

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В КРИСТАЛЛЕ С ПАРАМАГНИТНЫМИ ПРИМЕСЯМИ

А. А. Заболотский*

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 27 июля 2002 г.

Теоретически исследована эволюция продольно-поперечных звуковых импульсов, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю в системе резонансных парамагнитных примесей с эффективным спином $S = 1/2$. Показано, что для равных групповых скоростей продольных и поперечных волн динамика импульсов описывается эволюционными уравнениями, которые в предельных случаях сводятся к уравнениям, интегрируемым в рамках метода обратной задачи рассеяния. Для наиболее общей интегрируемой системы уравнений, описывающей динамику акустических импульсов вне рамок приближения медленных огибающих, выведены соответствующие уравнения метода обратной задачи. С помощью этих уравнений найдены солитонное решение и автомодельное решение, описывающее передний фронт пакета генерируемых акустических импульсов при распаде начального неустойчивого состояния спиновой системы. Анализ полученных решений и моделей показал, что наличие продольной звуковой волны приводит не только к изменению амплитуды и фазы поперечной волны, но и к качественно новой динамике звука в такой среде.

PACS: 41.20.Jb, 42.50.Md, 43.25.+y

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные когерентные оптические явления, которые ассоциируются с солитонными и другими автомодельными решениями [1, 2], в настоящее время наиболее детально изучены аналитически в рамках интегрируемых моделей [3]. При распространении упругих волн в парамагнитных кристаллах солитоноподобные импульсы могут образовываться, во-первых, за счет эффектов, связанных с ангармоническими колебаниями и дисперсией [4], во-вторых, в условиях нелинейного когерентного взаимодействия акустических волн с содержащимися в среде парамагнитными примесями и, в-третьих, при акустической самоиндуцированной прозрачности (АСИП) [5–7]. Аналогия между оптическими и акустическими эффектами привела к появлению магнитной квантовой акустики [8]. В то же время эволюция звукового импульса в кристалле с парамагнитными примесями имеет ряд качественных

отличий от динамики световых волн в среде, связанных, например, с тем, что звуковая волна в кристалле может быть продольно-поперечной. Характерная длина акустического импульса не менее 10^{-4} см, т. е. много больше постоянной кристаллической решетки. Для пикосекундного акустического импульса длительностью $\tau_a \sim 10$ пс его длина составляет 10^{-7} – 10^{-6} см. Поэтому при распространении его в кристалле необходимо учитывать эффекты пространственной дисперсии, обусловленной структурой решетки, однако можно не учитывать дискретность кристаллической среды. Генерация пикосекундных акустических солитонов наблюдалась экспериментально в недавней работе [4]. Солитоны образовывались на расстоянии нескольких миллиметров вследствие баланса дисперсии, обусловленной положением атомов в кристаллической решетке, и нелинейности, возникающей из ангармоничности межатомных сил. Аналог оптической самоиндуцированной прозрачности — акустический резонансный эффект — наблюдался в низкотемпературных кристаллических образцах, содержащих пара-

*E-mail: zabolotskii@ae.nsk.su

магнитные примеси. Этот эффект наблюдался на примесях Fe^{2+} в кристаллических матрицах MgO [9] и LiNbO_3 [10] при распространении продольного акустического импульса под углом к внешнему полю.

В общем случае групповые скорости продольной v_{\parallel} и поперечной v_{\perp} компонент акустического импульса в твердом теле различны. Это приводит к тому, что локальное взаимодействие импульсов этих компонент длиной l_a ограничено временем $t_{int} \sim l_a/(v_{\parallel} - v_{\perp})$. Наиболее эффективно взаимодействие импульсов происходит при близости фазовых скоростей, $v_{\parallel} \approx v_{\perp}$. Такая ситуация реализуется в упруго-изотропных кристаллах, в которых скорости продольной и поперечной составляющих упругого поля не зависят от направления. Эти условия лучше всего выполняются для ионных кристаллов галогенидов щелочных металлов с центральными силами взаимодействия между атомами [11]. К таким кристаллам относится, например, NaBr [11].

При распространении в кристалле продольная и поперечная акустические волны могут влиять на динамику друг друга посредством взаимодействия с парамагнитными примесями. Теория АСИП для поперечного импульса, распространяющегося параллельно магнитному полю в системе спинов $S = 1/2$, развивалась в работе [5]. Эта теория была обобщена для продольно-поперечных акустических волн в работах [6, 7], в которых были выведены уравнения, описывающие динамику акустических импульсов. Для решения этих достаточно сложных эволюционных уравнений авторы использовали ряд приближений. В [7] теоретически исследовалась АСИП квазимонохроматических импульсов с поперечно-продольной структурой, распространяющихся параллельно направлению вектора постоянного магнитного поля в системе парамагнитных примесей с эффективным спином $S = 1/2$ при условии $v_{\perp} = v_{\parallel}$ и в предположении, что частота поперечной компоненты квазимонохроматического импульса совпадает с частотой зеемановского расщепления крамерсовского дублета. Для поперечного поля использовалось приближение медленной огибающей (точного резонанса), а для упрощения уравнения для продольного поля дополнительно применялось приближение однонаправленности распространения акустических волн. В [6] рассматривался случай предельно малой длительности акустических импульсов, аналогичный случаю предельно коротких оптических импульсов [2]. Помимо этого авторы работ [6, 7] применяли для упрощения уравнений Блоха метод Вент-

целя–Бриллюэна–Крамерса–Джеффри, который требует достаточно медленного изменения полей. Однако и при выполнении всех соответствующих ограничений на динамику поля полученные этими авторами уравнения не являются интегрируемыми. Исключением является условие отсутствия продольной волны, при котором система упрощенных уравнений сводится к хорошо изученному уравнению синус-Гордон. Поэтому использованные в работах [6, 7] приближения не позволяют достаточно детально изучить динамику и взаимное влияние поперечной и продольной акустических волн.

В то же время достаточно богатая структура этих уравнений открывает возможность сведения их, при выполнении вполне реалистических приближений, к некоторым интегрируемым моделям при наложении аналогичных жестких условий и без них. В настоящей работе показано, что для перехода от исходных эволюционных уравнений к интегрируемой системе уравнений достаточно применить приближение однонаправленности распространения волн и условие равенства групповых скоростей продольной и поперечной акустических волн. Получающаяся при этом новая интегрируемая система является родственной интегрируемой системе уравнений, найденной ранее автором в теории четырехволнового смешения оптических импульсов в средах с двухфотонно-индуцированной керровской нелинейностью [12, 13]. В то же время полученная здесь интегрируемая система уравнений обладает симметрией спектральной задачи, для которой аппарат метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [3] не был развит. Применение МОЗР к этой модели позволяет исследовать различные режимы эволюции пикосекундных акустических импульсов вне рамок приближения медленных огибающих.

В настоящей работе развит аппарат МОЗР для полученной системы уравнений и найдено солитонное решение модели, которое описывает, в частности, в явном виде деформацию формы и нелинейное вращение поляризации акустического импульса поперечной волны в присутствии импульса продольной волны. Помимо солитонных решений, ассоциирующихся с явлением АСИП, в рамках МОЗР удастся провести анализ и других режимов эволюции импульсов. Нередко солитонные решения требуют более жестких условий для генерации и наблюдения, чем решения иного рода. Например, в случае, когда в начальный момент спины примесных ионов направлены вдоль магнитного поля, возникает неустойчивое состояние системы, для вывода из которого достаточно слабой затравочной акустиче-

ской волны. В работе в рамках МОЗР для такой спиновой системы найдена форма импульса, отвечающего переднему фронту пакета генерируемых импульсов, при стремлении системы к устойчивому состоянию.

Помимо мощных пикосекундных акустических импульсов возможно образование достаточно слабых акустических импульсов, для генерации которых требуются меньшие мощности. Представляет интерес исследование физических условий генерации и параметров таких импульсов с малой амплитудой. С этой точки зрения важно определить тип взаимодействия, минимальные нелинейности и другие условия, при которых возможно образование устойчивых нелинейных структур, таких как солитоны и подобные им решения. Поиск интегрируемых редукций важен и потому, что наиболее детальную информацию удается получить, решая модели, интегрируемые в рамках МОЗР, и развивая для близких моделей теорию возмущений. Поэтому в работе выведены и другие интегрируемые варианты исходной системы уравнений, получаемые при переходе к малым амплитудам и (или) к пренебрежимо малому изменению проекции эффективного спина на направление магнитного поля. Показано, что при переходе к квазимонохроматическим акустическим импульсам исходная система уравнений также приводится к интегрируемой системе уравнений, которая ранее возникла в связи с различными применениями в нелинейной оптике [14]. Далее показано, что при дополнительном условии незначительного изменения заселенностей зеемановских уровней полученная система сводится к интегрируемому уравнению, родственному модели Тирринга, применение которой в нелинейной оптике описано, например, в работе [15]. Анализ полученных уравнений динамики акустических волн и сравнение с полученными в нелинейной оптике решениями родственных уравнений позволяют выявить ряд новых физических особенностей наблюдения эффектов, связанных с присутствием продольной акустической волны, без детального решения эволюционных уравнений.

