

# ОБ ЭВОЛЮЦИИ И ГРАВИТАЦИОННОМ КОЛЛАПСЕ ТОРОИДАЛЬНОГО ВИХРЯ

*К. Ю. Блюх, В. М. Конторович\**

*Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины  
61002, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 23 декабря 2002 г.

В рамках подхода гамильтоновой механики рассмотрены эволюция и коллапс газового тороидального вихря под действием самогравитации. Показано, что эволюция проходит три основные стадии, разделенные характерными временными масштабами. Сначала происходит сжатие по малому радиусу к квазиравновесному состоянию, потом более медленное сжатие по большому радиусу к более стабильному компактному вихревому объекту. В последнем обнаружена возможность эффективного рассеяния и выброса частиц вдоль оси вихря (формирование джета). В результате происходит потеря массы, энергии и момента, и вихрь коллапсирует.

PACS: 47.32.Cc, 04.40.-b, 98.58.Fd

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Особый объект применения гамильтоновых методов представляют собой вихри, традиционно описываемые в рамках гидродинамики несжимаемой жидкости [1, 2]. В солитонную эпоху интерес к вихрям как родственным локализованным образованиям резко возрос. Современный взгляд на проблему представлен в обзорах и статьях [3–7], а также в содержащихся в них ссылках.

В астрофизических применениях важную роль может играть сжимаемость и самогравитация [8–10] таких объектов. В некоторых случаях, например вблизи компактных объектов в центрах галактик, существенно влияние на них внешнего гравитационного поля. Ниже мы будем принимать во внимание обе эти возможности.

Другой вопрос, чрезвычайно актуальный для современной астрофизики, связан с происхождением космических струй (джетов), возникающих, как принято считать, в аккреционных дисках различной природы и масштабов — от галактических [11] до звездных [12]. Объяснение таких струй представляет собой весьма нетривиальную задачу, в разрешении которой в рамках МГД достигнуты в последние годы значительные успехи [13], однако остаются и серьез-

ные трудности: решения получены при специальной геометрии, требуются сильные магнитные поля. Как мы покажем ниже, возникновение (однонаправленных) джетов является естественным следствием эволюции самогравитирующих вихрей и неперенным условием их коллапса. При этом джеты возникают и в отсутствие магнитного поля.

Отметим также возможную связь рассматриваемого вопроса с существованием затеняющих торов<sup>1)</sup> вблизи центральных компактных объектов в активных ядрах галактик [14].

## 2. ПЕРВАЯ СТАДИЯ: ЭВОЛЮЦИЯ ТОНКОГО ВИХРЯ

Предположим, что на начальной стадии форма рассматриваемого вихря представляет собой тонкий тор (рис. 1), радиусы которого удовлетворяют неравенству

$$r \ll R. \quad (1)$$

(Аналогом такого вихря в гидродинамике может служить вихрь Максвелла [1, 2].) Далее будем считать,

<sup>1)</sup> Мы не касаемся классической проблемы устойчивости вращающихся как целое торов, восходящей к Пуанкаре и Дайсону. Современное состояние проблемы в рамках ОТО и ссылки см. в [15].

\*E-mail: vkont@ira.kharkov.ua

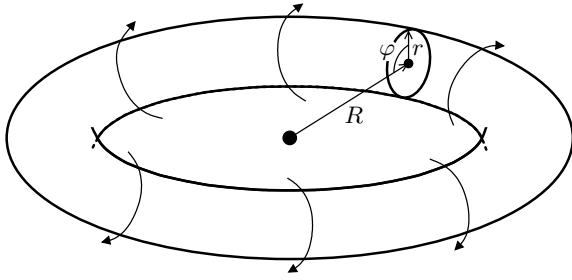


Рис. 1. Тонкий тороидальный вихрь типа вихря Максвелла

что эволюция вихря на начальной стадии происходит без изменений тороидальности формы. Таким образом, в данной системе, помимо одной вращательной степени свободы, будут две поступательных: им отвечают изменения  $r$  и  $R$  (мы не рассматриваем здесь поступательного движения вихря как целого). Заметим, что в силу (1) движение по  $r$  и вращение представляют собой локально сжатие вращающегося цилиндра, а движение по  $R$  представляет собой коллапс тонкого кольца.

