{mv^2 \hbar \omega_0}$, где v — скорость звука и m — масса электрона, $\hbar \omega_0$ — типичное расстояние между орбитальными уровнями в квантовой точке), спин-фононное взаимодействие описывается гамильтонианом, аналогичным (13). Учитывая эволюцию продольно-поперечной звуковой волны в системе таких квантовых точек и следуя приведенным выше предположениям, приходим к системе, аналогичной (27). Поскольку пикосекундная длительность акустического импульса отвечает его предельной длине $l_s \sim 10^{-7}$ см, а формирование акустического солитона возможно на нескольких длинах l_s , для таких масштабов эволюции учет когерентной динамики фононов может быть важен для управления поведением электронов в ансамбле квантовых точек.

Анализ солитонного решения (53) показывает, что в случае продольно-поперечной волны временная зависимость направления спина зависит от относительного вклада продольной волны. Связь между E и S_z для однофазного солитонного решения легко находится из системы (27). Для решения (53) и условий при $\tau \rightarrow -\infty$ находим, что

$$S_z = S_z(-\infty, \chi) - \frac{U}{b^2 + 4\eta^2}, \quad (68)$$

$$S_z(-\infty, \chi) = \frac{1}{b^2 + 4\eta^2} - 1.$$

Зависимости $S_z(\tau)$ для разных b показаны на рис. 2.

Приведем еще один пример физической ситуации, для описания которой могут быть использованы качественные результаты, полученные выше. Релаксация магнитных спинов из инвертированного начального состояния в конечное (устойчивое) в присутствии магнитного поля при низких температурах (1–5 К) может сопровождаться упругими деформациями кристалла [33]. Для описания такого спин-фононного взаимодействия можно использовать гамильтониан, аналогичный \hat{H}_{int} (13). Это взаимодействие приводит к образованию «спин-фононной лавины» [33], которая наблюдалась в экспериментах, связанных с изучением распада намагниченности Mn_{12} в присутствии магнитного поля и при температурах 1.9–5 К. В

отличие от рассмотренной выше модели, приводящей к двухуровневой среде, ситуация, исследованная в [33], отвечает многоуровневой (точнее, 21-подуровневой) среде. В этом случае каскадные переходы (или, следуя терминологии работы [33] — туннелирование, вызванное фононами) между подуровнями могут быть описаны в квазиклассическом приближении в рамках модели адиабатически изменяющегося спина. Поскольку рассматривается временной диапазон акустических импульсов, отвечающий спектральному диапазону, включающему все переходы между подуровнями, эффективный гамильтониан спин-фононного взаимодействия будет в этом приближении иметь вид, близкий к (10). Некоторые качественные результаты, полученные выше, могут быть использованы для объяснения динамики спинов в такой многоуровневой среде с каскадным туннелированием, например, поведения системы при распаде инвертированного состояния.

В то же время при качественной замене в адиабатическом приближении каскадного перехода двухуровневой средой не учитывается сглаживание осциллирующей структуры «хвоста» фононной лавины. Действительно, время образования переднего фронта лавины определяется начальной флуктуацией (шумом), к которому система малочувствительна. Точнее, задержка переднего фронта определяется логарифмом площади затравки (пропорционально $\ln \rho_0$, ср. с (57)). С другой стороны, за время порядка длительности первого импульса набегают разность фаз порядка π между генерируемыми на разных переходах импульсами, поскольку константы связи между фононами и разными туннельными переходами существенно (в разы) различаются. Как следствие, формы генерируемых фононной и спиновой лавин должны состоять из одного мощного импульса. Последующие импульсы, которые должны были бы наблюдаться в двухуровневой среде, подавляют друг друга. Такая картина наблюдалась в экспериментах, выполненных авторами работы [33].

В настоящей работе не принимались во внимание нелинейные эффекты, связанные с наличием ангармонизма кристаллической решетки. Они могут быть включены в найденные выше интегрируемые модели в виде дополнительных возмущающих членов.

В заключение автор выражает признательность Е. В. Подивилу за плодотворные дискуссии затронутых в работе физических проблем. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-16297).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представление Лакса для системы уравнений (27) имеет вид

$$\partial_\tau \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda U & G\left(\frac{a}{b}ZU+E\right) \\ \tilde{G}\left(\frac{a}{b}ZU+E\right) & i\lambda U \end{pmatrix} \Phi, \quad (69)$$

$$\partial_\chi \Phi = \begin{pmatrix} iY\lambda b(-S_z+aS_x) & A_{12} \\ A_{21} & iY\lambda b(S_z-aS_x) \end{pmatrix} \Phi, \quad (70)$$