Структура работы такова. В разд. 2 приводится вывод основной системы эволюционных уравнений, описывающих динамику продольно-поперечной волны. В п. 3.1 найдена наиболее общая интегрируемая редукция исходной системы уравнений этой системы, в п. 3.2 приводятся соответствующие представления Лакса и развивается аппарат МОЗР для этой системы. В п. 3.3 найдено односолитонное решение этой модели. В п. 3.4 приводится анализ распада первоначально неустойчивого состояния и дается асим-

птотическое решение для первого импульса из пакета нелинейных осцилляций, отвечающих этому решению. Раздел 4 посвящен выводу и обсуждению других интегрируемых редукций модели. В разд. 5 приводится обсуждение полученных результатов.

2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведем вывод уравнений, описывающих динамику продольно-поперечной волны в кристалле с парамагнитными примесями, следуя работе [6]. Считаем, что внешнее постоянное и однородное магнитное поле \mathbf{B} направлено по оси z . Зеемановское взаимодействие магнитного момента $\hat{\mu}^{(a)}$, находящегося в точке a , вносит в общий гамильтониан вклад $\hat{H}_a = -\hat{\mu}^{(a)}\mathbf{B}$. Компоненты $\hat{\mu}^{(a)}$ выражаются через компоненты спина $\mathbf{S}^{(a)}(\mathbf{r}_a)$, где \mathbf{r}_a — радиус-вектор a -го спина, следующим образом:

$$\hat{\mu}_j^{(a)} = - \sum_k \mu_B g_{jk} \hat{S}_k^{(a)}.$$

Здесь μ_B — магнетон Бора, g_{jk} — компоненты тензора Ланде. С учетом этого

$$\hat{H}^z = \sum_{a=1}^N \hat{H}_a^z = \mu_B \sum_a \sum_{j,k} B_j g_{jk} \hat{S}_k^{(a)}, \quad (1)$$

где N — общее число спинов. Поскольку эффективный спин равен $1/2$, он может быть разложен по матрицам Паули:

$$\begin{aligned} \hat{S}_x^a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{S}_y^a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_z^a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Считаем, что координаты x, y, z вдоль главных осей тензора Ланде совпадают с осями симметрии кристалла, тогда в недеформированной невозмущенной среде тензор Ланде диагонален: $g_{jk} = g_{jk}^{(0)} = g_{jj} \delta_{jk}$, δ_{jk} — дельта-функция. Деформацию кристалла акустической волной описываем линейными поправками к тензору Ланде:

$$g_{jk} = g_{jk}^{(0)} + \sum_{p,q} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial \epsilon_{pq}} \right)_0 \epsilon_{pq} + \dots, \quad (3)$$

где ϵ — тензор упругих деформаций кристалла в месте расположения спина. Производные берутся в точке с нулевой деформаций. Компоненты тензора

деформаций выражаются через компоненты вектора смещений $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ следующим образом:

$$\epsilon_{pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_p}{\partial x_q} + \frac{\partial U_q}{\partial x_p} \right). \quad (4)$$

Гамильтониан (1) принимает вид

$$\hat{H}_s = \sum_{\alpha} \sum_j \mu_B g_{jj} B_j \hat{S}_j^{(\alpha)}. \quad (5)$$

Спин-фононное взаимодействие описывается гамильтонианом

$$\hat{H}_{int} = \sum_{\alpha} \sum_{j,k,p,q} \mu_B B_j F_{jkpq} \epsilon_{pq} \hat{S}_k^{(\alpha)}. \quad (6)$$

Здесь $F_{jkpq} = \partial g_{jk} / \partial \epsilon_{pq}$ — постоянные спин-фононной связи [10, 16].

Динамика акустического поля в кристалле без учета ангармонизма описывается гамильтонианом

$$H_a = \int \left(\frac{1}{2n_0} \sum_j p_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l,m} \lambda_{jklm} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) d\mathbf{r}, \quad (7)$$

где n_0 — средняя плотность кристалла, p_j , ($j = x, y, z$) — компоненты плотности импульса, возникающие при динамических смещениях, λ_{jklm} — тензор модулей упругости кристалла [17]. Интеграл в (7) берется по объему кристалла. Предполагается, что число фононов велико и справедливо классическое описание динамики акустического поля. В то же время двухуровневая спиновая система требует квантовомеханического описания. Для $S = 1/2$ члены, квадратичные по спиновым операторам, можно не учитывать (см. детальнее в [18]). Здесь справедлива аналогия с взаимодействием классического электромагнитного поля с оптической квантовой двухуровневой средой [19].

Как и в случае оптической среды, от описания динамики спина можно перейти к уравнениям эволюции для элементов матрицы плотности $\hat{\rho}^{(a)}$:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}^{(a)}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}^{(a)}], \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}}. \quad (9)$$

Здесь $H = H_a + \langle \hat{H}_{int} \rangle$, где взаимодействие спина и

поля упругого импульса описывается классическими уравнениями Гамильтона для сплошной среды:

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}_{int} \rangle &= \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{j,k,p,q} \mu_B B_j F_{jkpq} \int \epsilon_{pq}(\mathbf{r}) \langle \hat{S}_k^{(\alpha)}(\mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь n — концентрация парамагнитных примесей, угловые скобки означают усреднение по квантовым состояниям, а суммирование по однородно расположенным в кристалле ионам со спинами $1/2$ заменено интегрированием по всему пространству.

Рассматривается эволюция поля только по оси z параллельно вектору \mathbf{B} и оси симметрии четвертого порядка. Преобразования симметрии в этом случае включают поворот на 90° вокруг оси z и отражения $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$ в плоскости $z = 0$. С учетом этих условий выражения для \hat{H}_s и \hat{H}_{int} принимают вид [6]

$$\hat{H}_s = \sum_{\alpha} \hbar \omega_B \hat{S}_z^{(\alpha)}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} &= \sum_{\alpha} \frac{\hbar \omega_B}{g} \times \\ &\times \left\{ F_{11} \epsilon_{zz} \hat{S}_z^{(\alpha)} + F_{44} \left(\epsilon_{xz} \hat{S}_x^{(\alpha)} + \epsilon_{yz} \hat{S}_y^{(\alpha)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\omega_B = g\mu_B B / \hbar$ — частота зеемановского расщепления крэммеровского дублета и $g = g_{xx} = g_{yy} = g_{zz}$.

При указанных условиях симметрии гамильтониан H_a имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_a &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{n_0} + \lambda_{11} \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \lambda_{44} \left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь для индексов используются обозначения Фохта: $xx \rightarrow 1$, $yy \rightarrow 2$, $zz \rightarrow 3$, $yz \rightarrow 4$, $xz \rightarrow 5$, $xy \rightarrow 6$.

Используя (8)–(10) и (11)–(13), получаем основную систему эволюционных уравнений (ср. [6])

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{\perp}}{\partial t^2} - v_{\perp}^2 \frac{\partial^2 \epsilon_{\perp}}{\partial z^2} = \frac{nG_{\perp}}{n_0} \frac{\partial^2 S_{\perp}}{\partial z^2}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{\parallel}}{\partial t^2} - v_{\parallel}^2 \frac{\partial^2 \epsilon_{\perp}}{\partial z^2} = -\frac{nG_{\parallel}}{n_0} \frac{\partial^2 S_3}{\partial z^2}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial S_{\perp}}{\partial t} = i \left(\frac{G_{\parallel} \epsilon_{\parallel}}{\hbar} + \omega_B \right) S_{\perp} + i \frac{G_{\perp} \epsilon_{\perp}}{\hbar} S_3, \quad (16)$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial t} = \frac{iG_{\perp}}{2\hbar} (\epsilon_{\perp}^* S_{\perp} - \epsilon_{\perp} S_{\perp}^*), \quad (17)$$

где $G_{\parallel} = \hbar\omega_B F_{11}/g$, $G_{\perp} = \hbar\omega_B F_{44}/g$, $\epsilon_{\parallel} = \epsilon_{zz}$, $\epsilon_{\perp} = \epsilon_{xz} + i\epsilon_{yz}$, $v_{\parallel} = \sqrt{\lambda_{11}/n_0}$, $v_{\perp} = \sqrt{\lambda_{44}/n_0}$, $S_3 = (\rho_{11} - \rho_{22})/2$, $S_{\perp} = \rho_{21}$. Полученная система уравнений (14)–(17) описывает распространение акустических импульсов в двухуровневой среде, причем в уравнениях Блоха (16), (17) продольная компонента приводит лишь к нелинейной фазовой модуляции. Однако, как будет показано ниже, продольное поле может приводить к качественно новой динамике акустического импульса. Считаем далее, что групповые скорости продольной и поперечной акустической волн равны: $v_{\perp} = v_{\parallel} = v$.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ ЭВОЛЮЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ПОРЯДКА ω_B^{-1}

