

# КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМ С ЭФФЕКТАМИ НАРУШЕНИЯ РЕПЛИЧНОЙ СИММЕТРИИ

*В. В. Прудников\*, П. В. Прудников*

*Омский государственный университет  
644 077, Омск, Россия*

Поступила в редакцию 17 апреля 2002 г.

Осуществлено теоретико-полевое описание критического поведения слабоупорядоченных систем с  $p$ -компонентным параметром порядка. Для систем произвольной размерности от трех до четырех в двухпетлевом приближении проведен ренормгрупповой анализ эффективного репличного гамильтониана модели с потенциалом взаимодействия, не являющимся реплично-симметричным. Для случая одноступенчатого нарушения репличной симметрии с применением техники суммирования Паде–Бореля выделены фиксированные точки ренормгрупповых уравнений. На основе анализа их устойчивости определены для каждого значения  $p$  пороговые размерности системы, разделяющие области реализации различных типов критического поведения. Выявлены особенности критического поведения, определяемого нарушением репличной симметрии. Осуществлено сравнение с результатами применения  $\epsilon$ -разложения и выделена область применимости этого метода.

PACS: 64.60.Ak, 64.60.Fr

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При ренормгрупповом описании критического поведения неупорядоченных систем с замороженным беспорядком для восстановления трансляционной симметрии эффективного гамильтониана, описывающего взаимодействие флуктуаций, используется метод реплик [1–3]. Однако в ряде работ [4–6] были высказаны идеи о возможности нарушения репличной симметрии в системах с замороженным беспорядком. В работах [4, 5] на базе физических представлений о возникновении в неупорядоченных системах с эффектами случайной температуры перехода многочисленных локальных минимумов энергии было осуществлено ренормгрупповое описание модели  $\phi^4$  с потенциалом взаимодействия, характеризующимся нарушенной репличной симметрией (НРС). Был применен метод  $\epsilon$ -разложения в низшем порядке теории. Для систем с числом компонент параметра порядка  $p$ , меньшим четырех, было выявлено определяющее влияние эффектов НРС на критическое поведение. Было показано, что для  $p$ , больших единицы, но меньших четырех, возмож-

но осуществление двух режимов поведения системы, один из которых определяет неуниверсальное критическое поведение, зависящее от затравочных значений параметров модели и, в конечном счете, от концентрации примесей в системе, а второй режим, так же как для наиболее интересного случая изинговских систем ( $p = 1$ ), характеризуется отсутствием устойчивого критического поведения. Несмотря на столь интересные выводы данных работ, результаты проведенных нами ранее исследований по теоретико-полевому описанию ряда однородных и неупорядоченных систем в двухпетлевом и более высоких порядках приближения с применением методов суммирования асимптотических рядов показали [7], что анализ устойчивости различных типов критического поведения в первом порядке  $\epsilon$ -разложения можно рассматривать лишь в качестве грубой оценки, особенно для многовершинных статистических моделей [8]. Поэтому результаты исследований эффектов НРС, полученные в работах [4–6], требуют детальной переоценки с позиций применения более точного подхода.

С этой целью нами в работах [9, 10] в рамках теоретико-полевого подхода было осуществлено ренормгрупповое описание модели слабоупорядо-

\*E-mail: prudnikov@univer.omsk.su

ченных трехмерных и двумерных систем с введенным потенциалом взаимодействия четвертого порядка по флуктуациям параметра порядка, задающим НРС. Проведенное в двухпетлевом приближении исследование решений ренормгрупповых уравнений с последовательным применением метода суммирования рядов Паде–Бореля показало, что критическое поведение трехмерных и двумерных систем устойчиво относительно влияния эффектов НРС и реализуется прежний сценарий влияния замороженного беспорядка на критическое поведение [11].

Однако остался невыясненным вопрос об области применимости результатов работ [4, 5] и, в частности, каковы пороговые размерности неупорядоченной системы  $d_c(p)$ , отделяющие область влияния эффектов НРС от областей критического поведения, в которых эффекты НРС несущественны. Интересно также возможность ренормгруппового исследования режимов поведения систем с НРС, в которых отсутствует устойчивое критическое поведение и осуществляется, согласно [4–6], режим сильной связи. Проведение подобного теоретического исследования особенно важно с точки зрения возможности проявления эффектов НРС в сильнонеупорядоченных системах и их наблюдения в численных экспериментах по компьютерному моделированию критического поведения при концентрациях примеси выше порога примесной перколяции, когда в системе возникают протяженные примесные структуры [12].

Рассмотрению данных вопросов посвящена настоящая работа, в которой для слабонеупорядоченных систем произвольной размерности от трех до четырех без использования  $\epsilon$ -разложения осуществлен в двухпетлевом приближении с применением методов суммирования ренормгрупповой анализ критического поведения модели с НРС-потенциалом.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДЕЛИ. МЕТОДИКА РАСЧЕТОВ

Модельный гамильтониан Гинзбурга–Ландау, описывающий поведение  $p$ -компонентной спиновой системы со слабым замороженным беспорядком вблизи критической точки, имеет вид

$$H = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p [\nabla \phi_i(x)]^2 + \frac{1}{2} [\tau - \delta\tau(x)] \sum_{i=1}^p \phi_i^2(x) + \frac{1}{4} g \sum_{i,j=1}^p \phi_i^2(x) \phi_j^2(x) \right\} \quad (1)$$