где $U^2 + E^2 = 1$, λ — спектральный параметр,

$$A_{12} = G[aYZS_z + (1 + 4\lambda^2 Y)S_x - i2Yb\lambda S_y],$$

$$A_{21} = \tilde{G}[aYZS_z + (1 + 4\lambda^2 Y)S_x + i2Yb\lambda S_y],$$

$$Y =$$

$$= \frac{-2}{4\lambda^2 - 1 - a^2 - b^2 + \sqrt{(4\lambda^2 + 1 + a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}},$$

$$\partial_\tau \Phi = \begin{pmatrix} -i\frac{B_+ \operatorname{cn}(\xi, k) \operatorname{dn}(\xi, k)}{\sqrt{8} \operatorname{sn}(\xi, k)} U & \frac{ab}{\sqrt{2} B_- \operatorname{sn}(\xi, k)} U + \frac{B_- \operatorname{sn}(\xi, k)}{\sqrt{8}} E \\ -\frac{ab}{\sqrt{2} B_- \operatorname{sn}(\xi, k)} U - \frac{B_- \operatorname{sn}(\xi, k)}{\sqrt{8}} E & i\frac{B_+ \operatorname{cn}(\xi, k) \operatorname{dn}(\xi, k)}{\sqrt{8} \operatorname{sn}(\xi, k)} U \end{pmatrix} \Phi, \quad (72)$$

$$\partial_\chi \Phi = \frac{b}{\sqrt{2} B_- \operatorname{sn}(\xi, k) [2(1 + a^2) - B_-^2 \operatorname{sn}^2(\xi, k)]} \begin{pmatrix} iA_0(-S_z + aS_x) & A_{12} \\ A_{21} & iA_0(S_z - aS_x) \end{pmatrix} \Phi. \quad (73)$$

Здесь также $U^2 + E^2 = 1$, ξ — спектральный параметр, $\operatorname{sn}(\xi, k)$, $\operatorname{cn}(\xi, k)$, $\operatorname{dn}(\xi, k)$ — эллиптические функции Якоби с модулем

$$k = \frac{B_+}{B_-},$$

$$B_\pm = \left\{ 1 + a^2 - b^2 \pm [(1 + a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$$A_0 = B_- B_+ \operatorname{cn}(\xi, k) \operatorname{dn}(\xi, k),$$

$$A_{12} = 2abS_z - b[2a^2 - B_-^2 \operatorname{sn}^2(\xi, k)]S_x + i2B_- B_+ \operatorname{cn}(\xi, k) \operatorname{dn}(\xi, k) S_y,$$

$$A_{21} = -2abS_z + b[2a^2 - B_-^2 \operatorname{sn}^2(\xi, k)]S_x + i2B_- B_+ \operatorname{cn}(\xi, k) \operatorname{dn}(\xi, k) S_y.$$

$$Z = \frac{1}{2a^2} \left[-4\lambda^2 - 1 - a^2 + b^2 + \sqrt{(4\lambda^2 + 1 + a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} \right].$$

Здесь $\tilde{G}(\lambda), G(\lambda)$ — произвольные кусочно-гладкие функции, не равные тождественно нулю и связанные соотношением

$$G\tilde{G} = -\frac{1}{8} \left[4\lambda^2 + 1 + a^2 - b^2 + \sqrt{(4\lambda^2 + 1 + a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} \right]. \quad (71)$$

Эта параметризация содержит неоднозначности, связанные с наличием квадратных корней от степеней λ в элементах матриц, стоящих в правых частях (69), (70). Приведем иную частную форму представления Лакса для системы (27) с параметризацией коэффициентов через эллиптические функции Якоби:

Эта система может быть решена в рамках МОЗР на торе, аналогично случаям «двухосного» кирального поля [34] и родственных уравнений Ландау–Лифшица [35]. Однако здесь возникает дополнительная трудность, связанная с тем, что для «вакуумного» решения $E = 0$, на фоне которого распространяются солитоны, недиагональные члены матриц, стоящих в правых частях (69) и (70), не обращаются в нуль. Поэтому, в отличие от случаев главного кирального поля и уравнений Ландау–Лифшица, здесь возникает еще одна неоднозначность, приводящая к существенному усложнению аналитических свойств задачи.

Для частного случая $a = 0$ представление Лакса (69), (70) переходит соответственно в пару (28), (29).

