

О ПРИРОДЕ ВЫТЯНУТОЙ ФОРМЫ ТАКТОИДОВ В ЛИОТРОПНЫХ НЕОРГАНИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

А. В. Казначеев, М. М. Богданов, С. А. Тараскин*

*Институт элементоорганических соединений им. А. Н. Несмеянова Российской академии наук
117813, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 9 января 2002 г.

Получена тактоидная фаза, представляющая собой анизотропную мезофазу, диспергированную в изотропном растворе. Построена модель, описывающая форму анизотропных областей — тактоидов. Показано, что вытянутая форма тактоидов обусловлена конкуренцией между упругой энергией нематической фазы и поверхностной энергией. С помощью этой модели из экспериментальных данных определено отношение констант упругости K_3/K_1 . Экспериментально обнаружено, что магнитное поле ориентирует и вытягивает тактоиды. Предложено объяснение этого явления.

PACS: 61.30.St, 61.30.-v, 61.30.Hn

Сегодня хорошо известны термотропные и лиотропные жидкие кристаллы [1-3]. Первые — это химически чистые вещества, состоящие из молекул палочко- или дискообразной формы. В результате взаимодействия между такими молекулами возникает ориентационный порядок их выделенных осей при отсутствии дальнего трехмерного трансляционного порядка. Лиотропные жидкие кристаллы образуются при растворении некоторых веществ в определенных растворителях [2-4]. Анизометричными структурными элементами в этом случае являются агрегаты молекул. Их размеры и форма зависят от концентрации и температуры. Это приводит к большому разнообразию жидкокристаллических фаз и фазовых переходов между ними. Среди лиотропных жидких кристаллов по химической классификации существует класс неорганических жидких кристаллов. Они возникают в дисперсиях неорганических веществ [5, 6].

В последние годы развиваются исследования молекулярной структуры таких жидких кристаллов [5-8]. Однако макроскопические свойства, характерные для жидких кристаллов, такие как константы упругости, коэффициенты вязкости [1], практически не исследованы. Можно отметить две работы [9, 10], в которых исследуется вопрос о константах упругости в нематической фазе лиотропного

неорганического жидкого кристалла пятиокись ванадия (V_2O_5)–вода. В работе [10] впервые обнаружено влияние магнитного поля на нематическую фазу этой системы и возникновение магнитогидродинамических доменов, которые характерны и для других типов жидких кристаллов [11, 12]. Из данных по переходу Фредерикса получено значение константы упругости поперечного изгиба $K_1 = 4 \cdot 10^{-7}$ дин [10]. По порядку величины она согласуется с аналогичными данными для термотропных и других типов лиотропных жидких кристаллов. Здесь нет принципиальных различий между ними.

Однако в лиотропных неорганических жидких кристаллах наблюдается явление, которое отсутствует в других типах жидких кристаллов. Оно было обнаружено в 20-е годы Г. Цохером и заключается в том, что при низких концентрациях (~ 1 масс.%) неорганических веществ наблюдается изотропная фаза, содержащая анизотропные капли, имеющие вытянутую форму [5, 6, 13]. Такую двухфазную систему, которая предшествует нематической фазе, Г. Цохер назвал тактоидной фазой, а анизотропные капли тактоидами.

Факт существования двухфазных систем в виде дисперсии хорошо известен. Например, капли жидкого кристалла в изотропной матрице [14], капли жидкокристаллической фазы, сосуществующие с изотропной в процессе плавления. В этих случаях

*E-mail: son@pmc.ineos.ac.ru

Рис. 1. Текстура тактоидной фазы в системе пятиокись ванадия–вода при концентрации V_2O_5 равной 1.1 масс.%. Толщина ячейки 200 мкм

капли разных размеров имеют форму шара, что связано с минимумом поверхностной энергии. В тактоидной фазе это не так, анизотропные капли имеют вытянутую форму.