с гауссовским распределением случайной температуры фазового перехода  $\delta\tau(x)$  с дисперсией  $\langle\langle (\delta\tau(x))^2 \rangle\rangle \sim u$ , определяемой некоторой положительной константой  $u$  и пропорциональной концентрации дефектов структуры. Применение стандартного метода реплик (см., например, [6]) позволяет легко провести усреднение по флуктуациям температуры  $\delta\tau(x)$  и свести задачу статистического описания слабонеупорядоченной системы к задаче статистического описания однородной системы с эффективным гамильтонианом

$$H_n = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{a=1}^n [\nabla \phi_i^a(x)]^2 + \frac{1}{2} \tau \sum_{i=1}^p \sum_{a=1}^n [\phi_i^a(x)]^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^p \sum_{a,b=1}^n g_{ab} [\phi_i^a(x)]^2 [\phi_j^b(x)]^2 \right\}, \quad (2)$$

где индекс « $a$ » нумерует реплики (образы) исходной однородной составляющей в гамильтониане (1), а дополнительная вершина  $u$ , возникающая в матрице взаимодействия  $g_{ab} = g\delta_{ab} - u$ , задает эффективное взаимодействие флуктуаций  $(n \times p)$ -компонентного параметра порядка через поле дефектов. Данная статистическая модель термодинамически эквивалентна исходной неупорядоченной модели в пределе  $n \rightarrow 0$ . Последующая ренормгрупповая процедура статистического учета вклада длинноволновых флуктуаций параметра порядка относительно основного состояния системы с конфигурацией  $\phi(x) = 0$  (при  $T \geq T_c$ ), проведенная на масштабах корреляционной длины, обращающейся в бесконечность при температуре перехода  $T_c$ , позволяет провести анализ возможных типов критического поведения системы и условия их реализации, а также расчет критических индексов.

Однако, как показано в [4–6], за счет флуктуаций случайной температуры перехода при  $[\tau - \delta\tau(x)] < 0$  в системе реализуется макроскопически большое число пространственных областей с  $\phi(x) \neq 0$ , отделенных от основного состояния потенциальными барьерами. Для описания статистических свойств систем с многочисленными локальными минимумами энергии в [4–6] по аналогии со спиновыми стеклами был применен формализм нарушения репличной симметрии Паризи [9]. В соответствии с аргументами, представленными в [4–6], статистический учет вкладов непертурбативных степеней свободы, связанных с флуктуациями параметра порядка относи-

тельно конфигураций поля  $\phi(x)$  в локальных минимумах энергии, приводит при реализации репличной процедуры для слабого беспорядка к появлению в эффективном репличном гамильтониане дополнительных взаимодействий вида  $\sum_{a,b} g_{ab} \phi_a^2 \phi_b^2$ , где итоговая матрица  $g_{ab}$  уже не является реплично-симметричной с  $g_{ab} = g\delta_{ab} - u$ , а имеет структуру НРС Паризи [13]. Так, согласно [4–6, 13] в пределе  $n \rightarrow 0$  матрица  $g_{ab}$  со структурой НРС параметризуется в терминах ее диагональных элементов  $\tilde{g}$  и недиагональной функции  $g(x)$ , которая определена на интервале  $0 < x < 1$ :  $g_{ab} \rightarrow (\tilde{g}, g(x))$ . При этом операции с матрицами  $g_{ab}$  задаются следующими правилами:

$$\begin{aligned} g_{ab}^k &\rightarrow (\tilde{g}^k; g^k(x)), \\ (\hat{g}^2)_{ab} &= \sum_{c=1}^n g_{ac} g_{cb} \rightarrow (\tilde{c}; c(x)), \\ (\hat{g}^3)_{ab} &= \sum_{c,d=1}^n g_{ac} g_{cd} g_{db} \rightarrow (\tilde{d}; d(x)), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= \tilde{g}^2 - \int_0^1 dx g^2(x), \\ c(x) &= 2 \left[ \tilde{g} - \int_0^1 dy g(y) \right] g(x) - \\ &\quad - \int_0^x dy [g(x) - g(y)]^2, \\ \tilde{d} &= \tilde{c}\tilde{g} - \int_0^1 dx c(x)g(x), \\ d(x) &= \left[ \tilde{g} - \int_0^1 dy g(y) \right] c(x) + \\ &\quad + \left[ \tilde{c} - \int_0^1 dy c(y) \right] g(x) - \\ &\quad - \int_0^x dy [g(x) - g(y)][c(x) - c(y)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Реплично-симметричной ситуации соответствует функция  $g(x) = \text{const}$ , не зависящая от  $x$ .

Ренормгрупповое описание модели, задаваемой репличным гамильтонианом (2), было осуществлено нами в рамках теоретико-полевого подхода в двухпетлевом приближении для систем произвольной

размерности от трех до четырех. Возможные типы критического поведения и их устойчивость во флуктуационной области определяются ренормгрупповыми уравнениями для коэффициентов матрицы  $g_{ab}$ . Для их определения был применен стандартный метод, основанный на диаграммной технике Фейнмана для вершинных частей неприводимых функций Грина и процедуре перенормировки. Так, в двухпетлевом приближении полученные выражения для двухточечной вершинной функции  $\Gamma^{(2)}$ , четырехточечных вершинных функций  $\Gamma_{ab}^{(4)}$  и двухточечной функции  $\Gamma_{aa}^{(2,1)}$  со вставкой  $(\phi_i^a)^2$  имеют вид