Совершая формальный предельный переход в (27)

$$a \neq 0, \quad b \rightarrow 0, \quad b\chi \rightarrow \chi', \quad (74)$$

где χ' — новая переменная, получаем хорошо известную интегрируемую систему [28] — редукцию исходной системы уравнений (27):

$$\partial_{\chi'} E = -U \sin \theta, \quad (75)$$

где

$$\theta = \sqrt{1+a^2} \int_0^\tau E(\tau') d\tau', \quad S_y = \sin \theta, \\ aS_x - S_z = \sqrt{1+a^2} \cos \theta.$$

Однако этот предельный переход в системе (27) был сделан после применения приближения однонаправленности, затем была использована связь продольного и квазиперечного полей (26). Если брать за основу исходную физическую систему (18), (20), (21), в которой $f = b = 0$, мы приходим (после применения тех же приближений) к иной интегрируемой системе уравнений, которая формально эквивалентна интегрируемой системе, найденной недавно М. Агротис и др. [22] и примененной этими авторами для описания динамики оптических солитонов в двухуровневой среде с постоянным дипольным моментом. Такая же (с точностью до замены обозначений) система возникает в качестве редукции (27) в пределе малых амплитуд $E \ll 1$, при которой функцию U в этой системе можно формально заменить единицей.

Приведем уравнения Марченко для задачи Захарова–Шабата (61) [3] на всей оси $\tau \in (-\infty, \infty)$ и для поля $V(\tau, 0)$ и его производных, достаточно быстро обращающихся в нуль на бесконечностях. Эти уравнения имеют вид

$$K_1(\tau, \tau') + F(\tau + \tau') + \int_0^\tau F(\tau' + s) K_2(\tau, s) ds = 0, \quad (76)$$

$$\overline{K}_2(\tau, \tau') - \int_0^\tau \overline{K}_1(\tau, s) F(\tau' + s) ds = 0. \quad (77)$$

Здесь ядро

$$F_r = F(\tau, \chi) = \int_{\mathbb{R}} \rho(\chi; \lambda) \frac{\exp(-i\lambda\tau)}{2\pi} d\lambda \quad (78)$$

для условий (59) полностью определяется действительным спектром задачи (61). Связь между «потенциалом» V и ядром K_1 имеет стандартный вид:

$$V(\tau, \chi) = 4K_1(\tau, \tau, \chi). \quad (79)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
2. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).
3. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
4. H.-Y. Nao and H. J. Maris, *Phys. Rev. B* **64**, 064302 (2001).
5. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2269 (1971).
6. Г. Т. Адамашвили, ЖЭТФ **97**, 235 (1990).
7. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ФТТ **43**, 1969 (2001).
8. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **120**, 269 (2001).
9. P. A. Fedders, *Phys. Rev. B* **12**, 2046 (1975).
10. G. T. Adamashvili, *Physica B* **266**, 173 (1999).
11. N. S. Shiren, *Phys. Rev. B* **2**, 2471 (1970).
12. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. Э. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974).
13. H. W. de Wijn, P. A. van Walree, and A. F. M. Arts, *Physica B* **263–264**, 30 (1999).
14. L. G. Tilstra, A. F. M. Arts, and H. W. de Wijn, *Physica B* **316–317**, 311 (2002).
15. А. А. Заболотский, Письма в ЖЭТФ **76**, 709 (2002).
16. Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Физматлит, Москва (1974).
17. М. К. Балакирев, И. А. Гишинский, *Волны в пьезокристаллах*, Наука, Новосибирск (1982).
18. Дж. Такер, Р. Рэмpton, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, Москва (1975).
19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1987).
20. С. А. Альтшуллер, Б. М. Козырев, *Электронный парамагнитный резонанс соединений элементов промежуточных групп*, Наука, Москва (1981).
21. Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, Wiley, New York (1984).
22. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, *Physica D* **138** 134 (2000).
23. J. D. Gibbon, P. J. Coudrey, J. K. Eilbeck, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math. Gen.* **6**, 1237 (1973).

24. А. Е. Боровик, С. И. Кулинич, Письма в ЖЭТФ **39**, 320 (1984).
25. А. А. Zabolotskii, Physica D **40**, 283 (1989).
26. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **115**, 1158 (1999).
27. Л. А. Тахтаджян, Л. А. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
28. A. C. Newell, Solitons in Mathematics and Physics, CBMS-NSF Regional Conference Series, SIAM, Philadelphia, PA (1985), Vol. 48.
29. J. Leon and A. V. Mikhailov, Phys. Lett. A **53**, 33 (1999); M. Boiti, J.-G. Caputo, J. Leon, and F. Pempinelli, Inverse Problems **16**, 303 (2000).
30. A. Fokas, J. Math. Phys. **41**, 4188 (2000).
31. A. Degasperis, S. V. Manakov, and P. M. Santini, E-print archives xxx.lanl.gov, nlin.SI/0210058.
32. A. V. Khaetskii, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures **10**, 27 (2001).
33. E. del Barco, J. M. Hernandez, M. Sales et al., Phys. Rev. B **60**, 11898 (1999).
34. И. В. Чередник, ТМФ **47**, 755 (1981).
35. A. M. Mikhailov, Phys. Lett. A **92**, 51 (1982).