3.1. Вывод интегрируемой модели

Получим наиболее общую интегрируемую редукцию основной системы уравнений (14)–(17). Эта редукция описывает динамику акустических импульсов длительностью порядка или менее $\pi\omega_B^{-1}$. При таком условии неприменимо приближение медленных огибающих. В реальных средах этому могут отвечать пикосекундные акустические импульсы [6]. Уравнения, описывающие динамику таких импульсов, сложны для анализа, однако остается возможность упрощения системы (14)–(17), возникающая при достаточно малой плотности парамагнитных примесей. Отметим, что такая физическая ситуация реализуется в подавляющем большинстве случаев. Это приближение аналогично использованному в работе [20] при выводе редуцированных уравнений Максвелла–Блоха для двухуровневой оптической среды и называется условием однонаправленности распространения волн. При этих условиях справедливо приближенное формальное равенство

$$\partial_z \approx -v^{-1}\partial_t + O(\varepsilon),$$

где ε — малый параметр. Физически это означает, что акустические импульсы распространяются в среде со скоростью близкой к групповой скорости v . Нормированная плотность примесей имеет тот же порядок малости, что и производная $\partial_{\tilde{\chi}} = \partial_z + v^{-1}\partial_t$ от амплитуд акустических полей. Теперь производную по z в правых частях уравнений (14), (15) можно с точностью $O(\varepsilon^2)$ заменить на $v^{-1}\partial_t$. Таким

образом, при выполнении условия однонаправленности распространения импульсов акустического поля система (14), (15) приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial \epsilon_{\perp}}{\partial \tilde{\chi}} = \frac{nG_{\perp}}{2v^2 n_0} \frac{\partial S_{\perp}}{\partial t}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{\parallel}}{\partial \tilde{\chi}} = -\frac{nG_{\parallel}}{2v^2 n_0} \frac{\partial S_3}{\partial t}. \quad (19)$$

Теперь из (16)–(19) нетрудно найти, что амплитуды продольного и поперечного полей связаны простым соотношением

$$|\epsilon_{\perp}^2| + \left(\epsilon_{\parallel} + \frac{2\omega_B \hbar}{G_{\parallel}} \right)^2 = U_0^2(t). \quad (20)$$

Здесь действительная функция $U_0(t)$ определяется граничными условиями. Считаем далее, что $U_0(t) = \text{const}$. С учетом (20) новая интегрируемая система (16)–(19) принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_{\chi} E &= i\beta_0 \sqrt{1 - |E|^2} S_{\perp} + iES_3, \\ \partial_{\tau} S_{\perp} &= i\beta_0 \sqrt{1 - |E|^2} S_{\perp} + iES_3, \\ \partial_{\tau} S_3 &= -\frac{i}{2} (ES_{\perp}^* - E^* S_{\perp}), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} E &= \frac{\epsilon_{\perp}}{U_0(t)}, \quad \chi = \tilde{\chi} \frac{nG_{\perp}^2}{2\hbar m_0 v^2}, \\ \tau &= t \frac{U_0 G_{\perp}}{\hbar}, \quad \beta_0 = \frac{G_{\parallel}}{G_{\perp}}. \end{aligned}$$

3.2. Аппарат метода обратной задачи рассеяния для системы (21)

Будем решать задачу на всей оси для $E(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \pm\infty$, предполагая, что спиновая система в начальный и конечный моменты находится в основном устойчивом состоянии, отвечающем минимуму энергии, т.е. $S_3(\tau, \chi) = 1$, $S_{\perp}(\tau, \chi) = 0$, $\tau \rightarrow \pm\infty$. Считаем, что в кристалл вводится импульс акустического поля $E(\tau, 0)$ с достаточно большой для образования солитонов площадью. Для описания соответствующей солитонной динамики удобно выбрать следующее представление Лакса для системы уравнений (21):

$$\partial_{\tau} \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda F_3 & (\lambda + \beta)E \\ -\lambda E^* & i\lambda F_3 \end{pmatrix} \Phi \equiv \hat{L}_1 \Phi, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\chi} \Phi &= \frac{1}{(2\lambda + \beta_0)} \times \\ &\times \begin{pmatrix} i\lambda S_3 & \beta_0 (\lambda + \beta) S_{\perp} \\ -\beta_0 \lambda S_{\perp}^* & -i\lambda S_3 \end{pmatrix} \Phi \equiv \hat{A}_1 \Phi, \end{aligned} \quad (23)$$

где λ — спектральный параметр,

$$F_3 = \sqrt{1 - |E|^2}, \quad \beta = \frac{1}{2} \left(\beta_0 - \frac{1}{\beta_0} \right), \quad \beta_0 \neq 0.$$

Случай $\beta_0 = 0$ здесь не рассматривается, хотя уравнения (21) в этом случае также допускают использование представления Лакса и применение аппарата МОЗР.

Спектральная задача (22) отличается от изученных родственных проблем, связанных с решением интегрируемых уравнений Гейзенберга и Ландау–Лифшица [21] или уравнений комбинационного рассеяния, четырехволнового смещения [13], свойствами симметрии. Поэтому необходимо развитие аппарата метода обратной задачи для этой модели с учетом ее специфики.

Решения спектральной задачи (22) обладают следующей инволюцией:

$$\Phi = \widehat{M} \Phi(\lambda^*)^* \widehat{M}^{-1}, \quad (24)$$

где

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda + \beta) / \lambda \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Стандартным способом вводим функции Йоста Ψ^\pm — решения уравнения (22) (для достаточно быстро исчезающего на $\tau \rightarrow \pm\infty$ потенциала $E(\tau)$) с асимптотиками

$$\Psi^\pm = \exp(-i\lambda\sigma_3\tau), \quad \tau \rightarrow \pm\infty. \quad (26)$$

Свойство симметрии (24), (25) отвечает следующей матричной форме функций Йоста:

$$\Psi^\pm = \begin{pmatrix} \psi_1^\pm & -\psi_2^\pm * (\lambda + \beta) / \lambda \\ \psi_2^\pm & \psi_1^\pm * \end{pmatrix}.$$

Эти решения связаны матрицей рассеяния \widehat{T} :

$$\Psi^- = \Psi^+ \widehat{T}. \quad (27)$$

Из свойства симметрии (24), (25) следует, что матрица рассеяния может быть выбрана в виде

$$\widehat{T} = \begin{pmatrix} a^* & b(\lambda + \beta) / \lambda \\ -b^* & a \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Функции Йоста имеют стандартные аналитические свойства, ср., например, [22]. Функция $a(\lambda)$ голоморфна в верхней полуплоскости λ , где ее нули отвечают солитонным решениям.

Представим функции Йоста в виде

$$\Psi^+(\tau) = \exp(-i\lambda\sigma_3\tau) + \int_\tau^\infty \begin{pmatrix} \lambda K_1(\tau, s) & (\lambda + \beta) K_2(\tau, s) \\ -\lambda K_2^*(\tau, s) & \lambda K_1^*(\tau, s) \end{pmatrix} \times \exp(-i\lambda\sigma_3 s) ds. \quad (29)$$

Из системы (27) следует, что

$$\psi_1^{+*} = \frac{\psi_1^{-*}}{a} - \frac{b}{a} \frac{\lambda + \beta}{\lambda} \psi_2^+, \quad (30)$$

$$\psi_2^{+*} = -\frac{\psi_2^{-*}}{a} + \frac{b}{a} \psi_1^+. \quad (31)$$

Подставляем компоненты этих функций из (29) в (30) и (31) и интегрируем полученные в результате подстановки уравнения по λ от $-\infty$ до ∞ с весом $\exp(-i\lambda y) (2\pi\lambda)^{-1}$. В итоге получаем уравнения Марченко для правого конца оси:

$$K_2^*(\tau, y) = F_0(\tau + y) + \int_\tau^\infty K_1(\tau, s) \partial_y F_0(s + y) ds, \quad y \geq \tau, \quad (32)$$

$$K_1^*(\tau, y) = - \int_\tau^\infty K_2(\tau, s) (\beta + i\partial_y) F_0(s + y) ds, \quad y \geq \tau. \quad (33)$$

Здесь введено обозначение

$$F_0(y) = \int_C \frac{b}{a}(\chi) \frac{1}{2\pi\lambda} e^{-i\lambda y} d\lambda, \quad (34)$$

где C — контур, включающий действительную ось и проходящий выше всех полюсов в верхней половине комплексной плоскости. С учетом вычетов в полюсах λ_k , находящихся в верхней полуплоскости, ядро F_0 можно представить в виде

$$F_0(y) = \int_{-\infty}^\infty \frac{b}{a}(\chi) \frac{1}{2\pi\lambda} e^{-i\lambda y} d\lambda - i \sum_k \frac{b}{\partial_\lambda a(\lambda = \lambda_k)}(\chi) \frac{1}{\lambda_k} e^{-i\lambda_k y}. \quad (35)$$

Аналогичным образом можно найти уравнения Марченко для левого конца оси (для $y \leq \tau$); после этого, используя полученные ниже результаты, нетрудно

показать, что соответствующие решения сшиваются при $y = \tau$.