$$\frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial k^2} \Big|_{k^2=0} = 1 + 4f g_{aa}^2 + 2pf \sum_{c=1}^n g_{ac} g_{ca}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^{(4)} \Big|_{k_i=0} &= g_{ab} - p \sum_{c=1}^n g_{ac} g_{cb} - 4g_{aa} g_{ab} - 4g_{ab}^2 + \\ &\quad + (8 + 16h) g_{ab}^3 + (24 + 8h) g_{aa}^2 g_{ab} + \\ &\quad + 48h g_{aa} g_{ab}^2 + 4g_{aa} g_{bb} g_{ab} + 8ph \sum_{c=1}^n g_{ac} g_{cb}^2 + \\ &\quad + 8ph g_{ab} \sum_{c=1}^n g_{ac} g_{cb} + 4ph g_{ab} \sum_{c=1}^n g_{ac}^2 + \\ &\quad + 2p \sum_{c=1}^n g_{ac} g_{cc} g_{cb} + \\ &\quad + 4pg_{aa} \sum_{c=1}^n g_{ac} g_{cb} + p^2 \sum_{c,d=1}^n g_{ac} g_{cd} g_{db}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{aa}^{(2,1)} \Big|_{k_i=0} &= 1 - p \sum_{c=1}^n g_{ca} - 2g_{aa} + \\ &\quad + 2pg_{aa} \sum_{c=1}^n g_{ca} + (4 + 12h) g_{aa}^2 + \\ &\quad + 6ph \sum_{c=1}^n g_{ca}^2 + p \sum_{c=1}^n g_{cc} g_{ca} + p^2 \sum_{c,d=1}^n g_{dc} g_{ca}, \end{aligned} \quad (7)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} f(d) &= -\frac{1}{J^2} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial k^2} \int \frac{d^d k_1 d^d k_2}{(k_1^2 + 1)(k_2^2 + 1)((k_1 + k_2 + k)^2 + 1)} \Big|_{k^2=0}, \\ h(d) &= \frac{1}{J^2} \int \frac{d^d k_1 d^d k_2}{(k_1^2 + 1)^2 (k_2^2 + 1)((k_1 + k_2)^2 + 1)}, \\ J &= \int \frac{d^d k}{(k^2 + 1)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

и осуществлено переопределение  $g_{ab} \rightarrow g_{ab}/J$ . Диаграммное представление соответствующих вкладов в  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma_{ab}^{(4)}$  и  $\Gamma_{aa}^{(2,1)}$  приведено на рис. 1.



в данной статье рассмотрением функции  $g(x)$  одно-ступенчатого вида:

$$g(x) = \begin{cases} g_0, & 0 \leq x < x_0, \\ g_1, & x_0 < x \leq 1, \end{cases} \quad (9)$$

где координата ступеньки  $0 \leq x_0 \leq 1$  остается произвольным параметром, который не эволюционирует при масштабных преобразованиях и остается таким же, как и в затравочной функции  $g_0(x)$ . В результате ренормгрупповые преобразования репличного гамильтониана с НРС задаются тремя параметрами  $\tilde{g}$ ,  $g_0$ ,  $g_1$ .

Критические свойства модели могут быть выявлены из анализа коэффициентов  $\beta_i(\tilde{g}, g_0, g_1)$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\gamma_\phi(\tilde{g}, g_0, g_1)$  и  $\gamma_{\phi^2}(\tilde{g}, g_0, g_1)$  ренормгруппового уравнения Каллана–Симанзика [14]. Мы получили  $\beta$ - и  $\gamma$ -функции в двухпетлевом приближении в виде следующих рядов по перенормированным параметрам  $\tilde{g}$ ,  $g_0$  и  $g_1$ :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\tilde{g} + (8+p)\tilde{g}^2 - px_0g_0^2 - p(1-x_0)g_1^2 + \\ &+ [(8f - 40h + 20)p + 16f - 176h + 88]\tilde{g}^3 + \\ &+ (24h - 8f - 12)x_0p\tilde{g}g_0^2 + (24h - 8f - 12) \times \\ &\times (1-x_0)p\tilde{g}g_1^2 - (16h - 8)x_0pg_0^3 - \\ &- (16h - 8)(1-x_0)pg_1^3, \\ \beta_2 &= -g_0 + (4 + 2p)\tilde{g}g_0 + (2px_0 - 4)g_0^2 + \\ &+ 2(1-x_0)pg_0g_1 + \\ &+ [(8f - 48h + 28)p + 16f - 48h + 24]\tilde{g}^2g_0 - \\ &- [((32h - 16)x_0 + 8 - 32h)p + 48 - 96h]\tilde{g}g_0^2 - \\ &- (32h - 16)(1-x_0)p\tilde{g}g_0g_1 + \\ &+ [(48h - 8f - 20)x_0p - 32h + 16]g_0^3 + \\ &+ (32h - 8)(1-x_0)pg_0^2g_1 + \\ &+ (16h - 12 - 8f)(1-x_0)pg_0g_1^2, \\ \beta_3 &= -g_1 + px_0g_0^2 - [p(x_0 - 2) + 4]g_1^2 + \\ &+ (4 + 2p)\tilde{g}g_1 + [(8f - 48h + 28)p + 16f - \\ &- 48h + 24]g_1\tilde{g}^2 - (16h - 8)x_0p\tilde{g}g_0^2 - \\ &- [((8 - 16h)x_0 - 8)p + 48 - 96h]g_0g_1^2 + \\ &+ (16h - 8)x_0pg_0^3 + (8h - 8f - 4)x_0pg_1g_0^2 + \\ &+ [(8f - 24h + 12)x_0p + (48h - 8f - 20)p + \\ &+ 16 - 32h]g_1^3, \\ \gamma_\phi &= 4(4 - d)f(d) \times \\ &\times [(p + 2)\tilde{g}^2 - px_0g_0^2 - p(1-x_0)g_1^2], \\ \gamma_{\phi^2} &= -(4 - d)[(p + 2)\tilde{g} + px_0g_0 + p(1-x_0)g_1 - \\ &- 2(6h - 2f - 3)((p + 2)\tilde{g}^2 - \\ &- px_0g_0^2 - p(1-x_0)g_1^2)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Для возможности сопоставления результатов данной работы с работами [4–6] мы по аналогии с [4–6] в выражениях (10) изменили знаки на противоположные у недиагональных элементов матрицы  $g_{a \neq b} \rightarrow -g_{a \neq b}$ , в результате чего  $g_0$  и  $g_1$  становятся положительно определенными. Нами был проведен численный расчет интегралов  $f(d)$  и  $h(d)$  для  $3 \leq d < 4$ .