Запишем гамильтониан системы в виде

$$H = \frac{1}{2M} \left[ p_r^2 + p_R^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right] + U(r, R). \quad (2)$$

Здесь  $M$  — полная масса вихря,  $p_s$  — импульсы, соответствующие координатам  $s$ ,  $\varphi$  — циклическая координата вращения, а  $U$  — гравитационная потенциальная энергия системы. Гамильтоновыми уравнениями, отвечающими (2), являются

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{M}, & \dot{R} &= \frac{p_R}{M}, & \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{Mr^2}, \\ \dot{p}_r &= \frac{p_\varphi^2}{Mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r}, & \dot{p}_R &= \frac{\partial U}{\partial R}, & \dot{p}_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда следуют уравнения движения для поступательных степеней свободы:

$$\ddot{r} = \frac{p_\varphi^2}{M^2 r^3} - \frac{1}{M} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (4a)$$

$$\ddot{R} = -\frac{1}{M} \frac{\partial U}{\partial R}, \quad (4b)$$

а также интеграл движения для вращательной:

$$p_\varphi = Mr^2 \dot{\varphi} = \text{const}. \quad (5)$$

Последний представляет собой закон сохранения момента импульса (в гидродинамике величина  $2\pi p_\varphi / M$  соответствует завихренности).

Перейдем теперь к определению функции  $U(r, R)$ . Рассмотрим сначала уравнение (4a). Оно описывает эволюцию вращающегося цилиндра радиуса  $r$ . Гравитационная сила, действующая на пробную частицу на поверхности цилиндра, равна

$$F_r = -G \frac{2\chi m}{r}, \quad (6)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $\chi$  — масса единицы длины цилиндра, а  $m$  — масса пробной частицы. Таким образом, сила гравитационного притяжения, стоящая в правой части уравнения (4a), имеет вид

$$-\frac{1}{M} \frac{\partial U}{\partial r} = -G \frac{2\chi}{r}. \quad (7)$$

В рассматриваемом случае тонкого тора  $\chi = M/2\pi R$ , откуда

$$U(r, R) = G \frac{M^2}{\pi R} \ln \frac{r}{R} + c_1(R). \quad (8)$$

Чтобы определить зависимость потенциальной энергии  $U$  от большого радиуса  $R$ , рассмотрим второе уравнение движения, (4b). Оно должно описывать гравитационное сжатие тонкого кольца радиуса  $R$ . Сила, действующая на пробную частицу, находящуюся на бесконечно тонком кольце, равна

$$F_R = -G \frac{Mm}{2\pi R^2} \int_0^\pi \frac{d(\vartheta/2)}{\sin(\vartheta/2)} = \infty. \quad (9)$$

Эта формула получается прямым интегрированием вкладов от взаимодействий частицы со всеми элементами кольца. Чтобы избежать расходимости при  $\vartheta \rightarrow 0$ , необходимо учитывать конечную толщину кольца. Для этого обрежем расходящуюся часть (9), заменив интервал интегрирования  $(0, \pi)$  на  $(\vartheta_c, \pi)$ , где  $\vartheta_c = \alpha r/R$  ( $\alpha \sim 1$  — числовой множитель). В результате получим

$$U(r, R) = G \frac{M^2}{2\pi R} \ln \frac{\tilde{\alpha} r}{R} + c_2(r), \quad (10)$$

где  $\tilde{\alpha} = \alpha/e$ . Полагая в (10)

$$c_2 = 0,$$

а в (8)

$$c_1(R) = \frac{GM^2}{\pi R} \ln \tilde{\alpha},$$

замечаем, что формулы (8) и (10) могут быть приведены к одному виду (различаясь лишь коэффициентом 1/2). Такое различие для нашего рассмотрения

несущественно, и мы примем истинным числовой коэффициент в (8).

Теперь мы можем выписать гамильтониан (2) тонкого тороидального вихря:

$$H = \frac{1}{2M} \left[ p_r^2 + p_R^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right] + G \frac{M^2}{\pi R} \ln \frac{\tilde{\alpha} r}{R}. \quad (11)$$

Уравнения движения (4) при этом примут вид

$$\ddot{r} = \frac{p_\varphi^2}{M^2 r^3} - G \frac{M}{\pi R r}, \quad (12a)$$

$$\ddot{R} = -G \frac{M}{\pi R^2} \ln \frac{\alpha r}{R}. \quad (12б)$$

Вследствие (1) имеем

$$\frac{r}{R} \ln \frac{r}{R} \ll 1.$$

Тогда сила гравитационного притяжения по  $r$  (12a) много больше силы гравитационного сжатия по  $R$  (12б). Это дает основание разделить эволюцию системы по разным масштабам: быстрому (по  $r$ ) и медленному (по  $R$ ). Естественно считать, что быстрая эволюция (при практически неизменном  $R$ ) приведет к установлению равновесия в уравнении (12a). Сила гравитационного притяжения при этом будет скомпенсирована центробежной силой вращения:

$$\frac{p_\varphi^2}{M^2 r^3} - G \frac{M}{\pi R r} = 0 \quad (13)$$

откуда

$$r_{eq} = \sqrt{\frac{\pi p_\varphi^2 R}{GM^3}}.$$

Это выражение определяет равновесный малый радиус как функцию большого,  $r_{eq} = r(R)$ , а неравенство  $r > r_{eq}$  соответствует критерию гравитационной неустойчивости с джинсовым масштабом  $r_{eq}$ . Последнее становится очевидным, если учесть, что масса тора  $M \approx \rho \pi r^2 R$ , где  $\rho$  — его плотность [8–10].

В качестве грубой оценки времени сжатия вихря по малому радиусу  $r$  к квазиравновесному состоянию приведем здесь

$$t_1 \sim \sqrt{\left| \frac{r_0 - r_{eq}(R_0)}{F_r(r_0, R_0)} \right|} = \sqrt{\left| \frac{M^2 R_0^4 - p_\varphi r_0^3 \sqrt{\pi M R_0 / G}}{p_\varphi^2 - GM^3 r_0^2 / \pi R_0} \right|}, \quad (14)$$

где  $r_0$ ,  $R_0$  и  $F_r$  — начальные значения малого и большого радиусов вихря и сила, стоящая в правой части (12a), соответственно.

Если неравенство (1) имеет место в начале, то, согласно уравнению движения (12б) и соотношению (13), будет происходить медленное сжатие тора-вихря по обоим радиусам до тех пор, пока они не станут величинами одного порядка:

$$r_{eq} \sim R = R_c = \frac{\pi p_\varphi^2}{GM^3} = \frac{r_{eq}^2}{R} \ll r_0. \quad (15)$$

На этом этапе нарушаются исходные предположения (1) и использованное описание становится неприменимым. При этом нет возможности разделять эволюцию вихря по двум поступательным степеням свободы  $r$  и  $R$ , а следует описывать вихрь как единый компактный объект с достаточно сложной внутренней структурой.

Определим некоторые наиболее важные параметры вихря, с которыми он придет ко второй стадии (15). Для скорости частиц на поверхности вихря, используя закон сохранения момента импульса (5) и (13), получим

$$v = \frac{p_\varphi}{Mr} \sim \sqrt{\frac{GM}{\pi R}} \sim \frac{GM^2}{\pi p_\varphi R} r. \quad (16)$$

Видно, что скорость вращения равновесного по  $r$  вихря определяется только его массой и большим радиусом и растет при сжатии по  $R^2$ .

Когда вихрь подойдет к концу первой стадии, скорость достигнет значения

$$v_{fin} \sim \frac{GM^2}{\pi p_\varphi} \quad (17)$$

и станет много больше начальной  $v_0$ :

$$\frac{v_{fin}}{v_0} \sim \sqrt{\frac{R_0}{R_c}} \sim \frac{r_0}{R_c} \sim \frac{R_0}{r_0} \gg 1. \quad (18)$$

Аналогично (14) время сжатия вихря по большому радиусу можно оценить как

$$t_2 \sim \sqrt{\frac{R_0 - R_c}{F_R[r_{eq}(R_0), R_0]}} = \sqrt{\frac{\pi R_0^2 (R_0 - \pi p_\varphi^2 / GM^3)}{GM \ln(\alpha \sqrt{\pi p_\varphi^2 / GM^3} R_0)}} \gg t_1, \quad (19)$$

где  $F_R$  — сила, стоящая в правой части (12б).

Посмотрим также, как распределяется приобретаемая вихрем кинетическая энергия по степеням

<sup>2)</sup> Заметим, что это получилось благодаря тому, что в (16) сократился момент импульса  $p_\varphi$ . Это произошло вследствие вида условия равновесия (13), который в свою очередь определяется видом потенциала (11).