Подставляя выражение (29) для Ψ^+ в спектральную задачу (22) и приравнявая выражения для разных степеней λ , находим

$$\begin{aligned} i\partial_\tau K_1(\tau, y) &= E\partial_y K_2(\tau, y) + i\beta EK_2(\tau, y) - \\ &\quad - iF_3\partial_y K_1(\tau, y), \quad y = \tau, \\ i\partial_\tau\partial_y K_1(\tau, y) &= E\partial_y^2 K_2(\tau, y) + i\beta E\partial_y K_2(\tau, y) - \\ &\quad - iF_3\partial_y^2 K_1(\tau, y), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\partial_\tau K_2(\tau, y) = iE^*\partial_y K_1(\tau, y) + F_3\partial_y K_2(\tau, y),$$

$$y = \tau,$$

$$i\partial_\tau\partial_y K_2(\tau, y) = iF_3\partial_y^2 K_2(\tau, y) - E^*\partial_y^2 K_1(\tau, y).$$

Справедливо также следующее соотношение:

$$K_2(\tau, \tau) [1 + F_3(\tau)] = E^*(\tau) [1 - iK_1(\tau, \tau)], \quad (37)$$

применяя которое и условие $F_3 + EE^* = 1$, нетрудно найти связи между потенциалами E, F_3 и ядрами $K_{1,2}$ в виде

$$\begin{aligned} F_3(\tau) &= \\ &= \frac{[1 + iK_1^*(\tau, \tau)] [1 - iK_1(\tau, \tau)] - |K_2(\tau, \tau)|^2}{[1 + iK_1^*(\tau, \tau)] [1 - iK_1(\tau, \tau)] + |K_2(\tau, \tau)|^2}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} E(\tau) &= \\ &= \frac{2 [1 - iK_1(\tau, \tau)] K_2^*(\tau, \tau)}{[1 + iK_1^*(\tau, \tau)] [1 - iK_1(\tau, \tau)] + |K_2(\tau, \tau)|^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

3.3. Односолитонное решение модели

Солитонные решения, ассоциируемые с АСИП, описывают распространение акустических импульсов без изменения формы на фоне устойчивого основного состояния. Таким состоянием для системы (22) является

$$E(\tau, \chi) = 0, \quad S_3(\tau, \chi) = 1, \quad S_\perp(\tau, \chi) = 0. \quad (40)$$

Найдем односолитонное решение задачи, отвечающее единственному собственному значению λ . Представим ядро F , отвечающее этому значению λ , в виде

$$F_0(y) = C_0(\chi)e^{-i\lambda y}. \quad (41)$$

Зависимость $C_0(\chi)$,

$$C_0 = -\frac{i}{\lambda} \left. \frac{b(\chi; \lambda)}{\partial_\eta a(\chi; \eta)} \right|_{\eta=\lambda},$$

найдена ниже.

Для решения уравнений Марченко вводим новые функции:

$$Q_1(\tau) = \int_\tau^\infty K_1(\tau, s)e^{-i\lambda s} ds,$$

$$Q_2(\tau) = \int_\tau^\infty K_2(\tau, s)e^{-i\lambda s} ds.$$

Подставляя эти функции в уравнения Марченко (33), (34) и интегрируя по y , находим

$$\begin{aligned} K_1^*(\tau, y) &= -\gamma_0^*(\chi) \frac{i(\lambda - \lambda^*)}{\lambda^*} \times \\ &\quad \times \frac{\omega(\tau) \exp(i\lambda^*\tau - i\lambda y)}{1 + \gamma_0^*(\chi)\omega^2(\tau)}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$K_2^*(\tau, y) = \frac{C_0 \exp[-i\lambda(\tau + y)]}{1 + \gamma_0(\chi)\omega^2(\tau)}, \quad (43)$$

где введено обозначение

$$\gamma_0(\chi) = -\frac{|C_0(\chi)|^2 (\lambda^* + \beta) \lambda}{(\lambda - \lambda^*)^2},$$

$$\omega(\tau) = \exp[-i\tau(\lambda - \lambda^*)].$$

Далее необходимо найти зависимость $C_0(\chi)$, которая определяется из системы (23) для $S_3(-\infty, \chi) = S_3(\infty, \chi) \equiv 1$. Эта зависимость находится с помощью формулы (вывод см. в книге [22])

$$\begin{aligned} \partial_\chi \hat{T} &= -\hat{T} \exp(-i\sigma_3 \lambda \tau) \hat{A}_s(\tau = -\infty, \chi) \exp(i\sigma_3 \lambda \tau) + \\ &\quad + \exp(-i\sigma_3 \lambda \tau) \hat{A}_s(\tau = \infty, \chi) \exp(i\sigma_3 \lambda \tau) \hat{T}. \end{aligned} \quad (44)$$

Отсюда для выбранных начальных и граничных условий, отвечающих солитонной динамике, находим

$$\frac{b(\lambda)}{\partial_\eta a(\eta)|_{\eta=\lambda}}(\chi) = -S_0 \exp\left(\frac{2i\chi\lambda}{2\lambda + \beta_0}\right), \quad (45)$$

здесь S_0 — константа. Из полученных формул следует, что функция $C_0(\chi) \exp(-i\lambda\tau) = \exp[\phi(\tau, \chi)]$ для $\lambda = i\eta + \xi$ имеет вид

$$\phi_s = i\phi_0 + \phi_1 - 2i\phi_2 + 2\phi_3, \quad (46)$$

где

$$\phi_0 = \arg\left(\frac{iS_0}{\lambda}\right), \quad \phi_1 = \ln\left|\frac{S_0}{\lambda}\right|,$$

$$\phi_2 = \xi\tau - \chi \frac{\beta_0\xi + 2(\xi^2 - \eta^2)}{(2\xi + \beta_0)^2 + 4\eta^2},$$

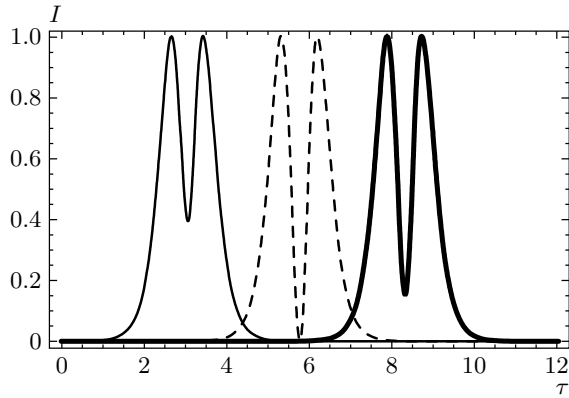


Рис. 1. Зависимость (47) для интенсивности $I(\tau) = |E|^2$ солитона при $\eta = 1$ и разных значениях β_0 : сплошная тонкая линия — $\beta_0 = 0.5$; штриховая линия — $\beta_0 = 1$; жирная линия — $\beta_0 = 1.5$. Положение солитона на оси τ произвольно

$$\phi_3 = \eta\tau - \chi \frac{2\beta_0\eta}{(2\xi + \beta_0)^2 + 4\eta^2}.$$

Далее положим для простоты $\xi = 0$. Применяя (39), (42), (43) и (45), находим односолитонное решение модели для $\lambda = i\eta$ в виде

$$E(\tau, \chi) = 2S_0\eta^{-1}\mu(\tau, \chi) [1 - \gamma_1|\mu(\tau, \chi)|^2] \times \{1 + |\mu(\tau, \chi)|^2 [|S_0|^2\eta^{-2} - \gamma_1 - \gamma_1^*] + |\mu(\tau, \chi)|^4 |\gamma_1|^2 \}^{-1} \exp(i\phi_s), \quad (47)$$

где

$$\mu(\tau, \chi) = \exp\left(2\tau\eta - \frac{4\beta_0\eta\chi}{\beta_0^2 + 4\eta^2} - \frac{4i\eta^2\chi}{\beta_0^2 + 4\eta^2}\right),$$

$$\phi_s = \arg\left[\frac{1 + \gamma_1^*|\mu(\tau, \chi)|^2}{1 + \gamma_1|\mu(\tau, \chi)|^2}\right], \quad \gamma_1 = \frac{|S_0|^2(\eta^2 + i\eta\beta)}{4\eta^4}.$$

Из выражения (46) для фазы и решения (47) видно, что форма и скорость солитона зависят от коэффициента β_0 , т. е. от относительного вклада продольного поля. С ростом β_0 скорость солитона уменьшается, стартуя с групповой скорости v в среде. При $\beta_0 \sim |\lambda|$ скорость достигает минимума и затем вновь стремится к фазовой. На рис. 1 показана зависимость интенсивности солитона от параметра τ для разных значений параметра β_0 . Из рисунка видно, что в окрестности значения $\beta_0 = 1$ в центре линии имеется провал до нуля. Этот провал исчезает при $\beta_0 \ll 1$ или $\beta_0 \gg 1$. На рис. 2 показаны мнимая и действительная части величины E , т. е. соответственно y - и x -компоненты поперечного поля. Из этого рисунка видно, что они находятся в противофа-

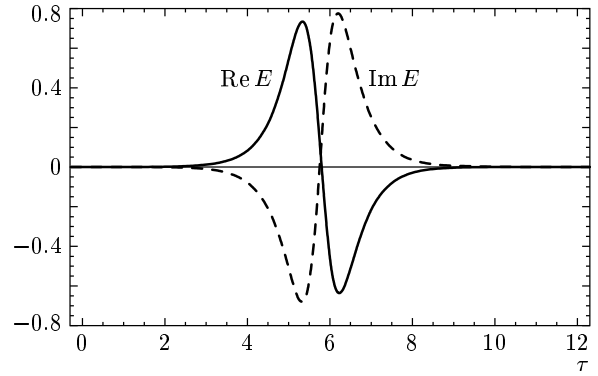


Рис. 2. Зависимость компонент поля E от τ , $\beta_0 = 1.1$

зе. При $\beta_0 = 1$ их положение относительно оси координат τ симметрично. Из формулы (38) следует, что нормированная амплитуда солитона не превышает единицы. В этом заключается важное отличие динамики акустического поля в данной модели от изученной, например, в работе [5]. Солитонное решение модели отвечает связи между амплитудами продольного и поперечного акустических полей в виде (20). Это условие означает, что при больших амплитудах продольного поля амплитуда поперечного поля уменьшается. Заметим, что коэффициент G_\perp не входит в равенство (20), т. е. в рамках данной модели с учетом использованного приближения нельзя пренебрегать амплитудой продольного поля по сравнению с амплитудой поперечного поля и наоборот. В противном случае соотношение (20) приводит к тривиальным решениям: соответственно $\epsilon_\perp(z, t) \equiv \epsilon_\perp(0, t)$ или $\epsilon_\parallel(z, t) \equiv \epsilon_\parallel(0, t)$.