До последнего времени вопрос о причине такой формы тактоидов оставался открытым. В настоящей работе предложено объяснение этого явления. Сопоставление теоретических результатов с экспериментом по измерению размеров тактоидов различного объема позволило оценить отношение констант упругости продольного и поперечного изгибов нематической фазы капель. Кроме того, экспериментально обнаружено, что магнитное поле ориентирует и вытягивает тактоиды по своему направлению. Предложено объяснение этого явления.

Типичным представителем лиотропных неорганических жидких кристаллов являются золи пятиокси ванадия в воде. Они получены по методике, описанной в работе [15]. Текстура тактоидной фазы таких золь представляется на рис. 1. На темном фоне, который соответствует изотропной фазе, видны анизотропные области — тактоиды. Основные факты по наблюдению тактоидов можно суммировать следующим образом:

1. Нами наблюдалось слияние тактоидов. Стадии такого процесса представлены на рис. 2. После слияния форма образовавшегося тактоида остается веретенообразной. Это свидетельствует о том, что тактоиды — равновесные капли.

2. Границы тактоидов являются дугами окружности (рис. 1).

Рис. 2. Процесс слияния тактоидов

3. Текстура тактоида при его вращении между скрещенными поляроидами изменяется (рис. 3). Такое изменение текстуры свидетельствует о том, что поле директора на границах тактоида имеет тангенциальную ориентацию, а в его вершинах находятся дефекты — буджумы [14].

На основе этих наблюдений предполагается, что тактоид — капля нематической фазы, сосуществующая с изотропной фазой. Модель его формы и поля директора представлены на рис. 4. Граница тактоида является поверхностью вращения дуги окружности радиуса R вокруг оси z . Такой выбор границы сделан на основе экспериментальных данных (рис. 1). Наблюдения показывают, что для тактоидов разного размера, меньшего толщины измерительной ячейки, границы остаются дугами окружности.

Предполагаем, что поле директора \mathbf{n} в каждой точке тактоида совпадает с ортом \mathbf{e}_η бисферической системы координат (см. рис. 4) [16]. Такой выбор поля директора удовлетворяет тангенциальным граничным условиям. Здесь предполагается сильная связь директора с поверхностью тактоида. Основанием для этого является то, что во всех задачах, где учитывается энергия сцепления W , последняя входит в безразмерном виде $WV^{1/3}/K$, где V — объем тактоида, K — одна из констант упругости жидкого кристалла. Поэтому по крайней мере для крупных тактоидов условие сильной связи должно выполняться. При сделанном выборе поля директора деформация кручения, связанная с константой упругости K_2 , отсутствует. Основанием для этого явля-

Рис. 3. Изменение текстуры тактоида при его вращении между скрещенными поляроидами

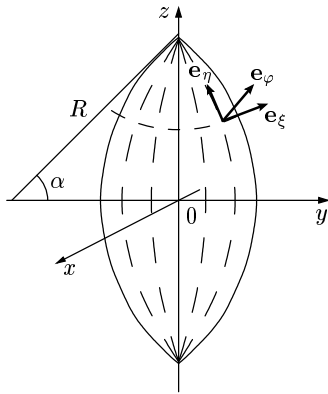


Рис. 4. Модель тактоида

ется вид текстур тактоидов (рис. 3). При наличии кручения поля директора в каплях термотропных нематических жидких кристаллов текстуры имеют другой вид [14].

Таким образом, форма тактоида определяется двумя параметрами, R и α (рис. 4). При $\alpha = \pi/2$ тактоид превращается в шар. Свободная энергия Φ тактоида складывается из упругой энергии Φ_{el} нематической фазы и поверхностной энергии $\Phi_s = \sigma S$, где σ — поверхностное натяжение, S — площадь поверхности тактоида. Выражение для свободной энергии Φ можно записать сразу, исходя из соображений размерности:

$$\Phi = K_1 R \Phi_{el}^{(1)}(\alpha) + K_3 R \Phi_{el}^{(3)}(\alpha) + \sigma R^2 \Phi_s(\alpha), \quad (1)$$