свободы. Будем считать, что вначале вещество в вихре было практически свободным и его потенциальная и кинетическая энергии (11) были малы по сравнению с  $GM^2/\pi R_c$ . Тогда, когда коллапс достигнет критической стадии (15), потенциальная и кинетическая энергии вещества будут порядка

$$U_{fin} \sim -\frac{GM^2}{\pi R_c} \ln \tilde{\alpha} \sim -\frac{GM^2}{\pi R_c} = -\frac{G^2 M^3}{\pi^2 p_\varphi^2}, \quad (20)$$

$$T_{fin}^{(rot)} \sim \frac{p_\varphi^2}{2MR_c^2} = \frac{G^2 M^5}{2\pi^2 p_\varphi^2}.$$

(Заметим, что этот результат находится в согласии с теоремой вириала для  $U \sim R^{-1}$ , т.е.  $E = -T < 0$ .) Поскольку полная энергия есть интеграл движения, а начальное ее значение близко к нулю, из (11) и (20) получим, что и кинетическая энергия поступательного движения будет того же порядка. Таким образом, можно заключить, что высвобожденная при сжатии кинетическая энергия по порядку величины равномерно распределяется между вращательной и поступательными степенями свободы. Этот факт будет существенно использован в дальнейшем; в частности он означает, что случайного увеличения скорости вращательного движения частицы вещества менее чем в два раза достаточно для ее отрыва и выхода из системы.

### 3. ВТОРАЯ СТАДИЯ: ЭВОЛЮЦИЯ КОМПАКТНОГО ВИХРЯ

Попробуем представить, каким может быть сценарий сжатия гравитирующего вихря, когда он является компактным объектом, топологически эквивалентным тору. Можно ожидать, что под действием гравитационных сил он будет приближаться к некоторой шарообразной конфигурации, напоминающей вихрь Хилла [1, 2] (рис. 2). Если рассматривать такой объект на уровне оценок, то можно считать, что у него есть одна вращательная степень свободы и одна поступательная. Последняя определяется изменением его радиуса  $R$ . Радиус вращения частиц (который в предыдущем пункте был независимой величиной  $r$ ) теперь примерно равен  $R/2$ . Гамильтониан такого вихря можно представить как

$$H = \frac{p_R^2}{2M} + \frac{2p_\varphi^2}{MR^2} - \frac{GM^2}{R}. \quad (21)$$

Здесь вид второго слагаемого мы приняли таким, как в (11) с  $r = R/2$ , а в качестве потенциал-

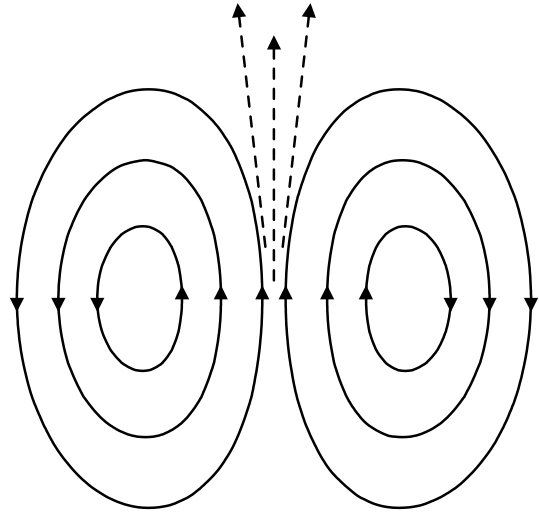


Рис. 2. Разрез компактного сферообразного вихря типа вихря Хилла

ной энергии взяли потенциальную энергию шара. Гамильтониану (21) отвечает уравнение движения

$$\ddot{R} = \frac{4p_\varphi^2}{M^2 R^3} - \frac{GM}{R^2}. \quad (22)$$

Это уравнение движения имеет положение равновесия, когда

$$\frac{4p_\varphi^2}{M^2 R^3} - \frac{GM}{R^2} = 0 \quad \text{или} \quad R_{c1} = \frac{4p_\varphi^2}{GM^3}, \quad (23)$$

где  $R_{c1}$  опять играет роль джинсова масштаба. Таким образом, равновесие этого объекта находится при таком же по порядку величины радиусе, как и тот, на котором заканчивается первая стадия эволюции (ср. с (15)). Это означает, что в задаче о коллапсе тонкого кольцевого вихря нам нет необходимости рассматривать отдельно эволюцию компактного вихря. Можно считать, что равновесие наступает почти сразу, как только кольцо приходит к параметрам (15)–(18).

С другой стороны, можно рассматривать задачу о сжатии вихря, который сразу напоминает собой вихрь Хилла (рис. 2), но вначале далек от равновесного состояния. Тогда, в конце концов, мы также приходим к равновесному компактному вихрю с радиусом того же порядка (23). Скорость вращения частиц при этом будет порядка (16):

$$v_{fin} \sim \frac{GM^2}{2p_\varphi}, \quad (24)$$

причем

$$\frac{v_{fin}}{v_{in}} \sim \frac{R_{in}}{R_{c1}} \gg 1.$$

Аналогично, несложно показать, что при установлении равновесия (23), по крайней мере, половина высвободившейся потенциальной энергии перейдет в кинетическую энергию вращения (оставшаяся часть при этом перейдет в тепло).