Известно, что ряды теории возмущений являются асимптотическими, а вершины взаимодействия флуктуаций параметра порядка во флуктуационной области  $\tau \rightarrow 0$  достаточно велики, чтобы можно было непосредственно применять выражения (10). Поэтому с целью извлечения из полученных выражений нужной физической информации мы применили обобщенный на трехпараметрический случай метод Паде–Бореля, используемый для суммирования асимптотических рядов. При этом прямое и обратное преобразования Бореля имеют вид

$$\begin{aligned} f(\tilde{g}, g_0, g_1) &= \sum_{i,j,k} c_{ijk} \tilde{g}^i g_0^j g_1^k = \\ &= \int_0^\infty e^{-t} F(\tilde{g}t, g_0t, g_1t) dt, \\ F(\tilde{g}, g_0, g_1) &= \sum_{i,j,k} \frac{c_{ijk}}{(i+j+k)!} \tilde{g}^i g_0^j g_1^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Для аналитического продолжения борелевского образа функции вводится ряд по вспомогательной переменной  $\theta$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{g}, g_0, g_1, \theta) &= \\ &= \sum_{k=0}^\infty \theta^k \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} \frac{c_{i,j,k-i-j}}{k!} \tilde{g}^i g_0^j g_1^{k-i-j}, \end{aligned} \quad (12)$$

к которому применяется аппроксимация Паде [L/M] в точке  $\theta = 1$ . Данная методика была предложена и апробирована в работах [8] для описания критического поведения ряда систем, характеризующихся несколькими вершинами взаимодействия флуктуаций параметра порядка. Выявленное в [8] свойство сохранения симметрии системы в процессе применения паде-аппроксимант по переменной  $\theta$  становится существенным при описании многовершинных моделей. В данной работе для вычисления  $\beta$ -функций в двухпетлевом приближении использовался аппроксимант [2/1].

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Как известно, природа критического поведения определяется существованием устойчивой фиксированной точки, удовлетворяющей системе уравнений

$$\beta_i(\tilde{g}^*, g_0^*, g_1^*) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13)$$

В результате численного решения системы (13) для просуммированных методом Паде–Бореля  $\beta$ -функций для значений числа компонент параметра порядка  $p = 1, 2, 3$  было выделено три типа нетривиальных фиксированных точек в представляющей физический интерес области значений параметров  $\tilde{g}^*, g_0^*, g_1^* \geq 0$  (табл. 1–3). Так, фиксированная точка первого типа с  $\tilde{g}^* \neq 0, g_0^* = g_1^* = 0$  соответствует критическому поведению однородной системы, фиксированная точка второго типа с  $\tilde{g}^* \neq 0, g_0^* = g_1^* \neq 0$  — критическому поведению неупорядоченной системы с репличной симметрией, а фиксированная точка третьего типа с  $\tilde{g}^* \neq 0, g_0^* = 0, g_1^* \neq 0$  — критическому поведению неупорядоченной системы с НРС. При этом значения параметров  $\tilde{g}^*, g_1^*$  в фиксированной точке с НРС зависят от координаты ступеньки  $x_0$  и в табл. 1–3 приведены полученные значения  $\tilde{g}^*, g_1^*$  для  $0 \leq x_0 \leq 1$  с шагом  $\Delta x_0 = 0.1$ .

Возможность реализации того или иного типа критического поведения для каждого  $p$  определяется устойчивостью соответствующей фиксированной точки. Требование устойчивости фиксированной точки сводится к условию, при котором собственные значения  $\lambda_i$  матрицы

$$B_{ij} = \frac{\partial \beta_i(\tilde{g}^*, g_0^*, g_1^*)}{\partial g_j} \quad (14)$$

находятся в правой комплексной полуплоскости. Анализ значений  $\lambda_i$  для каждого типа фиксированных точек (табл. 1–3) позволяет сделать следующие выводы.

1) Для трехмерной модели Изинга ( $p = 1$ ) устойчива фиксированная точка второго типа (табл. 1а). Комплексные значения  $\lambda_1, \lambda_2$  при положительных  $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3$  указывают на то, что фиксированная точка второго типа в отличие от фиксированной точки третьего типа является устойчивым фокусом в параметрическом пространстве  $(\tilde{g}, g_0, g_1)$  и приближение ренормгрупповых потоков к фиксированной точке второго типа осуществляется по спиралевидной траектории. Лишь при пороговой размерности системы  $d_c = 3.986$  (табл. 1б, в) фиксированная точка второго типа теряет устойчивость ( $\lambda_3$  меняет знак), а поскольку во всем интервале изменения

размерности системы  $3 \leq d < 4$  остальные фиксированные точки остаются неустойчивыми, то, следовательно, при  $3.986 \leq d$  в системе за счет эффектов нарушений репличной симметрии вообще не реализуется устойчивое критическое поведение. Результаты проведенного нами исследования поведения ренормгрупповых потоков для  $3.986 \leq d$  представлены ниже.

