

ЭЛЕКТРОН В КУЛОНОВСКОМ И ИНТЕНСИВНОМ НИЗКОЧАСТОТНОМ ЛАЗЕРНОМ ПОЛЯХ

Б. А. Зон*, А. С. Корнев**

Воронежский государственный университет
394006, Воронеж, Россия

Поступила в редакцию 9 декабря 2002 г.

Предложено адиабатическое приближение для волновых функций электрона в сильном низкочастотном электромагнитном поле. Проведено тестирование этих функций с помощью нестационарной теоремы Зигерта.

PACS: 32.80.-t, 34.50.Rk

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Шредингера, описывающее движение электрона в кулоновском поле в присутствии интенсивного лазерного поля $\mathbf{F}(t)$ (в дипольном приближении),

$$-\frac{1}{2}\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{r}\Psi(\mathbf{r},t) + \mathbf{r}\mathbf{F}(t)\Psi(\mathbf{r},t) = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t), \quad (1)$$

как известно, не имеет решения в замкнутой аналитической форме. В (1) и всюду ниже используется атомная система единиц ($\hbar = m = e = 1$).

Для оценки точности приближенных решений уравнения (1) можно воспользоваться приемом, заимствованным из атомной физики при тестировании хартри-фоковских решений для многоэлектронного атома [1]. Именно, для точных решений $|i\rangle$, $|f\rangle$ стационарного уравнения Шредингера имеет место равенство

$$\langle f|\hat{\mathbf{p}}|i\rangle = i\omega_{fi}\langle f|\hat{\mathbf{r}}|i\rangle, \quad (2)$$

называемое иногда теоремой Зигерта [2]. Здесь $\hat{\mathbf{p}}$ — оператор импульса; $\omega_{fi} = E_f - E_i$, E_i и E_f — соответственно энергии состояний $|i\rangle$ и $|f\rangle$. Пригодность приближенных волновых функций оценивается по степени нарушения данного равенства.

Теорема Зигерта (2) обобщается и на нестационарный случай [3, 4]:

$$\langle f|\hat{\mathbf{p}} - c^{-1}\mathbf{A}(t)|i\rangle = \partial_t\langle f|\hat{\mathbf{r}}|i\rangle, \quad (3)$$

где $\mathbf{A}(t)$ — векторный потенциал электромагнитного поля, c — скорость света.

В качестве тестового параметра в работе [4] было предложено использовать отношение

$$\chi = \frac{|\partial_t\langle f|\hat{\mathbf{r}}|i\rangle|^2}{|\langle f|\hat{\mathbf{p}} - c^{-1}\mathbf{A}(t)|i\rangle|^2}.$$

Легко показать, что для точных решений уравнения Шредингера (1) оно равно единице. Конечно, условие (3) не является достаточным критерием для оценки точности приближенных волновых функций. Тем не менее оно дает физически обоснованную необходимую оценку точности решений.

Нестационарная теорема Зигерта использовалась нами ранее [3, 4] при тестировании кулон-волковских функций (КВФ) [5, 6], являющихся одним из модельных решений уравнения Шредингера (1) с полем

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{e}_z F \sin \omega t. \quad (4)$$

Данные функции широко применяются в исследованиях взаимодействия атомных электронов с интенсивным электромагнитным полем (см., например, работы [7–11] и имеющиеся там ссылки). В наших недавних работах [3, 4] было показано, что использование КВФ является обоснованным, с точки зрения

*E-mail: zon@niif.vsu.ru

**E-mail: kornev@tooth.vsu.ru

критерия (3), для случая, когда частота лазерного поля много больше его амплитуды (в атомных единицах),

$$\omega \gg F. \tag{5}$$

Нарушение условия (5) не означает заведомую непригодность КВФ в этом случае. Вполне возможно, что существуют иные аргументы, обосновывающие возможность их применения для расчетов тех или иных конкретных физических эффектов. Однако очевидно, что необходимость поиска подобных обоснований при нарушении условия (5) становится крайне желательной.