#### 4. РАССЕЙНИЕ И ОТРЫВ ЧАСТИЦ

Итак, после различных возможных стадий эволюции тороидальный вихрь превращается в компактный объект с характерными параметрами (15), (17), (18) (или (23)–(24)) (рис. 2). При этом скорость вращения вещества в нем значительно больше скоростей в исходном вихре. Обратим внимание на тесно соприкасающиеся потоки вещества, текущие сквозь вихрь возле его оси. Это означает, что в этом месте возможно эффективное рассеяние частиц. Очевидно, что такое рассеяние будет приводить к увеличению скорости у некоторой доли частиц. При этом, как следует из рассуждений в конце предыдущих двух разделов, достаточно увеличения вращательной скорости частиц менее чем в два раза, чтобы набрать достаточную для отрыва кинетическую энергию. Следовательно, можно ожидать, что определенная доля частиц из потоков, летящих вдоль оси компактного вихря, будет в результате рассеяния получать достаточную энергию и выбрасываться из вихря. Таким образом, может формироваться направленная струя, уносящая вещество из центра вихря. (Здесь мы не будем рассматривать, как может меняться конфигурация вихря в результате потери массы из-за такого выброса.)

Приведем еще одно соображение, иллюстрирующее предложенный выше сценарий. В Приложении рассмотрено движение пробной частицы в гравитационном поле кольца (тонкого тора) фиксированного радиуса (рис. 3). При небольших энергиях частица вращается на орбите малого радиуса, обвивая кольцо (рис. 3а). Это движение соответствует тонкому вихрю (возможная первая стадия эволюции). С увеличением энергии частицы появляются различные сложные траектории, которые, однако, своей ориентацией не могут соответствовать вихревому движению и поэтому для нас не важны. Наконец, начиная с некоторого значения энергии, частица переходит на почти замкнутые траектории типа «восьмерок» (рис. 3б). При этом радиус вращения частиц становится порядка радиуса кольца, что соответствует как раз конечной стадии сжатия вихря (15). Кинетическая энергия частицы на таких траекториях уже близка к энергии, необходимой для

отрыва частиц. Движение частиц по «восьмеркам» приведет к эффективному их столкновению и рассеянию вблизи оси вихря<sup>3)</sup>.

Можно сказать, что для движущихся частиц фиксированной энергии сжатие тора качественно приводит к тем же последствиям, что и увеличение их энергии при фиксированном размере тора. Ясно, что имеется тенденция, приводящая в конце концов к отрыву частиц, и что наиболее благоприятные для этого условия складываются вблизи оси вихря. В итоге должна возникнуть осевая струя (односторонний джет), уносящая энергию, массу и момент вихря. Как следствие, сжатие вихря будет продолжаться (коллапс), причем темп сжатия  $dR/dt$  определяется темпом потери массы вихря (потоком частиц в джете, см. ниже). Таким образом, коллапс вихря и возникновение джета однозначно связаны между собой.

#### 5. КОЛЛАПС ВИХРЯ

Рассмотрим, к каким последствиям может привести выброс частиц из вихря, сценарий которого предложен в предыдущем разделе. Поток частиц будет уносить с собой массу, энергию и момент импульса вихря. Последние величины оценим как

$$E \sim -\frac{Mv^2}{2}, \quad p_\varphi \sim \frac{MRv}{2}, \quad (25)$$

где все величины берутся для равновесного компактного вихря (см. разд. 3) и, как было отмечено выше,  $E = -T$ . Из (25) имеем