Из полученного решения (47) также следует, что асимметрия, связанная с отличием β_0 от единицы, приводит к появлению нелинейной добавки ϕ_s к фазе солитона. Эта добавка описывает нелинейное вращение поляризации поперечного поля в плоскости $z = 0$ и исчезает в случае равенства коэффициентов $G_\perp = G_\parallel$.

3.4. Распад неустойчивого начального состояния спиновой системы

Односолитонные решения модели, строго говоря, описывают эволюции импульса в среде при условии, что импульс с определенной площадью был инжектирован в среду в точке $\chi = 0$. В случае отклонения от этого условия наряду с солитонными решениями следует учитывать и решения другого ти-

па, например, радиационные решения, соответствующие непрерывному спектру задачи (22). Для некоторых начально-краевых условий возможна несолитонная динамика поля, связанная с генерацией слабых и сильных акустических импульсов. Так, например, для малого затравочного импульса акустического поля $|E| \ll 1$ и $S_3(0, \chi) = 1$ солитонные решения не возникают и динамика поля ассоциируется лишь с непрерывным спектром задачи (22). Для малых амплитуд акустического поля и его производных нетрудно найти коэффициент рассеяния $\rho(\chi; \lambda) = b/a$ при $\chi = 0$:

$$\rho(0; \lambda) = \rho_0 = \frac{b(0; \lambda)}{a(0; \lambda)} \approx \approx -\frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(\tau, 0) e^{2i\lambda\tau} d\tau. \quad (48)$$

Пусть $E(\tau, 0) = \text{const}$. Тогда нетрудно показать, что коэффициент рассеяния $\rho = b/a = \rho_0$ не зависит от λ .

Для $|\rho_0| \ll 1$ приближенное решение уравнений Марченко (31), (33) имеет вид

$$\begin{aligned} K_2^*(\tau, y) &\approx F_0(\tau + y) + O(|\rho_0|^3), \\ K_1(\tau, y) &\sim O(|\rho_0|^2). \end{aligned} \quad (49)$$

Ядро F_0 , вычисленное приближенно для $\sqrt{\beta_0(\tau + y)}/2\chi \ll 1$, имеет вид

$$\begin{aligned} F_0(\tau + y, \chi) &= \\ &= \frac{\rho_0}{2\pi} \int_{C_1} \frac{\exp \left[\frac{\zeta}{2} \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) - i \frac{(\tau + y)\beta_0}{2} - i\chi \right]}{i\mu - \sqrt{\beta_0(\tau + y)}/2\chi} d\mu \approx \\ &\approx i\rho_0 \left[J_0(\zeta) + \sqrt{\frac{\beta_0(\tau + y)}{2\chi}} J_1(\zeta) + \dots \right] \times \\ &\quad \times \exp \left[i \frac{(\tau + y)\beta_0}{2} - i\chi \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь $J_{0,1}(\zeta)$ — функция Бесселя, $\zeta = \sqrt{2\beta_0\chi(y + \tau)}$. С учетом выражения (39) находим

$$\begin{aligned} E(\tau, \chi) &= i\rho_0 \left[J_0(\theta) + \sqrt{\frac{\beta_0(\tau)}{\chi}} J_1(\theta) \right] \times \\ &\quad \times \exp [i(\tau)\beta_0 - i\chi] \left[1 + O \left(\sqrt{\frac{\beta_0(\tau)}{\chi}} \right) \right] + \\ &\quad + O(|\rho_0|^3). \end{aligned} \quad (51)$$

Здесь $\theta = 2\sqrt{\beta_0\chi\tau}$. Из этого решения следует, что динамика малого начального акустического поля

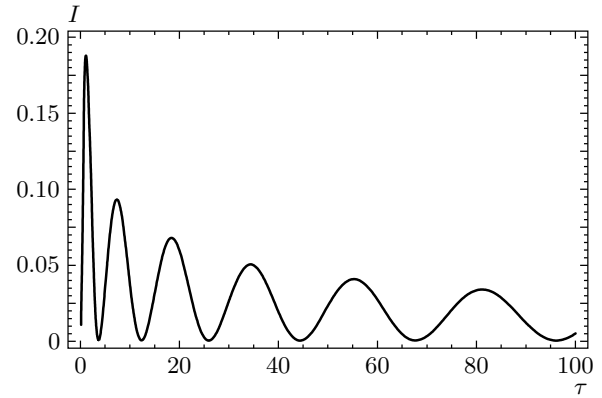


Рис. 3. Зависимость интенсивности $I = |E|^2$ от τ для малого начального отклонения от устойчивого основного состояния

описывается затухающими осцилляциями (рис. 3). Нелинейные эффекты, дающие поправку порядка $|\rho_0|^3$, могут быть легко вычислены итерациями с помощью уравнений Марченко (31), (33).

Рассмотрим начальные условия, отвечающие неустойчивому состоянию среды: в момент включения поля спины примесных ионов выстроены и направлены вдоль направления магнитного поля. Система под действием возмущений выходит из этого состояния и стремится к устойчивому состоянию, при котором спины выстроены вдоль поля, но направлены в противоположном направлении. Это асимптотическое состояние отвечает минимуму энергии. Найдем решение для формы переднего фронта общего решения, описывающего переход системы в устойчивое состояние.

Будем решать задачу для начально-краевых условий, отвечающих неустойчивому состоянию и малой (затравочной) акустической деформации кристалла:

$$\begin{aligned} |E(\tau, 0)| &= \text{const} \ll 1, & S_3(-\infty, \chi) &= -1, \\ S_{\perp}(-\infty, \chi) &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Затравочное поле $E(\tau, 0)$ вызывает распад этого состояния, и система стремится к устойчивому состоянию (40), которое достигается при $\chi \rightarrow \infty$.

Как и выше, находим, что $\rho_0(\chi)$ не зависит от λ . Вычислим ядро F (35) с учетом зависимости данных рассеяния от χ и условий (52), т. е. без учета дискретного спектра. Для начально-краевых условий (52) достаточно учесть вклад только непрерывного спектра задачи. Зависимость $\rho(\chi)$ определяется

с помощью выражения (44) и имеет вид

$$\rho(\chi) = \frac{b(\chi; \lambda)}{a(\chi; \lambda)} = \rho_0 \exp\left(-\frac{2i\chi\lambda}{2\lambda + \beta_0}\right). \quad (53)$$

Теперь найдем выражение для ядер $F_0(\tau + s)$ и $i\partial_y F_0(\tau + s)$ (35). Для этого введем в правой части выражения (35) новую переменную интегрирования $\lambda = \sqrt{\beta_0\chi/2y}\mu - \beta_0/2$. Деформируя контур интегрирования так, чтобы он огибал точку $\mu = i$ в верхней полуплоскости, находим

$$\begin{aligned} F_0(y, \chi) &= \\ &= \frac{\rho_0}{2\pi} \int_{C_1} \frac{\exp\left[\frac{\vartheta}{2}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) + i\frac{y\beta_0}{2} - i\chi\right]}{\mu - \sqrt{\beta_0 y/2\chi}} d\mu \approx \\ &\approx i\rho_0 \left[I_0(\vartheta) + \sqrt{\frac{\beta_0 y}{2\chi}} I_1(\vartheta) + \dots \right] \times \\ &\quad \times \exp\left(i\frac{y\beta_0}{2} - i\chi\right), \quad (54) \end{aligned}$$

здесь $I_{0,1}$ — модифицированные функции Бесселя и $\vartheta = \sqrt{2\beta_0\chi\tau}$, а также использовано предположение $\sqrt{\beta_0 y/2\chi} \ll 1$. Аналогичным образом находим

$$\begin{aligned} i\partial_y F_0(y, \chi) &= \frac{i\rho_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\beta_0\chi}{2y}} \times \\ &\times \int_{C_1} \exp\left[\frac{\vartheta}{2}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) + i\frac{y\beta_0}{2} - i\chi\right] d\mu = \\ &= i\rho_0 \sqrt{\frac{\beta_0\chi}{2y}} I_1(\vartheta) \exp\left(i\frac{y\beta_0}{2} - i\chi\right). \quad (55) \end{aligned}$$

Отсюда и из уравнений Марченко следует, что ядра $|K_{1,2}|$ экспоненциально растут на начальной стадии с ростом τ , т.е. решение для $|E|$ может достигать значений порядка единицы для произвольно малых амплитуд затравочного поля. Другой вывод, следующий из полученных выражений для ядер (54), (55), состоит в том, что решение для акустического поля сосредоточено для малых ρ_0 , таких что $-\ln|\rho| \gg 1$, в области $\theta \gg 1$. В этой области интегралы, входящие в уравнения Марченко (31), (33), могут быть вычислены приближенно методом перевала. С учетом этих условий найдем решение, описывающее передний фронт пакета генерируемых импульсов на нелинейной стадии процесса.