Целью настоящей работы является построение и анализ адиабатических волновых функций, описывающих инфинитное движение электрона, в противоположном случае низких частот,

$$\omega \ll F. \tag{6}$$

2. СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА

Вначале напомним стационарную задачу о движении электрона с энергией $E > 0$ в кулоновском потенциале, создаваемом зарядом Z , и однородном постоянном электрическом поле напряженностью F (см., например, [12, § 76]). В параболических координатах

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z, \quad \varphi = \arctg(y/x), \quad \xi, \eta \geq 0$$

в уравнении Шредингера

$$\left[-\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{Z}{r} + Fz \right] \Psi^{(0)}(F, \mathbf{r}) = E\Psi^{(0)}(F, \mathbf{r}) \tag{7}$$

переменные разделяются:

$$\Psi^{(0)}(F, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi\eta}} f_1(\xi)f_2(\eta)e^{im\varphi} \tag{8}$$

и соответствующие обыкновенные дифференциальные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} + \left(\frac{E}{2} + \frac{Z_1}{\xi} - \frac{m^2 - 1}{4\xi^2} - \frac{F}{4}\xi \right) f_1 &= 0, \\ \frac{d^2 f_2}{d\eta^2} + \left(\frac{E}{2} + \frac{Z_2}{\eta} - \frac{m^2 - 1}{4\eta^2} + \frac{F}{4}\eta \right) f_2 &= 0, \\ Z_1 + Z_2 &= Z. \end{aligned}$$

Движение по координате ξ финитно и в квазиклассическом приближении ($m^2 - 1 \rightarrow m^2$):

$$f_1(\xi) = \frac{A_1}{\sqrt{p_1(\xi)}} \cos \left(\int_{\xi^*}^{\xi} p_1(\xi') d\xi' - \frac{\pi}{4} \right), \tag{9}$$

$$p_1(\xi) = \sqrt{\frac{E}{2} + \frac{Z_1}{\xi} - \frac{m^2}{4\xi^2} - \frac{F}{4}\xi}, \tag{10}$$

где ξ^* — один из положительных корней уравнения $p_1(\xi) = 0$. Для простоты дальнейшего рассмотрения ограничимся случаем ненулевых значений m .

Поскольку рассматривается движение с энергией $E > 0$, нетрудно убедиться, используя известные тригонометрические формулы для корней кубического уравнения [13], что меньшему положительному корню (левая точка поворота) отвечает

$$\xi^* = \xi_1 = \frac{2E}{3F} - \frac{4a}{3} \cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right), \tag{11}$$

а большему (правая точка поворота) —

$$\xi^* = \xi_2 = \frac{2E}{3F} + \frac{4a}{3} \cos \frac{\alpha}{3}. \tag{12}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\left(\frac{E}{F} \right)^2 + \frac{3Z_1}{F}}, \\ \alpha &= \arccos \left\{ \frac{1}{a^3} \left[\left(\frac{E}{F} \right)^3 + \frac{9EZ_1}{2F^2} - \frac{27m^2}{16F} \right] \right\}. \end{aligned}$$

При этом предполагается выполнение неравенств

$$\left(\frac{E}{F} \right)^2 \geq \frac{3Z_1}{F}, \tag{13}$$

$$\left[\left(\frac{E}{F} \right)^3 + \frac{9EZ_1}{2F^2} - \frac{27m^2}{16F} \right]^2 \leq \left| \left(\frac{E}{F} \right)^2 + \frac{3Z_1}{F} \right|^3. \tag{14}$$

Формула (9) определяет функцию $f_1(\xi)$ в интервале $\xi_1 < \xi < \xi_2$. Вне этого интервала функция $f_1(\xi)$ экспоненциально затухает. Третьему (отрицательному) корню кубического уравнения соответствует

$$\xi_0 = \frac{2E}{3F} - \frac{4a}{3} \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right). \tag{15}$$

Постоянная Z_1 находится из условия квантования Бора–Зоммерфельда. Записывая

$$p_1(\xi) = \frac{\sqrt{F}}{2\xi} \sqrt{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1)(\xi_2 - \xi)},$$

получаем

$$\begin{aligned} (n_\xi + 1/2)\pi &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} p_1(\xi) d\xi = \\ &= -\frac{\sqrt{F}}{3\sqrt{\xi_2 - \xi_0}} \left[(\xi_0 - \xi_2)(\xi_0 + \xi_1 + \xi_2) E \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + [\xi_0^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_0(\xi_1 + \xi_2)] K \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_0} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 3\xi_0\xi_1\Pi \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_0} \right) \right], \tag{16} \end{aligned}$$

где E, K, Π — эллиптические функции [14], $n_\xi = 0, 1, \dots$ — параболическое квантовое число.