$$R \sim \frac{p_\varphi}{\sqrt{-ME}}. \quad (26)$$

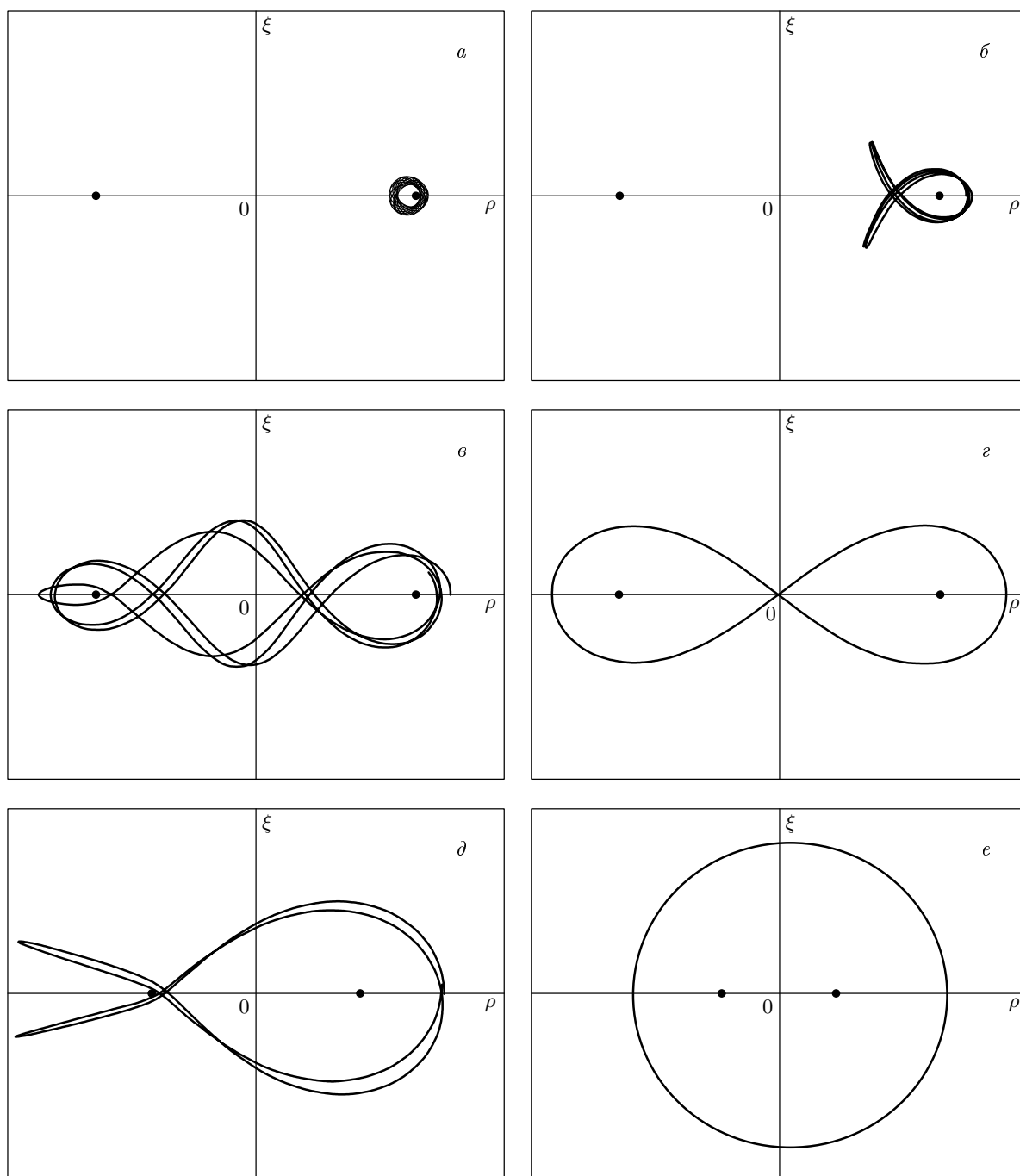
Дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$\dot{R} \sim \frac{1}{\sqrt{-ME}} \dot{p}_\varphi - \frac{p_\varphi}{2(-ME)^{3/2}} (M\dot{E} + E\dot{M}). \quad (27)$$

Будем считать, что поток частиц сравнительно невелик и этот процесс проходит гораздо медленнее, чем устанавливается равновесие компактного вихря. Тогда оценить изменение характеристик вихря, уносимых потоком частиц, можно как

$$\begin{aligned} \dot{M} &= -J, & \dot{E} &\sim J \frac{v^2}{2} \sim -\frac{J}{M} E, \\ \dot{p}_\varphi &\sim -J \frac{Rv}{2} \sim -\frac{J}{M} p_\varphi, \end{aligned} \quad (28)$$

<sup>3)</sup> Существование потоков вещества типа «восьмерок» следует и из гидродинамической модели вихря Максвелла (см., например, [2]).