Для приближенного решения уравнений (31),

(33) подставляем в них выражения для ядер в виде

$$\begin{aligned} i\partial_y F_0(\tau + y; \chi) &= \frac{\rho_0}{2\pi} \int_{C_1} \exp\left[-i\lambda(\tau + y) + i\frac{\chi\beta_0}{2\lambda} + \right. \\ &\quad \left. + i\frac{(\tau + y)\beta_0}{2} - i\chi\right] d\lambda, \quad (56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_0^*(\tau + y; \chi) &= \frac{\rho_0}{2\pi} \int_{C_2} \exp\left[i\mu(\tau + y) + i\frac{\chi\beta_0}{2\mu} + \right. \\ &\quad \left. + i\frac{(\tau + y)\beta_0}{2} - i\chi\right] \frac{d\mu}{\mu - \beta_0/2}. \quad (57) \end{aligned}$$

Подставляем $K_1(\tau, y)$ из (33) в (31) и интегрируем по переменной s . Переходим в полученном интегральном уравнении к переменным

$$\lambda = \sqrt{\frac{\chi\beta_0}{2(\tau + y)}} \tilde{\lambda}, \quad \mu = \sqrt{\frac{\chi\beta_0}{2(\tau + y)}} \tilde{\mu}.$$

Затем деформируем контуры C_1 и C_2 так, чтобы они огибали точки $\tilde{\lambda} = i$ и $\tilde{\mu} = -i$ соответственно в положительном и отрицательном направлениях. Интегрируем по этим переменным, используя метод перевала. Поскольку основной вклад в интегралы вносят экспоненты, в алгебраическом множителе, возникающем после интегрирования перед экспонентой, можно положить $\sqrt{y + \tau} \approx \sqrt{2\tau}$, $\sqrt{s + \tau} \approx \sqrt{2\tau}$. Аналогичным образом, подставляя выражение для $K_2^*(\tau, y)$ из (32) в (33) и выполняя процедуру, описанную выше, получаем второе интегральное уравнение. При выводе этих уравнений используем приближение $1 + (\beta_0\chi\tau)^{-1} \approx 1$.

Оба полученных уравнения легко решаются для новых функций:

$$\begin{aligned} Q_1(\tau) &= \\ &= \int_{\tau}^{\infty} K_1(\tau, s) \exp\left[\sqrt{2\chi\beta_0(\tau + s)} + is\frac{\beta_0}{2}\right] ds, \quad (58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2^*(\tau) &= \\ &= \int_{\tau}^{\infty} K_2^*(\tau, s) \exp\left[\sqrt{2\chi\beta_0(\tau + s)} - is\frac{\beta_0}{2}\right] ds. \quad (59) \end{aligned}$$

Эти решения имеют вид

$$Q_1(\tau) = \frac{-i}{D^*} \frac{\left(1 - \frac{2i\beta}{D}\right) \frac{|\rho_0|^2}{4\sqrt{2}} e^{2\theta}}{1 + \left(1 - \frac{2i\beta}{D}\right) \frac{|\rho_0|^2}{8\sqrt{2}} e^{2\theta}}, \quad (60)$$

$$Q_2^*(\tau) = \frac{i\rho_0}{2D} \frac{\exp\left(2\theta + i\frac{\beta_0\tau}{2}\right)}{1 + \left(1 - \frac{2i\beta}{D}\right) \frac{|\rho_0|^2}{8\sqrt{2}} e^{2\theta}}, \quad (61)$$

где $\theta = 2\sqrt{\beta_0\chi\tau}$, $D = i\beta_0 - \sqrt{\chi\beta_0/\tau}$. Подставляя решения (60), (61) в исходные уравнения, находим ядра

$$K_1(\tau, \tau) = \frac{i}{D^*} \times \frac{\left(1 - \frac{2i\beta}{D}\right) \frac{|\rho_0|^2 \sqrt{\beta_0\chi}}{2\sqrt{\tau}} \exp\left(\theta - i\frac{\tau\beta_0}{2}\right)}{1 + \left(1 - \frac{2i\beta}{D}\right) \frac{|\rho_0|^2}{8\sqrt{2}} e^{2\theta}}, \quad (62)$$

$$K_2^*(\tau, \tau) = \frac{\rho_0}{2D} \frac{\exp\left(\theta + i\frac{\beta_0\tau}{2}\right)}{1 + \left(1 - \frac{2i\beta}{D}\right) \frac{|\rho_0|^2}{8\sqrt{2}} e^{2\theta}}. \quad (63)$$

Окончательно находим решение для переднего фронта пакета импульсов:

$$E(\tau, \chi) = \frac{\tilde{Z} \frac{\rho_0}{D} \exp\left(\theta + i\frac{\tau\beta_0}{2}\right)}{\tilde{Z}\tilde{Z}^* + \frac{|\rho_0|^2}{4|D|^2} e^{2\theta}} \exp(i\psi_a). \quad (64)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \psi_a &= \arg\left(\frac{Z^*}{Z}\right), \\ Z &= 1 + \left(1 - \frac{2i\beta}{D}\right) \frac{|\rho_0|^2}{8\sqrt{2}} e^{2\theta}, \\ \tilde{Z} &= Z + \left(1 - \frac{2i\beta}{D}\right) \frac{|\rho_0|^2 \sqrt{\beta_0\chi}}{D^* 2\sqrt{\tau}} \exp\left(\theta - i\frac{\tau\beta_0}{2}\right). \end{aligned} \quad (65)$$

Решение (64) отвечает первой нелинейной осцилляции или переднему фронту асимптотического решения, описывающего эволюцию спиновой системы от состояния (52) к устойчивому состоянию (40). На рис. 4 показана зависимость интенсивности $I = |E|^2$ от τ для разных β_0 . Обнаружено, что с ростом β_0 передний фронт становится круче и задержка генерации уменьшается. Из рисунка видно, что с увеличением вклада продольного поля происходит укорочение импульса на переднем фронте пакета импульсов, описывающего распад неустойчивого состояния. В то же время амплитуда этого импульса не изменяется с ростом β_0 .

Численный анализ исходной эволюционной системы (20) и анализ асимптотик решения показывает, что оно состоит из пакета затухающих нелинейных пульсаций. В реальных средах релаксационные и дифракционные процессы приводят к существенному относительному подавлению амплитуд

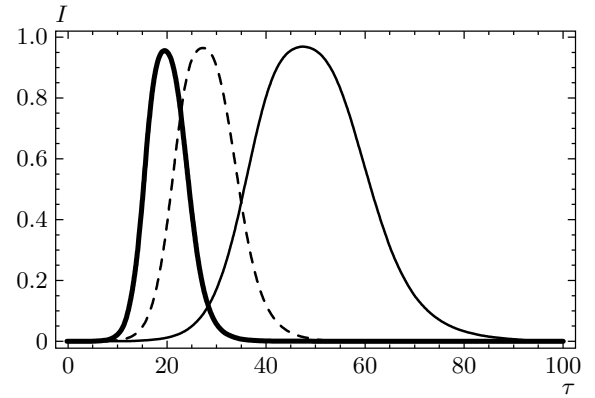


Рис. 4. Зависимость интенсивности $I(\tau) = |E|^2$ переднего фронта решения (64) для разных значений β_0 : сплошная тонкая линия — $\beta_0 = 0.5$, штриховая линия — $\beta_0 = 1$; жирная линия — $\beta_0 = 1.5$

осцилляций по сравнению с передним фронтом. Поэтому на практике часто бывает достаточно найти выражение для первой нелинейной осцилляции (64). Полученное решение демонстрирует, что асимптотика (при больших χ) носит несолитонный характер и характеризуется автомодельной переменной $\sqrt{\beta_0\chi\tau}$. Как и в солитонном случае, асимметрия, связанная с отличием β от нуля, приводит к нелинейной фазовой модуляции, которая описывается фазой ψ_a (65).

4. КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ ПРИВЛИЖЕНИЕ

В работе с помощью МОЗР найдено решение для модели, описывающей динамику акустических импульсов длительностью порядка или меньше ω_B^{-1} . Эта модель является наиболее общей интегрируемой редукцией исходной системы (14)–(17). Однако представляет интерес нахождение и других интегрируемых редукций этой модели, возникающих при учете дополнительных предположений. Решения и анализ таких моделей, как правило, проще. С другой стороны, солитонные решения и иные когерентные структуры в этих моделях возникают вследствие баланса между дисперсией, кросс-модуляцией, нелинейным смешением и пр. Соответствующие члены в уравнениях моделируют реальные физические эффекты, проявляющиеся при различных амплитудах полей и степени обращения спина в данной задаче. Поэтому важно определить условия, когда эти эффекты, взаимно уравновешиваясь, приводят к образованию солитонов и других когерентных структур. Исследование таких моделей полезно также для решения близких неинтегрируемых моделей, поскольку соли-

тонные и другие устойчивые решения интегрируемых моделей могут быть использованы как нулевое приближение при построении теории возмущений.