2) Для трехмерной ХУ-модели ( $p = 2$ ) получаемые малые положительные значения  $\lambda_i$  (табл. 2а) указывают на слабую устойчивость реплично-симметричной фиксированной точки второго типа. Однако уже при размерности  $d_c = 3.1$  (табл. 2б, в) устойчивой становится фиксированная точка третьего типа с эффектами нарушения репличной симметрии. При этом критическое поведение, определяемое данной точкой, является неуниверсальным и оказывается зависящим от величины параметра  $x_0$ , а следовательно, от концентрации примесей. Анализ устойчивости фиксированной точки третьего типа показал, что она оказывается устойчивой лишь для интервала  $0 \leq x_0 \leq x_c(d)$ , где  $x_c$  — некоторое пороговое значение параметра, зависящее от размерности системы. Так, для  $d = 3.1$  величина  $x_c = 0.1$ , а для  $d = 3.999$  имеем  $x_c = 0.3$ . В интервале же  $x_c(d) < x_0 < 1$  ни одна из фиксированных точек не является устойчивой.

3) Для изотропной трехмерной модели Гейзенберга ( $p = 3$ ) устойчивой становится фиксированная точка первого типа (табл. 3а), в то время как в других фиксированных точках константы  $g_0^*, g_1^*$  принимают нефизические отрицательные значения. Лишь при размерности системы  $d_c = 3.999$  значения констант  $g_0^*, g_1^*$  для фиксированной точки третьего типа принимают физические значения и одновременно фиксированная точка третьего типа становится устойчивой для интервала изменения  $0 \leq x_0 \leq 0.4$  (табл. 3б, в). В интервале же  $0.4 < x_0 < 1$  ни одна из фиксированных точек не является устойчивой.

Отметим, что хотя для трехмерной ХУ-модели ( $p = 2$ ) расчеты показали устойчивость примесной реплично-симметричной фиксированной точки второго типа, есть основания считать, что в более высоких порядках приближения теории, как и в случае неупорядоченных систем, рассматриваемых без учета эффектов НРС [11], устойчивой станет фиксированная точка первого типа, соответствующая критическому поведению однородной системы. На это, с одной стороны, указывает чрезвычайно слабая устойчивость ( $\lambda_3 = 0.000004$ ) фиксированной точки второго типа и то, что найденное в двухпетлевом

Таблица 1. Значения фиксированных точек и собственных значений для  $p = 1$

$d$	Тип	$x_0$	$\tilde{g}^*$	$g_0^*$	$g_1^*$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	
а) $d = 3.0$	1		0.1774	0	0	0.6536	-0.1692	-0.1692	
	2		<b>0.1844</b>	<b>0.0812</b>	<b>0.0812</b>	<b>0.5253 ± 0.0893i</b>		<b>0.2112</b>	
	3		0.0	0.1844	0	0.0812	0.5253 ± 0.0893i		-0.0392
			0.1	0.1840	0	0.0829	0.5352 ± 0.0983i		-0.0492
			0.2	0.1835	0	0.0846	0.5471 ± 0.1067i		-0.0599
			0.3	0.1830	0	0.0863	0.5607 ± 0.1133i		-0.0712
			0.4	0.1824	0	0.0880	0.5765 ± 0.1180i		-0.0832
			0.5	0.1817	0	0.0895	0.5951 ± 0.1203i		-0.0959
			0.6	0.1810	0	0.0910	0.6172 ± 0.1189i		-0.1093
			0.7	0.1802	0	0.0924	0.6439 ± 0.1114i		-0.1234
			0.8	0.1793	0	0.0936	0.6760 ± 0.0921i		-0.1381
	0.9	0.1784	0	0.0947	0.7135 ± 0.0353i		-0.1534		
	1.0	0.1774	0	0.0957	0.8573	0.6536	-0.1692		
б) $d = 3.985$	1		0.0917	0	0	0.6315	-0.4163	-0.4163	
	2		<b>0.1231</b>	<b>0.1090</b>	<b>0.1090</b>	<b>0.6986 ± 0.1311i</b>		<b>0.0022</b>	
	3	0.0	0.1231	0	0.1090	0.7047 ± 0.1069i		-0.0363	
в) $d = 3.986$	1		0.0916	0	0	0.6318	-0.4165	-0.4165	
	2		0.1230	0.1092	0.1092	0.6895 ± 0.1453i		-0.0076	
	3	0.0	0.1230	0	0.1092	0.7018 ± 0.0935i		-0.0359	

приближении пороговое значение параметра порядка  $p_c = 2.0114$ , разделяющее области критического поведения, определяемые фиксированными точками первого ( $p > p_c$ ) и второго ( $p < p_c$ ) типов, оказывается очень близким к  $p = 2$ . Этим объясняется наблюдаемое очень медленное изменение собственных значений  $\lambda_i$  матрицы устойчивости для неупорядоченной XY-модели с изменением размерности системы (табл. 2). С другой стороны, отрицательное значение критического показателя  $\alpha$  для теплоемкости однородной XY-модели в соответствии с критерием Харриса также указывает на устойчивость критического поведения модели относительно влияния замороженного беспорядка и, следовательно, на то, что в более высоких порядках приближения теории  $p_c < 2$ . Так, в работе [15] при применении псевдо- $\epsilon$ -разложения в шестипетлевом приближении и метода суммирования Паде-Бореля-Лероя с тщательно подобранным подгоночным параметром было найдено значение  $p_c = 1.912(4)$ .