Движение по координате η инфинитно, и волновая функция в квазиклассическом приближении с точностью до нормировки, имеет вид

$$f_2(\eta) = \frac{A_2}{\sqrt{p_2(\eta)}} \cos \left(\left| \int_{\eta_0}^{\eta} p_2(\eta') d\eta' \right| - \frac{\pi}{4} \right), \quad (17)$$

$$p_2(\eta) = \sqrt{\frac{E}{2} + \frac{Z_2}{\eta} - \frac{m^2}{4\eta^2} + \frac{F}{4}\eta}. \quad (18)$$

Здесь η_0 — единственный вещественный корень уравнения $p_2(\eta) = 0$, который определяется выражением

$$\eta_0 = -\frac{2E}{3F} + \frac{4b}{3} \operatorname{sh} \frac{\beta}{3},$$

где

$$b = \sqrt{\left(\frac{E}{F}\right)^2 - \frac{3Z_2}{F}},$$

$$\beta = \operatorname{arsh} \left\{ b^{-3} \left[\left(\frac{E}{F}\right)^3 - \frac{9EZ_2}{2F^2} - \frac{27m^2}{16F} \right] \right\}.$$

При этом предполагается выполнение неравенства

$$\left[\left(\frac{E}{F}\right)^3 - \frac{9EZ_2}{2F^2} - \frac{27m^2}{16F} \right]^2 \geq \left[\left(\frac{E}{F}\right)^2 - \frac{3Z_2}{F} \right]^3. \quad (19)$$

Заметим, что неравенства (13), (14), (19), которые соответствуют физически очевидным условиям наличия двух точек поворота на оси ξ и одной точки поворота на оси η , можно рассматривать как неравенства, которым должны удовлетворять константы разделения $Z_{1,2}$.

Интеграл, входящий в (17), выражается через элементарные функции, если в (18) пренебречь величинами порядка $Z_2/\eta, m^2/\eta^2$, затухающими с ростом η . Подобное приближение использовалось, в частности, при вычислениях влияния постоянного внешнего поля на вероятность фотоэффекта в атомах [15]. Полученные при этом результаты хорошо согласуются с экспериментом. Данное приближение трудно обосновать для слабых полей F , однако именно этот случай не представляет интереса для рассматриваемой здесь задачи. Таким образом,

$$f_2(\eta) \approx \frac{2A_2}{\sqrt{2E+F\eta}} \cos \left[\frac{\sqrt{(2E+F\eta)^3}}{3F} + \phi(F) \right]. \quad (20)$$

Зависящая от напряженности поля фаза $\phi(F)$ вычисляется квазиклассически из сопоставления аргументов косинуса в (17) и (20):

$$\phi(F) = -\frac{\pi}{4} + \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[\int_{\eta_0}^{\eta} p_2(x) dx - \frac{\sqrt{(2E+F\eta)^3}}{3F} \right]. \quad (21)$$

Интеграл в (21) преобразуется с помощью интегрирования по частям:

$$\int_{\eta_0}^{\eta} p_2(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} \left\{ 1 + \frac{4Z_2x - m^2}{x^2(2E + Fx)} \right\}^{1/2} \sqrt{2E + Fx} dx = \frac{\sqrt{(2E+Fx)^3}}{3F} \left\{ 1 + \frac{4Z_2x - m^2}{x^2(2E+Fx)} \right\}^{1/2} \Big|_{\eta_0}^{\eta} + \frac{1}{6F} \times \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{8FZ_2x^2 + (8EZ_2 - 3m^2F)x - 4Em^2}{\sqrt{x^5} \sqrt{(2E + Fx)\eta^2 + 4Z_2x - m^2}} dx. \quad (22)$$

На нижнем пределе выражение в фигурных скобках в (22) обращается в нуль по определению η_0 . Совершая предельный переход в (21), приходим к окончательному выражению для $\phi(F)$:

$$\phi(F) = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6F} \times \int_{\eta_0}^{\infty} \frac{8FZ_2\eta^2 + (8EZ_2 - 3m^2F)\eta - 4Em^2}{\sqrt{\eta^5} \sqrt{(2E + F\eta)\eta^2 + 4Z_2\eta - m^2}} d\eta.$$

Нормировочные постоянные A_1, A_2 , входящие в формулы (9), (17), при нормировке на δ -функцию от энергии задаются условием

$$\frac{1}{4} \int_{\eta_0}^{\infty} d\eta \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right) f_1^2(\xi) f_2(E; \eta) f_2(E'; \eta) = \delta(E - E'). \quad (23)$$