Как и выше, используем условие равенства групповых скоростей: $v_{\perp} = v_{\parallel}$. Перейдем в системе (14)–(17) к квазимонохроматическим полям:

$$\frac{\epsilon_{\perp} G_{\perp}}{\hbar \omega_B} = \tilde{E} \exp [i (\omega t - kz)], \quad (66)$$

$$S_{\perp} = R \exp [i (\omega_B t - kz)], \quad |\omega_B - \omega| \ll \omega_B. \quad (67)$$

Используем приближение медленных огибающих, которое требует выполнения следующих неравенств:

$$\left| \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} \right| \ll \omega_B |\tilde{E}|, \quad \left| \frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} \right| \ll k |\tilde{E}|, \quad (68)$$

$$\left| \frac{\partial R}{\partial t} \right| \ll \omega_B |R|, \quad \left| \frac{\partial R}{\partial z} \right| \ll k |R|.$$

Перейдем к переменным

$$\tilde{z} = z - \frac{knG_{\perp}^2}{v^2 n_0 \hbar \omega_B}, \quad \tilde{\tau} = \left(t - \frac{z}{v} \right) \omega_B$$

и введем обозначения

$$U = \frac{\epsilon_{\parallel} G_{\perp}}{\hbar \omega_B}, \quad \tilde{E} = \frac{\epsilon_{\perp} G_{\perp}}{\hbar \omega_B}, \quad \nu_0 = \frac{\omega_B - \omega}{2\omega_B}.$$

Для упрощения описания динамики продольного поля ϵ_{\parallel} применяем условие однонаправленности распространения этого поля. С учетом этих приближений и замен система (14), (15) принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{z}} = iR, \quad (69)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} = -\frac{\beta_0}{2} \frac{\partial S_3}{\partial \tilde{\tau}}. \quad (70)$$

Из уравнений (69), (70) и (16) находим, что поля U и \tilde{E} связаны соотношением

$$U(\tilde{\tau}, \tilde{z}) = -\frac{\beta_0}{4} |\tilde{E}(\tilde{\tau}, \tilde{z})|^2 + U_1(\tilde{\tau}). \quad (71)$$

Здесь $U_1(\tilde{\tau})$ определяется граничными условиями. Выберем без потери общности $U_1 \equiv 0$. Используя равенство (71), приводим уравнения Блоха (15), (16) к виду

$$\frac{\partial R}{\partial \tilde{\tau}} = i \left(2\nu_0 - \frac{\beta_0^2}{4} |\tilde{E}|^2 \right) R + i \tilde{E} S_3, \quad (72)$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial \tilde{\tau}} = \frac{i}{2} \left(\tilde{E}^* S_{\perp} - \tilde{E} S_{\perp}^* \right). \quad (73)$$

В итоге получаем систему уравнений (69), (72), (73), которая формально совпадает с интегрируемой системой, предложенной автором ранее [14]. Эта система применялась для описания генерации и эволюции электромагнитных ультракоротких импульсов света в двухуровневых оптических средах в квазимонохроматическом приближении. В работе [23] найдены некоторые солитонные и периодические решения этой модели. Приведем представление Лакса для интегрируемой системы (69), (72), (73):

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{\tau}} \Phi &= \\ &= \begin{pmatrix} -i\lambda^2 - i\frac{\beta_1}{4} |\tilde{E}|^2 & \gamma \tilde{E} \\ \tilde{\gamma} \tilde{E}^* & i\lambda^2 + \frac{\beta_1}{4} |\tilde{E}|^2 \end{pmatrix} \Phi \equiv \\ &\equiv \mathbf{L}_2 \Phi, \quad (74) \end{aligned}$$

$$\partial_{\tilde{z}} \Phi = \frac{1}{4(\lambda^2 + \nu_0)} \begin{pmatrix} -iS_3 & 2\gamma R \\ 2\tilde{\gamma} R^* & iS_3 \end{pmatrix} \Phi \equiv \mathbf{A}_2 \Phi, \quad (75)$$

где

$$\beta_1 = \frac{\beta_0^2}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \left(\beta_1 \lambda + i \sqrt{1 + \beta_1^2 \nu_0} \right),$$

$$\tilde{\gamma} = -\frac{1}{2} \left(\beta_1 \lambda - i \sqrt{1 + \beta_1^2 \nu_0} \right).$$

Некоторую информацию о динамике поля можно получить, анализируя структуру этой пары Лакса и сравнивая ее с аналогичной парой Лакса в работе [23]. Вклад продольного акустического поля проявляется в наличии в матрицах \mathbf{L}_2 , \mathbf{A}_2 членов с коэффициентом β_1 . В результате для солитонных и других решений учет продольного поля проявляется в изменении формы импульсов и появлении нелинейной фазовой добавки порядка $i\beta_1 \int_0^{\tilde{\tau}} |\tilde{E}|^2 d\tilde{\tau}$. Для малого отношения $G_{\parallel}/G_{\perp} \sim \varepsilon$ вклад продольного поля имеет порядок ε^2 и поэтому в таких средах вкладом этого поля в динамику поперечного поля можно пренебрегать. Отметим, что это связано с использованным выше квазимонохроматическим приближением. В рассмотренном выше случае почти предельно коротких импульсов, т. е. для импульсов длительностью $\tau_p \sim \omega_B^{-1}$, продольное поле дает такой же по порядку величины вклад, как и поперечное поле. Это различие связано с тем, что уравнения (69), (71) описывают длинно-коротковолновый резонанс [7], который значительно менее эффективен, чем коротковолновый резонанс в случае, рассмотренном в предыдущих разделах настоящей ра-

боты. Можно сделать вывод, что эффекты, связанные с влиянием продольного поля, проявляются существенно сильнее для почти предельно коротких импульсов, чем в квазимонохроматическом пределе.

При выводе системы (69), (72), (73) предполагалось, что поперечное поле вызывает быстрые осцилляции между зеемановскими уровнями. Нелинейные эффекты в этом случае в основном обусловлены взаимодействием поперечного поля с двухуровневой средой. Рассмотрим другой предельный случай, когда переходов между уровнями практически нет, т. е. изменением S_z можно пренебречь. Применяя приближения, которые были использованы выше в этом разделе работы, получаем следующую дополнительную редукцию уравнений (69), (72), (73):

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{z}} = iR, \quad (76)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \tilde{\tau}} = i \left(2\nu_0 - \frac{\beta_1}{2} |\tilde{E}|^2 \right) R + i\tilde{E}. \quad (77)$$

Эта интегрируемая система уравнений может быть сведена к модели Тирринга простым калибровочным преобразованием. Она также имеет устойчивые имеет солитонные и иные когерентные решения и может быть детально изучена в рамках МОЗР, см., например, [15]. В этом случае существование солитонов и иных когерентных структур обусловлено нелинейной фазовой модуляцией, которая вызывается продольным полем. Роль поперечного поля проявляется в установлении когерентной связи между полем и двухуровневой средой в линейном пределе. Этот пример показывает, что для наблюдения когерентных нелинейных эффектов, обусловленных только продольным полем, необходимо использовать физические условия, отвечающие малому изменению заселенностей зеемановских уровней.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе динамика почти предельно коротких акустических импульсов изучалась в рамках интегрируемых редукций эволюционных уравнений, которые описывают динамику продольно-поперечной волны, распространяющейся вдоль направления магнитного поля в среде примесных ионов с эффективным спином 1/2. Приведем оценки параметров среды и мощности солитонных акустических импульсов, которые могут быть генерированы в такой среде. В качестве примера выберем кристалл MgO с парамагнитными примесями Fe^{2+} при температуре

жидкого гелия $T = 4$ К. При низких температурах уменьшается влияние теплового заселения зеемановских уровней. Пусть величина магнитного поля такова, что зеемановское расщепление составляет $\omega_B = 10^{12} \text{ с}^{-1}$. Отношение энергии тепловых движений к зеемановской составляет $k_B T / \hbar \omega_B = 0.5$, где k_B — постоянная Больцмана. В этом случае условие $\tau_p \sim \omega^{-1}$ справедливо для длительностей импульсов порядка 100 пс. В этих условиях неприменимо приближение медленных огибающих, что отвечает случаю, рассмотренному в настоящей работе за исключением предыдущего раздела. При переходе к более длинным импульсам, например, $\tau_p \sim 1$ нс, возможно применение приближения медленных огибающих в рамках моделей, рассмотренных в предыдущем разделе. Заметим, что условие $\omega_B = 10^{12} \text{ с}^{-1}$ отвечает значениям магнитного поля, которые вполне достижимы в лабораторных условиях. Для коэффициентов среды имеем [8, 16] $G_{\perp}, G_{\parallel} \sim 10^{-13}$ эрг, $n \sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$, $n_0 \sim 3-4 \text{ г/см}^3$, $v_{\perp}, v_{\parallel} \approx (5-10) \cdot 10^5 \text{ см/с}$, $\lambda_{11}, \lambda_{44} \approx (5-10) \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2$. При этих условиях интенсивность солитонного сигнала может составлять $I \sim 10^6 \text{ Вт/см}^2$ [7].