По причине того что для XY-модели значение  $p_c$  оказывается очень близким к  $p = 2$ , можно ожидать,

что расчеты, проведенные в более высоких порядках приближения теории, существенно изменят и величину пороговой размерности  $d_c(p = 2)$ , хотя для моделей Изинга и Гейзенберга возможные изменения в значениях  $d_c(p)$  должны быть малыми. Основанием для этого могут служить результаты расчета критических индексов для трехмерных однородных моделей с  $p = 1, 2, 3$  и неупорядоченной модели Изинга, проведенные нами в двухпетлевом приближении с применением метода Паде-Бореля (табл. 4), и их сопоставление со значениями соответствующих индексов из работ [16, 17], в которых рекордные расчеты для трехмерных моделей были проведены в шестипетлевом приближении. Сравнение показывает, что отклонение в значениях критических индексов не превышает 0.02.

Полученные в настоящей работе значения пороговых размерностей  $d_c(p)$ , отделяющие область критического поведения с эффектами НРС  $d_c(p) < d < 4$  от области, в которой данные эффекты несущественны, можно рассматривать и как пороговые размерности, ограничивающие область

Таблица 2. Значения фиксированных точек и собственных значений для  $p = 2$

$d$	Тип	$x_0$	$\tilde{g}^*$	$g_0^*$	$g_1^*$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	
а) $d = 3.0$	1		0.155830	0	0	0.667315	-0.001672	-0.001672	
	2		<b>0.155831</b>	<b>0.000584</b>	<b>0.000584</b>	<b>0.667312</b>	<b>0.001682</b>	<b>0.000004</b>	
	3	0.0	0.0	0.155831	0	0.000584	0.667313	0.001683	-0.000001
		0.1	0.1	0.155831	0	0.000614	0.667313	0.001684	-0.000088
		0.2	0.2	0.155831	0	0.000648	0.667313	0.001685	-0.000186
		0.3	0.3	0.155831	0	0.000686	0.667313	0.001686	-0.000296
		0.4	0.4	0.155831	0	0.000729	0.667313	0.001687	-0.000419
		0.5	0.5	0.155831	0	0.000778	0.667313	0.001687	-0.000559
		0.6	0.6	0.155831	0	0.000833	0.667313	0.001688	-0.000717
		0.7	0.7	0.155831	0	0.000896	0.667314	0.001690	-0.000901
		0.8	0.8	0.155831	0	0.000971	0.667314	0.001692	-0.001116
		0.9	0.9	0.155831	0	0.001058	0.667315	0.001694	-0.001369
1.0	1.0	0.155830	0	0.001163	0.667316	0.001696	-0.001672		
б) $d = 3.10$	1		0.1499955	0	0	0.689608	-0.009539	-0.009539	
	2		0.1500170	0.00325	0.00325	0.689535	0.009887	-0.000003	
	3	0.0	<b>0.1500170</b>	<b>0</b>	<b>0.00325</b>	<b>0.689535</b>	<b>0.009887</b>	<b>0.000109</b>	
		0.1	0.1500169	0	0.00341	0.689535	0.009899	-0.000401	
		0.2	0.1500167	0	0.00360	0.689536	0.009926	-0.000961	
в) $d = 3.999$	1		0.089762	0	0	1.119442	-0.133591	-0.133591	
	2		0.092307	0.036991	0.036991	1.103421	0.227335	-0.025378	
	3	0.0	<b>0.092307</b>	<b>0</b>	<b>0.036991</b>	<b>1.103421</b>	<b>0.227335</b>	<b>0.030783</b>	
		0.1	<b>0.092270</b>	<b>0</b>	<b>0.038723</b>	<b>1.102142</b>	<b>0.235506</b>	<b>0.021563</b>	
		0.2	<b>0.092205</b>	<b>0</b>	<b>0.040559</b>	<b>1.100913</b>	<b>0.244667</b>	<b>0.011135</b>	
		0.3	0.092108	0	0.042500	1.099845	0.254810	-0.000648	
		0.4	0.091970	0	0.044547	1.099106	0.265820	-0.013939	

применимости метода  $\epsilon$ -разложения к данной трехвершинной модели слабонеупорядоченной системы и результатов работ [4–6] на нем основанных. Проведенные исследования показывают также, что результаты применения метода  $\epsilon$ -разложения к многовершинным статистическим моделям независимо от порядка используемого приближения не являются надежными. Это объясняется конкуренцией между различными типами фиксированных точек в параметрическом пространстве многовершинных моделей, которая не позволяет, как правило, осуществлять протяжку  $\epsilon \rightarrow 1$  без пересечения маргинальных размерностей системы  $3 \leq d_c < 4$ , разделяющих области устойчивости различных фиксированных точек.

Для выяснения природы поведения неупорядоченной системы с эффектами НРС в области отсутствия устойчивого критического состояния был исследован фазовый портрет модели на основании решения системы уравнений

$$r \frac{\partial g_i}{\partial r} = \beta_i(\tilde{g}, g_0, g_1), \tag{15}$$

задающей фазовые траектории в пространстве вершин  $(\tilde{g}, g_0, g_1)$ . Исследования показали (рис. 2), что для модели Изинга с  $d_c = 3.986$  при  $d \geq 3.986$ , где не устойчива ни одна из фиксированных точек, реализуется режим сильной связи с ренормгрупповыми потоками, задаваемыми  $(\tilde{g}, g_0, g_1) \rightarrow (\infty, 0, 0)$  при условии  $\tilde{g} > \tilde{g}^*$ . В то же время при  $\tilde{g} < \tilde{g}^*$  реализуются потоки с  $(\tilde{g}, g_0, g_1) \rightarrow (0, 0, 0)$ , асимптоти-