Поскольку значение интеграла (23) определяется асимптотически большими значениями η , слагаемое

η^{-1} здесь может быть опущено. Вычисление интеграла по ξ дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1^2} &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{2\xi p_1(\xi)} \cos^2 \left(\int_{\xi_1}^{\xi} p_1(\xi') d\xi' - \frac{\pi}{4} \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2\sqrt{F}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1)(\xi_2 - \xi)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{F(\xi_2 - \xi_0)}} K \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_0} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Нормировочная константа A_2 определяется из сравнения (20) с асимптотикой волновой функции одномерной задачи в однородном поле (см. [12, § 24]):

$$A_2 = \frac{1}{2^{1/3} \sqrt{\pi}}.$$

3. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим теперь нестационарное уравнение Шредингера (1) в поле (4) в случае инфинитного движения электрона. Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) e^{-iEt}, \quad (25)$$

потребовав, чтобы при «замораживании» поля ($\omega \rightarrow 0$) неизвестная функция $\Phi(\mathbf{r}, t)$ переставала зависеть от времени, а величина $E > 0$ переходила бы в полную энергию. Мы будем называть здесь E квазиэнергией, хотя традиционно она определяется предельным переходом при выключении поля ($F \rightarrow 0$).

Чтобы при дифференцировании решения (25) по времени можно было пренебречь производной $\partial_t \Phi(\mathbf{r}, t)$, следует формально потребовать выполнения условия

$$\omega \ll E. \quad (26)$$

Практически, однако, данное приближение оказывается достаточно хорошим, когда энергия электрона всего лишь в два раза превышает энергию фотона (см., например, [16]).

Подставляя (25) в (1) и учитывая (26), приходим к уравнению, по своей структуре совпадающему со стационарным уравнением Шредингера, но с параметрической зависимостью от времени:

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{r} \Phi(\mathbf{r}, t) + zF \sin(\omega t) \Phi(\mathbf{r}, t) = E \Phi(\mathbf{r}, t).$$

Его решение автоматически получается из (8) заменой

$$F \rightarrow F \sin \omega t. \quad (27)$$

Подобная замена впервые была использована в работе [17] для учета влияния кулоновского потенциала на вероятность туннельного эффекта в атомах, помещенных в сильное лазерное поле. Успех этой теории в описании большого числа экспериментальных данных [18] позволяет надеяться, что и волновые функции, построенные с использованием того же физического приближения, будут обладать хорошей точностью.

Таким образом, модельные волновые функции для описания движения электрона в интенсивном низкочастотном лазерном поле в непрерывном спектре имеют следующий вид:

$$\Psi_{En_\xi m}(F; \mathbf{r}, t) = \Psi_{En_\xi m}^{(0)}(F \sin \omega t, \mathbf{r}) e^{-iEt}. \quad (28)$$

Напомним, что функция $\Psi_{En_\xi m}^{(0)}(F, \mathbf{r})$ определяется выражением (8). Параметры E , n_ξ и m предполагаются заданными.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ

Для тестирования функций (28) воспользуемся нестационарной теоремой Зигерта (3). Для определенности исследуем z -компоненту координаты при свободно-свободных переходах в задаче о рассеянии электрона на кулоновском потенциале ($Z = 1$) в присутствии лазерного поля.

При построении волновых функций начального и конечного состояний будем использовать модельное выражение (28). Ограничимся случаем $m = 1$ и $n_\xi = 0$, предполагая, что при переходах квантовое число n_ξ не изменяется.

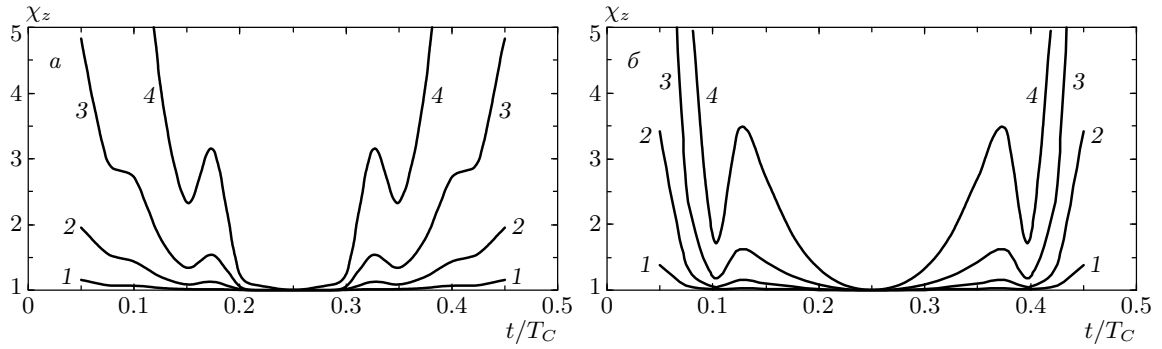
Тестовый параметр вычисляем по следующей формуле:

$$\chi_z = \frac{|\partial_t \langle f | z | i \rangle|^2}{|\langle f | \hat{p}_z | i \rangle|^2}. \quad (29)$$

Заметим, что в отличие от общей формулы (3) здесь матричный элемент от векторного потенциала обращается в нуль из-за ортогональности функций (8).

Для устранения сингулярностей в (29) выразим матричный элемент $\langle f | z | i \rangle$ через $\langle f | \hat{p}_z | i \rangle$ в соответствии со стационарной теоремой Зигерта (2):

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_{E_f n_\xi 1}^{(0)} \left| z \right| \Psi_{E_i n_\xi 1}^{(0)} \right\rangle &= \\ &= \frac{i}{E_i - E_f} \left\langle \Psi_{E_f n_\xi 1}^{(0)} \left| \hat{p}_z \right| \Psi_{E_i n_\xi 1}^{(0)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (30)$$



Значения тестового параметра χ_z как функции времени ($T_C = 2\pi/\omega$). Значения энергий $E_{i,f}$ электрона и частот ω лазерного поля даны в атомных единицах: *а* — $E_i = 0.002$, $E_f = 0.001$, $\omega = 0.001$ (1), 0.0025 (2), 0.005 (3), 0.01 (4); *б* — $E_i = 0.2$, $E_f = 0.1$, $\omega = 0.01$ (1), 0.025 (2), 0.05 (3), 0.1 (4)

После подстановки (30) в (29) с учетом (28) имеем

$$\chi_z = 1 + \frac{F^2 \omega^2 \cos^2 \omega t}{(E_f - E_i)^2} \times \left. \frac{\left| \partial_F \langle \Psi_{E_f n_{\xi 1}}^{(0)} | \hat{p}_z | \Psi_{E_i n_{\xi 1}}^{(0)} \rangle \right|^2}{\left| \langle \Psi_{E_f n_{\xi 1}}^{(0)} | \hat{p}_z | \Psi_{E_i n_{\xi 1}}^{(0)} \rangle \right|^2} \right|_{F \rightarrow F \sin \omega t} \quad (31)$$

Здесь

$$\langle \Psi_{E_f n_{\xi 1}}^{(0)} | \hat{p}_z | \Psi_{E_i n_{\xi 1}}^{(0)} \rangle = -\frac{i}{2} [I_{11} I_{21} - I_{12} I_{22}],$$

$$I_{kk} = \int_{x_{k1}}^{x_{k2}} f_{kf}^*(x_k) \frac{df_{ki}(x_k)}{dx_k} dx_k,$$

$$I_{kl} = \int_{x_{k1}}^{x_{k2}} f_{kf}^*(x_k) f_{ki}(x_k) \frac{dx_k}{x_k},$$

$$k, l = 1, 2, \quad k \neq l,$$

$$x_1 = \xi, \quad x_{11} = \xi_1, \quad x_{12} = \xi_2,$$

$$x_2 = \eta, \quad x_{21} = \eta_0, \quad x_{22} = \eta_{max}.$$

Величина η_{max} сверху не ограничена вследствие инфинитного характера движения, но при достаточно больших η_{max} значение χ_z перестает зависеть от η_{max} . В настоящей работе использовалось $\eta_{max} = 20-40$.