**Рис. 3.** Характерные финитные траектории частицы в гравитационном поле кольца. В плоскости ( $\rho = r/r_0, \xi = z/r_0$ ) частица движется вокруг получающихся в результате сечения кольца двух притягивающих центров. Начальные условия:  $\rho = 1 + \rho_0, \xi = 0, \dot{\rho} = 0, \dot{\xi} = \sqrt{2}$  (значением  $\xi$  выбрана «первая космическая» скорость уравнения (12а), верного вблизи притягивающих центров). *a* —  $\rho_0 = 0.08$ , вращение вокруг одного центра; *б* —  $\rho_0 = 0.17$ , движение типа «ласточкин хвост» вокруг одного центра; *в* —  $\rho_0 = 0.22$ , движение типа двойной «восьмерки» вокруг двух центров; *г* —  $\rho_0 = 0.42$ , движение типа «восьмерки» вокруг двух центров; *д* —  $\rho_0 = 0.81$ , движение типа «ласточкин хвост» вокруг двух центров; *е* —  $\rho_0 = 2$ , вращение вокруг двух центров

где  $J$  — поток массы в выбрасываемой струе вещества. Подставляя (28) в (27) и учитывая (26), получим

$$\dot{R} \sim -R \frac{J}{M} = R \frac{\dot{M}}{M}. \quad (29)$$

Решением этого уравнения является

$$R(t) = R(0) \left( \frac{M(t)}{M(0)} \right)^\beta. \quad (30)$$

Здесь  $\beta \sim 1$  — некоторая положительная константа (которая появляется из-за того, что все параметры вихря мы оценивали выше лишь по порядку величины), а отсчет времени начинается с момента, когда вихрь пришел к компактному равновесному состоянию и началось эффективное рассеяние и отрыв частиц. Зависимость от времени массы вихря  $M(t)$  определяется для конкретного механизма рассеяния частиц. В общем случае поток массы вещества  $J = -\dot{M}$  зависит от основных характеристик вихря: массы, энергии и момента. Если в простейшем случае предположить, что поток вещества пропорционален массе вихря и слабо зависит от других величин,  $J = kM$ , то уравнения (28)–(30) приведут к экспоненциальным законам

$$M(t) = M(0)e^{-kt}, \quad R(t) = R(0)e^{-\beta kt}. \quad (31)$$

Таким образом, уравнения (29)–(31) показывают, что рассеяние частиц и выброс вещества действительно приводят к коллапсу компактного вихря.

Характерный временной масштаб коллапса определяется как

$$t_{col} \sim \left| M/\dot{M} \right|. \quad (32)$$

Согласно сделанным предположениям, коллапс должен быть медленным по сравнению с характерным временем сжатия вихря к равновесному состоянию, что соответствует  $t_{col} \gg t_2$ .

## 6. ОБОБЩЕНИЯ

Несложно обобщить приведенный анализ на случай, если в системе имеется центральное массивное тело, а также если вихрь вращается вокруг своей оси. Эти факторы приведут к появлению дополнительных слагаемых в уравнении (12):

$$\ddot{R} = -G \frac{M}{\pi R^2} \ln \frac{\alpha r}{R} - G \frac{\tilde{M}}{R^2} + \frac{p_\vartheta^2}{M^2 R^3}. \quad (33)$$

Здесь  $\tilde{M}$  — масса центрального объекта, а  $p_\vartheta = MR^2\dot{\vartheta} = \text{const}$  — момент импульса, связанный с вращением тора вокруг своей оси. Добавленные члены никак не сказываются на эволюции системы по малому радиусу. Их влияние на эволюцию вихря по  $R$  можно разбить на следующие предельные случаи.

1. Если  $\max(G\tilde{M}/R_c^2, p_\vartheta^2/M^2R_c^3) \ll GM/\pi R_c^3$ , то, очевидно, влиянием этих слагаемых можно пренебречь, и весь динамический анализ разд. 2, 3 и соответствующие выводы остаются в силе. Однако наличие центральной массы, находящейся в зоне наиболее вероятного пересечения потоков частиц, может повлиять на их рассеяние и отрыв.

2. Если  $\pi\tilde{M}/M \ll 1$ , а  $\pi p_\vartheta^2/GM^3R_c \gg 1$ , то вращение тора вокруг своей оси остановит сжатие раньше, чем он дойдет до критической стадии  $r \sim R \sim R_c$ . Равновесному состоянию будут соответствовать большой радиус, определяемый соотношением

$$\frac{GM^3R}{\pi p_\vartheta^2} \ln \left\{ \alpha \sqrt{\frac{\pi p_\vartheta^2}{GM^3R}} \right\} = 1,$$

и малый, определяемый подстановкой большого в (18). В этом случае практически исчезает вероятность эффективного рассеяния и отрыва частиц в середине вихря, а следовательно, не будет и коллапса.