В настоящей работе при изучении динамики почти предельно коротких импульсов применялось только условие равенства групповых скоростей продольной и поперечной волн и приближение однонаправленности распространения акустической волны. По сравнению с результатами работ [6, 7] это позволило найти солитонное решение, отвечающее более общей физической ситуации, а также решение несолитонного типа, отвечающее распаду неустойчивого состояния. С другой стороны, для наблюдения поведения поля, описанного в настоящей работе, требуются более мягкие физические условия. Например, условие $\tau_p \ll \omega_B^{-1}$, которое было использовано в работе [6], как отмечено в этой же работе, требует использования сверхнизких температур порядка 0.1 К. При повышении температуры на несколько градусов требуется увеличение магнитного поля из-за теплового заселения уровней. Это приводит к необходимости применения акустических импульсов длительностью порядка 1 пс, что, в свою очередь, приводит к необходимости учета дисперсии. Для вывода интегрируемой модели (20), найденной в настоящей работе, выполнение условия $\tau_p \ll \omega_B^{-1}$ не требуется.

В большинстве теоретических работ, посвященных динамике акустической волны в аналогичных задачах, были найдены односолитонные решения. Для однофазных решений, к которым относятся односолитонные и однозонные периодические реше-

ния, условие равенства групповых скоростей поперечной и продольной волн несущественно. Нетрудно показать, что в этом случае возникает редукция, эквивалентная соответствующей автомодельной редукции уравнений (16)–(19) с точностью до перенормировки коэффициентов. Если решение для функций, входящих в уравнения (16)–(19), зависит от автомодельной переменной $\tau - z/v_s$, то полученное выше односолитонное решение не изменяется, за исключением замен

$$\tau \rightarrow \tau \sqrt{\frac{v_s - v_{\parallel}}{v_s - v_{\perp}}}, \quad \beta_0 \rightarrow \beta_0 \sqrt{\frac{v_s - v_{\perp}}{v_s - v_{\parallel}}}.$$

Из этого, в частности, следует, что и в симметричном кристалле, в котором $G_{\parallel} = G_{\perp}$, разница в групповых скоростях ($v_{\parallel} \neq v_{\perp}$) приводит к появлению нелинейной фазовой модуляции солитона. Строго говоря, для изученной модели этот результат справедлив для малой величины $(v_{\parallel} - v_{\perp})/v_{\perp}$, поскольку использовалось приближение однонаправленности распространения волн. Аналогичные односолитонные решения моделей, представленных в разд. 4 настоящей работы, после простых замен переменных и параметров могут применяться для описания АСИП в случае различных групповых скоростей поперечной и продольной волн.

Солитонная динамика, ассоциируемая с АСИП, в чистом виде для своего наблюдения требует создания на границе среды достаточно мощного импульса с формой близкой к солитонной. В то же время, если спиновая система первоначально находится в неустойчивом состоянии, то решение, описывающее переход к устойчивому состоянию, носит несолитонный характер. В п. 3.4 найдено выражение для переднего фронта генерируемых при этом пакетов нелинейных осцилляций. Асимптотически зависимость формы этих осцилляций от переменных определяется в основном переменной $\sqrt{\beta_0 \chi \tau}$. В случае $\beta = 0$, т. е. при $G_{\perp} = G_{\parallel}$, соответствующая матрица \hat{L}_1 в (22) становится симметричной и к системе (22), (23) можно применить калибровочное преобразование, которое позволяет свести решение задачи к исследованию спектральной проблемы Захарова–Шабата. Это приводит к решению более простой системы уравнений Марченко. При этом для начально-краевых условий (51) можно показать, что нахождение асимптотики сводится к решению уравнения первого порядка. Правая часть этого уравнения пропорциональна автомодельному решению уравнения синус-Гордон или уравнений, эквивалентных уравнениям Максвелла–Блоха для двухуровневой оптической среды при условии точного резонанса. Это

решение полностью определяется непрерывным действительным спектром задачи (22) и совпадает с решением уравнения Пенлеве III [24].

В настоящей работе не принимались во внимание нелинейные эффекты, связанные с наличием ангармонизма кристаллической решетки. В то же время относительная деформация кристалла в области пикосекундного солитона может достигать значений порядка $P/n_0 v \sim 10^{-3}$, где давление $P \sim 1$ кбар [25]. При этих условиях влияние нелинейностей, связанных с ангармонизмом колебаний атомов в узлах решетки, на динамику акустического солитона весьма существенно. Учет этих эффектов может качественно изменить динамику акустических волн в рассмотренной выше физической системе. Хотя в настоящей работе такого рода эффекты не учитывались, они могут быть включены в найденные выше интегрируемые модели в виде дополнительных возмущающих членов.

В качестве другого возможного физического приложения полученных результатов рассмотрим недавно предсказанный эффект аномального стимулированного рассеяния Бриллюэна, связанного с эффектом замедления скорости света [26]. Недавний прогресс в когерентной нелинейной оптике был достигнут благодаря развитию теории электромагнитно-индуцированной прозрачности [27]. Это явление, которое наблюдалось в многоуровневых оптических средах, при наличии сильно меняющейся линейной дисперсии приводит к существенному уменьшению групповой скорости света в среде до значений, которые могут быть сравнимы или даже меньше скорости звука в этой среде. Такое уменьшение групповых скоростей света было обнаружено экспериментально в «холодных» и «горячих» атомных газах и в кристаллах с имплантированными редкоземельными ионами. Уменьшение резонансного поглощения наряду с сильной линейной дисперсией открывает новые механизмы резонансного взаимодействия света и акустических волн. В работе [28] показано, что продольные градиентные силы, действующие на двухуровневые атомы, возрастают при пространственном сжатии оптического импульса, движущегося с ультранизкой скоростью в когерентной среде. Это увеличение силы приводит к формированию «атомной пули» и открывает новые механизмы локального пондеромоторного рассеяния света. В работе [29] утверждается, что благодаря сильной линейной дисперсии, связанной с электромагнитно-индуцированной прозрачностью, возможно достижение фазового согласования между электромагнитной и акустической волнами в диэлектри-

ческом световоде с имплантированными трехуровневыми ионами. Для описания взаимодействия электромагнитного поля с акустическими фононами в работе [26] используется гамильтониан, аналогичный примененному в настоящей работе для описания связи между спиновыми состояниями и акустическими фононами. Резонансная оптическая среда может быть моделирована эффективной двухуровневой средой. Пондеромоторная сила, связанная с локальными изменениями плотности оптической среды, дает в динамику акустического поля вклад, аналогичный вкладу, который описывается правыми частями уравнений (14) и (15). Наряду с поперечным электромагнитным полем в такой схеме необходимо учитывать и продольное акустическое поле, вклад которого в динамику оптической среды проявляется в возникновении нелинейной фазовой модуляции. Отметим, что для оптического поля в такой модели возможно применение квазимонохроматического приближения, которое наряду с условием достаточно малой плотности имплантированных ионов может приводить к редуцированной интегрируемой модели, выведенной в предыдущем разделе. В рамках этой модели можно исследовать процессы рассеяния Бриллюэна для пикосекундных акустических импульсов. Условие фазового согласования позволяет изучать взаимодействие этих импульсов с квазимонохроматическими оптическими импульсами близкой длительности. Механизм рассеяния Бриллюэна для такого сверхмедленного света может найти применение для эффективного усиления импульсов, распространяющихся в волоконных световодах с имплантированными ионами.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
2. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).
3. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
4. Н.-У. НАО and Н. J. Maris, Phys. Rev. B **64**, 064302 (2001).
5. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2269 (1971).
6. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ФТТ **43**, 1969 (2001).
7. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **120**, 269 (2001).
8. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловьев, Б. М. Хабибулин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, Москва (1997).
9. N. S. Shiren, Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
10. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974).
11. Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Наука, Москва (1974).
12. А. А. Zabolotskii, Phys. Lett. **127A**, 83 (1988).
13. А. А. Zabolotskii, Physica D **40**, 283 (1989).
14. А. А. Zabolotskii, Phys. Lett. **124A**, 500 (1987).
15. А. А. Zabolotskii, Phys. Rev. A **57**, 2958 (1998).
16. Дж. Такер, Р. Рэмpton, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, Москва (1975).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1987).
18. С. А. Альтшуллер, Б. М. Козырев, *Электронный парамагнитный резонанс соединений элементов промежуточных групп*, Наука, Москва (1981).
19. Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, Wiley, New York, (1984).
20. J. D. Gibbon, P. J. Coudrey, J. K. Eilbeck, and R. K. Bullough, J. Phys. A **6**, 1237 (1973).
21. А. Е. Боровик, С. И. Кулинич, Письма в ЖЭТФ **39**, 320 (1984).
22. Л. А. Тахтаджян, Л. А. Фаддев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
23. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **107**, 1100 (1995).
24. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **115**, 1158 (1999).
25. С. А. Ахманов, В. Э. Гусев, УФН **162**, 3 (1992).
26. A. B. Matsko, V. V. Rostovstev, M. Flieschhauer, and M. O. Scully, Phys. Rev. Lett. **86**, 2006 (2001); V. Kovalev, Phys. Rev. Lett. **88**, 239301-1 (2002).
27. S. E. Harris, J. E. Field, and A. Imamoglu, Phys. Rev. Lett. **64**, 1107 (1990).
28. S. E. Harris, Phys. Rev. Lett. **85**, 4032 (2000).
29. A. B. Matsko, Yu. V. Rostovtsev, H. Z. Cummins, and M. O. Scully, Phys. Rev. Lett. **84**, 5752 (2000).