При дифференцировании квазиклассических функции (9), (17) предэкспоненциальные множители следует рассматривать как постоянные, т. е. не дифференцировать:

$$\frac{df_k}{dx_k} = -A_k \sqrt{p_k(x_k)} \sin \left(\int_{x_{k1}}^x p_k(x') dx' - \frac{\pi}{4} \right).$$

Таким образом,

$$I_{kk} = -\frac{1}{2} A_{kf}^* A_{ki} \int_{x_{k1}}^{x_{k2}} \sqrt{\frac{p_{2i}(x_k)}{p_{2f}(x_k)}} \times \left\{ \cos[P_k^{(+)}(x_k)] + \sin[P_k^{(-)}(x_k)] \right\} dx_k,$$

$$I_{kl} = -\frac{1}{2} A_{kf}^* A_{ki} \int_{x_{k1}}^{x_{k2}} \sqrt{p_{2i}(x_k) p_{2f}(x_k)} \times \left\{ \sin[P_k^{(+)}(x_k)] + \cos[P_k^{(-)}(x_k)] \right\} \frac{dx_k}{x_k},$$

где

$$P_k^{(\pm)}(x_k) = \int_{x_{k1}}^{x_k} [p_{kf}(x') \pm p_{ki}(x')] dx'.$$

Интегрирование по координатам и дифференцирование по напряженности F поля проводилось в численном виде. Отметим также, что слагаемыми типа

$$\int_{\eta_0}^{\eta_{max}} g(\eta) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \left\{ \int_{\eta_0}^{\eta} [p_{2f}(\eta') + p_{2i}(\eta')] d\eta' \right\} d\eta,$$

где $g(\eta)$ — медленно меняющаяся функция, можно пренебречь ввиду быстрой осцилляции синуса (косинуса) и возрастания $p_2(\eta)$.

Результаты расчета параметра χ_z для различных частот инфракрасного диапазона, импульса электрона и заданной напряженности поля $F = 0.5$ ат. ед. представлены на рисунке как функции времени. Видно, что уменьшение частоты приводит

к возрастанию точности функций (28). Улучшению точности также способствует рост импульса рассеиваемого электрона в соответствии с условием (26). Таким образом, в исследуемом диапазоне напряженностей, энергий и частот критерий применимости функций (28) может иметь следующую формулировку:

$$\chi_z = 1-1.2, \quad \text{если } \omega/F < 0.01.$$

При выполнении данного условия теорема Зигерта будет нарушена в интервалах времени длительностью, не превосходящей 10% от лазерного периода. Нарушение теоремы Зигерта в начале и в конце полупериода связано с неприменимостью изложенных расчетных методов для слабых полей, а именно в эти промежутки времени напряженность поля мала.

Таким образом, хорошее согласие теории [17, 18] с экспериментом вместе с положительными результатами, основанными на нестационарной теореме Зигерта, дают основание ожидать, что полученные функции (28) пригодны для адекватного описания движения электрона в кулоновском и интенсивном низкочастотном лазерном полях. В статическом пределе они переходят в решение стационарной задачи (7).

Авторы благодарят Ф. Элоцкого (F. Ehlötzky) и Г. Ферранте (G. Ferrante) за полезное обсуждение полученных результатов. Работа выполнялась при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 02-02-17466, 02-02-06131) и US CRDF и Минобрразования РФ (грант № VZ-010-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Я. Амуся, *Атомный фотоэффект*, Наука, Москва (1987).
2. О. Бор, Б. Мотгельсон, *Структура ядра*, Мир, Москва (1971).
3. A. S. Kornev and B. A. Zon, *Las. Phys.* **12**, 795 (2002).
4. A. S. Kornev and B. A. Zon, *J. Phys. B* **35**, 2451 (2002).
5. M. Jain and N. Tsoar, *Phys. Rev. A* **18**, 538 (1978).
6. P. Cavalieri and G. Ferrante, *J. Phys. B* **13**, 4495 (1980).
7. G. Duchateau et al., *J. Phys. B* **33**, L571 (2000).
8. G. Duchateau, E. Cormier, and R. Gayet, *Eur. Phys. J. D* **11**, 191 (2000).
9. A. Jaroń, J. Z. Kamiński, and F. Ehlötzky, *Phys. Rev. A* **61**, 023404 (2000).
10. S. M. Li, Y. G. Miao, Z. F. Zhou et al., *Phys. Rev. A* **58**, 2615 (1998).
11. D. B. Milošević and F. Ehlötzky, *Phys. Rev. A* **57**, 2859 (1998).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
13. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математическим функциям для научных работников и инженеров*, Наука, Москва (1973).
14. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).
15. В. Д. Кондратович, В. Н. Островский, *ЖЭТФ* **79**, 395 (1980).
16. G. F. Gribakin and M. Yu. Kuchiev, *Phys. Rev. A* **55**, 3760 (1997).
17. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, *ЖЭТФ* **50**, 1393 (1966).
18. М. В. Аммосов, Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *ЖЭТФ* **91**, 2008 (1986).