Таблица 3. Значения фиксированных точек и собственных значений для  $p = 3$

$d$	Тип	$x_0$	$\tilde{g}^*$	$g_0^*$	$g_1^*$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
а) $d = 3.0$	1		<b>0.1383</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0.6814</b>	<b>0.1315</b>	<b>0.1315</b>
	2		0.1419	-0.0359	-0.0359	0.6727	-0.0891	-0.1450
	3	0.0	0.1419	0	-0.0359	0.6727	-0.0891	-0.0058
		0.1	0.1420	0	-0.0382	0.6727	-0.0865	0.0011
		0.2	0.1420	0	-0.0408	0.6728	-0.0836	0.0088
б) $d = 3.998$	1		<b>0.090189</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1.008004</b>	<b>0.024111</b>	<b>0.024111</b>
	2		0.090269	-0.005167	-0.005167	-3.346714	-0.829868	-0.861435
	3	0.0	0.090269	0	-0.005167	1.007806	-0.022461	-0.005642
		0.1	0.090271	0	-0.005519	1.007803	-0.022334	-0.004451
0.2		0.090273	0	-0.005922	1.007801	-0.022185	-0.003093	
в) $d = 3.999$	1		0.081989	0	0	1.113633	-0.000820	-0.000820
	2		0.081989	0.000171	0.000171	1.113633	0.000822	-0.000228
	3	0.0	<b>0.081989</b>	<b>0</b>	<b>0.000171</b>	<b>1.113633</b>	<b>0.000822</b>	<b>0.000228</b>
		0.1	<b>0.081989</b>	<b>0</b>	<b>0.000183</b>	<b>1.113633</b>	<b>0.000822</b>	<b>0.000188</b>
		0.2	<b>0.081989</b>	<b>0</b>	<b>0.000196</b>	<b>1.113633</b>	<b>0.000823</b>	<b>0.000142</b>
		0.3	<b>0.081989</b>	<b>0</b>	<b>0.000212</b>	<b>1.113633</b>	<b>0.000823</b>	<b>0.000088</b>
		0.4	<b>0.081989</b>	<b>0</b>	<b>0.000230</b>	<b>1.113633</b>	<b>0.000823</b>	<b>0.000025</b>
		0.5	0.081989	0	0.000251	1.113633	0.000823	-0.000050
		0.6	0.081989	0	0.000277	1.113633	0.000824	-0.000140
		0.7	0.081989	0	0.000309	1.113633	0.000824	-0.000251
		0.8	0.081989	0	0.000350	1.113633	0.000825	-0.000391
		0.9	0.081989	0	0.000402	1.113633	0.000826	-0.000574
1.0	0.081989	0	0.000473	1.113633	0.000828	-0.000820		

Таблица 4. Значения критических индексов для трехмерных моделей в реплично-симметричных фиксированных точках (ФТ)

Модель	ФТ	$\eta$	$\nu$	$\gamma$	$\beta$	$\alpha$
Изинга	ФТ1	0.0280	0.637	1.256	0.327	0.088
	[16]	0.031(4)	0.630(2)	1.241(2)	0.325(2)	0.110(5)
	ФТ2	0.0283	0.679	1.339	0.349	-0.037
	[17]	0.030(3)	0.678(10)	1.330(17)	0.349(5)	-0.034(30)
ХУ	ФТ1	0.0288	0.674	1.328	0.347	-0.022
	[16]	0.034(3)	0.669(1)	1.316(1)	0.346(1)	-0.007(6)
Гейзенберга	ФТ1	0.0283	0.706	1.392	0.363	-0.118
	[16]	0.034(3)	0.705(1)	1.387(1)	0.364(1)	-0.115(9)

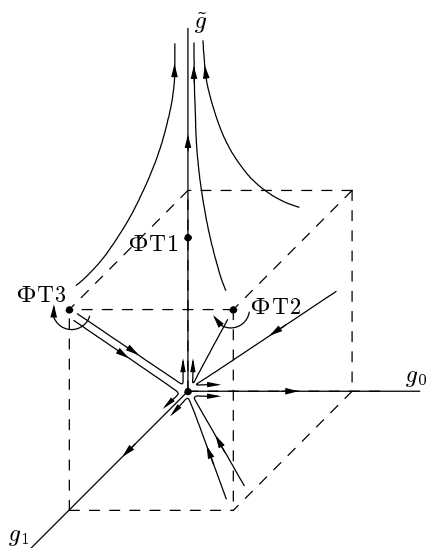


Рис. 2. Картина ренормгрупповых потоков в параметрическом пространстве  $(\tilde{g}, g_0, g_1)$  для модели Изинга при размерности системы  $d = 3.99$

чески близко приближающиеся к гауссовой фиксированной точке  $(0, 0, 0)$ , а затем также стремящиеся к бесконечности вдоль направлений, задаваемых осями  $\tilde{g}, g_0, g_1$ . Такое поведение потоков для  $\tilde{g} < \tilde{g}^*$  обусловливается близостью размерности системы  $d$  к четырем, когда влияние флуктуаций пренебрежимо мало и притягивающим центром становится гауссова фиксированная точка.

#### 4. ВЫВОДЫ

Таким образом, проведенные в двухпетлевом приближении ренормгрупповые исследования слабоупорядоченных систем произвольной размерности от трех до четырех показали, что критическое поведение трехмерных систем устойчиво относительно влияния эффектов нарушения репличной симметрии. В системах с однокомпонентным параметром порядка реализуется критическое поведение, определяемое структурным беспорядком с реплично-симметричной фиксированной точкой. Наличие слабого беспорядка не влияет на критическое поведение многокомпонентных систем, хотя для доказательства этого в случае систем с  $p = 2$  необходимо проведение расчетов в более высоких порядках приближения.