3. Если  $\pi\tilde{M}/M \gg 1$ , а  $\pi p_\vartheta^2/GM^3R_c \ll 1$ , то вращение вихря вокруг своей оси несущественно, а центральная масса будет усиливать сжатие. Вихрь сожмется к компактному объекту, а дальше его поведение зависит от сценария непосредственного взаимодействия вихря с центральной массой. Естественно, рассеяние частиц и возможный коллапс вихря в этом случае будут также существенно зависеть от взаимодействия вещества с центральной массой.

4. Если  $\pi\tilde{M}/M \gg 1$  и  $\pi p_\vartheta^2/GM^3R_c \gg 1$ , то конкурируют два последних члена в правой части (33). Если больше первый (притяжение центрального объекта сильнее), то ситуация соответствует случаю 3, если наоборот — то случаю 2.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (грант № 00-00292).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

## Движение частиц в гравитационном поле кольца

Будем считать, что гравитационное поле тонкого тора близко полю бесконечно тонкого кольца той же массы. Пусть кольцо имеет радиус  $r_0$ , а  $r$ ,  $\varphi$  и  $z$  — цилиндрические координаты, причем  $z = 0$  соответствует плоскости кольца. Гравитационный потенциал кольца равен

$$U(r, z) = -\frac{GM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{z^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi}}.$$

Введя безразмерные переменные  $\xi = z/r_0$  и  $\rho = r/r_0$  и время  $\tau = t\sqrt{GM/2\pi r_0^3}$ , получим уравнения движения пробной частицы в этом потенциале:

$$\rho'' = -\int_0^{2\pi} \frac{(\rho - \cos \varphi)}{(\xi^2 + \rho^2 + 1 - 2\rho \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi,$$

$$\xi'' = -\int_0^{2\pi} \frac{\xi}{(\xi^2 + \rho^2 + 1 - 2\rho \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi,$$

где штрихи обозначают дифференцирование по  $\tau$  и мы предполагаем  $\dot{\varphi} = 0$  для частицы.

На рис. 3 показаны характерные результаты численного счета этих уравнений для финитных движений. Траектории лежат в плоскости  $(\rho, \xi)$  и приведены в порядке возрастания энергии частицы. Несложно заметить, что на траекториях типа «ласточкин хвост» (рис. 3б, д) частица движется практически по одной кривой в противоположных направлениях, поэтому такое движение не может поддерживаться в рамках коллективного движения частиц — оно неизбежно привело бы к столкновениям и сильному рассеянию. Кроме того, траектории рис. 3в, е не могут существовать при вихревом коллективном движении частиц, поскольку различные участки траектории соответствуют противоположным направлениям завихренности. Таким образом, только траектории рис. 3а, г могут существовать в рамках коллективного вихревого движения частиц. Причем траектория на рис. 3а представляет собой сечение тонкого торообразного вихря типа вихря Максвелла, рассмотренного в разд. 2, а «восьмерка» рис. 3г может

возникать при движении частиц в компактном вихре типа вихря Хилла, возникающем на поздней стадии сжатия (см. разд. 3).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ламб, *Гидродинамика*, Огиз, Гостехиздат, Москва–Ленинград (1947).
2. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Наука, Москва (1973).
3. Ф. Дж. Сэффмэн, *Динамика вихрей*, Научный Мир, Москва (2000).
4. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
5. Ю. А. Степанянц, А. П. Фабрикант, *Распространение волн в сдвиговых потоках*, Наука, Москва (1996).
6. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, *ЖЭТФ* **118**, 893 (2000).
7. В. Ф. Копьев, С. А. Чернышев, *УФН* **170**, 713 (2000).
8. D. Linden-Bell, in *Gravitation in Astrophysics*, ed. by B. Carter and J. B. Hartle, NATO ASI Series B: Physics (1986), Vol. 156, p. 155.
9. B. F. Schutz, *ibidem* (1986), p. 123.
10. Ж.-Л. Тассуль, *Теория вращающихся звезд*, Мир, Москва (1982).
11. *Физика внегалактических источников радиоизлучения*, под. ред. Р. Д. Дагкесаманского, Мир, Москва (1987).
12. C. J. Lada, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **23**, 267 (1985).
13. G. V. Ustyugova, R. V. E. Lavelace, M. M. Romanova, H. Li, and S. A. Colgate, *Astrophys. J.* **541**, L21 (2000).
14. R. Antonucci, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **31**, 473 (1993).
15. M. Ansorg, A. Kleinwachter, and R. Meinel, E-print archives gr-qc/0211040.