Эффекты нарушений репличной симметрии проявляются лишь при размерностях неупорядоченной системы больших трех, при этом пороговые значения размерности  $d_c$  зависят от числа компонент па-

раметра порядка  $p$  и величины параметра  $x_0$ . Качественно предсказываемая картина влияния эффектов нарушений репличной симметрии на критическое поведение неупорядоченных систем с размерностью  $d > d_c$  согласуется с результатами работ [4–6], получаемыми на основе  $\epsilon$ -разложения: для систем с  $p = 1$  эффекты НРС разрушают устойчивое критическое поведение и реализуется режим сильной связи, а для систем с  $p = 2, 3$  возникает область неуниверсального критического поведения при значениях параметра  $0 \leq x_0 \leq x_c(d)$ . При значениях параметра  $x_0$  вне этого интервала устойчивое критическое поведение системы отсутствует, как и в случае с  $p = 1$ .

Полученные значения пороговых размерностей  $d_c(p)$ :  $d_c(p = 1) = 3.986$ ,  $d_c(p = 2) = 3.10$ ,  $d_c(p = 3) = 3.999$ , отделяющих область критического поведения с эффектами НРС,  $d_c(p) < d < 4$ , от области, в которой данные эффекты несущественны, задают одновременно и нижнюю границу области применимости результатов  $\epsilon$ -разложения к описанию модели слабоупорядоченных систем с эффектами НРС [4–6]. В статье обсуждается, что расчеты, проведенные в более высоких порядках приближения теории, могут существенно изменить величину пороговой размерности  $d_c$  для XY-модели, хотя для моделей Изинга и Гейзенберга изменения в значениях  $d_c(p)$  должны быть малыми, оставляющими область применимости результатов  $\epsilon$ -разложения близкой к размерности четыре.

С увеличением концентрации дефектов можно ожидать понижения пороговых значений  $d_c$  и достижения ими значений  $d_c \leq 3$ , начиная с некоторой пороговой концентрации. В этом случае влияние эффектов нарушения репличной симметрии может приобрести реальный смысл и быть значительным. В силу особенностей проявления эффектов НРС в критическом поведении неупорядоченных систем роль пороговой концентрации дефектов для модели Изинга может сыграть концентрация  $n_s$ , соответствующая порогу спиновой перколяции, с отсутствием устойчивого критического поведения для  $n > n_s$ , а для XY-модели и модели Гейзенберга — концентрация дефектов, соответствующая порогу примесной перколяции  $n_{imp} = 1 - n_s$ , с неуниверсальным критическим поведением для  $n_{imp} < n < n_s$  и отсутствием устойчивого критического поведения для  $n > n_s$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 00-02-16455 и 02-02-06181) и Министерства образования РФ (проекты Е00-3.2-43 и УР.01.01.052).

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. F. Edwards and P. W. Anderson, *J. Phys. F* **5**, 965 (1975).
2. J. Emery, *Phys. Rev. B* **11**, 239 (1975).
3. G. Grinstein and A. Luther, *Phys. Rev. B* **13**, 1329 (1976).
4. Vik. S. Dotsenko, A. B. Harris, D. Sherrington, and R. B. Stinchcombe, *J. Phys. A* **28**, 3093 (1995).
5. Vik. S. Dotsenko and D. E. Feldman, *J. Phys. A* **28**, 5183 (1995).
6. Вик. С. Доценко, *УФН* **165**, 481 (1995).
7. В. В. Прудников, А. В. Иванов, А. А. Федоренко, *Письма в ЖЭТФ* **66**, 793 (1997); В. В. Прудников, С. В. Белим, А. В. Иванов и др., *ЖЭТФ* **114**, 972 (1998); В. В. Прудников, П. В. Прудников, А. А. Федоренко, *ЖЭТФ* **116**, 611 (1999); V. V. Prudnikov, P. V. Prudnikov, and A. A. Fedorenko, *Phys. Rev. B* **62**, 8777 (2000).
8. К. Б. Варнашев, А. И. Соколов, *ФТТ* **38**, 3665 (1996); А. I. Sokolov, К. В. Varnashev, and А. I. Mudrov, *Int. J. Mod. Phys. B* **12**, 1365 (1998); А. I. Sokolov and К. В. Varnashev, *Phys. Rev. B* **59**, 8363 (1999).
9. В. В. Прудников, П. В. Прудников, А. А. Федоренко, *Письма в ЖЭТФ* **73**, 153 (2001).
10. V. V. Prudnikov, P. V. Prudnikov, and A. A. Fedorenko, *Phys. Rev. B* **63**, 184201 (2001).
11. A. Pelissetto and E. Vicari, *Phys. Rev. B* **62**, 6393 (2000).
12. В. В. Прудников, А. Н. Вакилов, *ЖЭТФ* **103**, 962 (1993).
13. G. Parisi, *J. Phys. A* **13**, 1101 (1980); G. Parisi, *J. Phys. A* **13**, L115 (1980); G. Parisi, *J. Phys. A* **13**, 1887 (1980); M. Mezard, G. Parisi, and M. Virasoro, *Spin-Glass Theory and Beyond*, World Scientific, Singapore (1987); Вик. С. Доценко, *УФН* **163**, 6, 1 (1993).
14. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon, Oxford (1996).
15. M. Dudka, Yu. Holovatch, and T. Yavorskii, *J. Phys. Stud.* **5**, 233 (2001).
16. J. C. LeGuillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. B* **21**, 3976 (1980).
17. A. Pelissetto and E. Vicari, E-print archives, cond-mat/0002402.