где K_1 и K_3 — константы упругости соответственно поперечного и продольного изгибов [1, 17], $\Phi_{el}^{(1)}(\alpha)$ и $\Phi_{el}^{(3)}(\alpha)$ — безразмерные функции угла α , связанные с этими деформациями. Расчет этих функций приведен в Приложении I. Следует отметить, что при приближении к точечным дефектам на поверхности тактоида — буждхам — плотность упругой энергии расходится. Однако ее интегрирование по объему тактоида приводит к конечному значению. Выражение для безразмерной функции $\Phi_s(\alpha)$ получается при вычислении площади поверхности такто-

ида и имеет вид

$$\Phi_s(\alpha) = 4\pi(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha). \quad (2)$$

Тактоид постоянного объема V принимает такие значения R и α , при которых его полная энергия Φ минимальна. Функция (1) содержит две переменные R и α , которые связаны соотношением

$$V = R^3 \Psi(\alpha) = \text{const}, \quad (3)$$

где введено обозначение

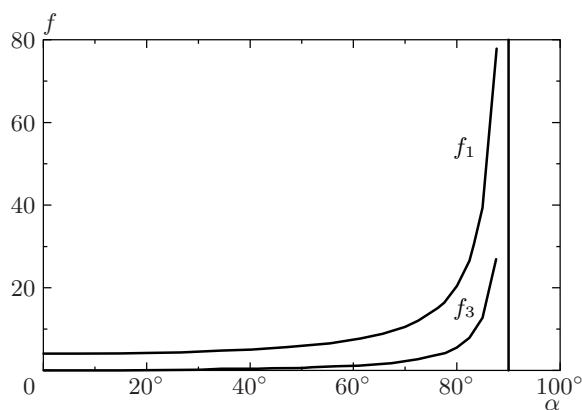
$$\Psi(\alpha) = 2\pi \left(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right).$$

Выражая R из (3) и подставляя в (1), получаем

$$\tilde{\Phi} = \frac{K_i}{\sigma V^{1/3}} \Psi_i(\alpha) + \Psi_s(\alpha), \quad (4)$$

где $\tilde{\Phi} = \Phi/\sigma V^{2/3}$ — безразмерная энергия, $\Psi_i(\alpha) = \Phi_{el}^{(i)}/\Psi^{1/3}$ ($i = 1, 3$), по повторяющемуся индексу i здесь и далее подразумевается суммирование, $\Psi_s(\alpha) = \Phi_s(\alpha)/\Psi^{2/3}$. Первые два члена формулы (4) связаны с упругостью нематической фазы. Увеличение угла α приводит к их возрастанию. Поверхностная энергия описывается функцией $\Psi_s(\alpha)$. Она универсальна и уменьшается при увеличении α . В результате конкуренции упругого и поверхностного слагаемых в формуле (4) минимум свободной энергии достигается при $\alpha < \pi/2$, т.е. нематическая капля будет иметь вытянутую форму. Положение минимума свободной энергии зависит от безразмерных параметров $K_i/\sigma V^{1/3}$ ($i = 1, 3$). Из формулы (4) следует, что увеличение объема тактоида приводит к уменьшению вклада упругой энергии. Следовательно, форма крупных тактоидов должна приближаться к сферической. Исследуя свободную энергию (4) на экстремум, можно получить формулу зависимости радиуса R_0 кривизны тактоида от угла α :

$$R_0 = C_i f_i(\alpha), \quad (5)$$

Рис. 5. Графики функций $f_1(\alpha)$ и $f_3(\alpha)$

где $C_i = K_i/\sigma$ — характерные размеры задачи, $f_i(\alpha) = -\Psi'_i/(\Psi^{1/3}\Psi'_s)$ — возрастающие безразмерные функции угла α . Они имеют вид:

$$f_1(\alpha) = \frac{\alpha \sin \alpha - 2\alpha^2 \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha [\alpha(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin^2 \alpha]},$$

$$f_3(\alpha) = \frac{(\alpha^2 - \sin^2 \alpha) [\alpha(1 + 2 \cos^2 \alpha) - 3 \sin \alpha \cos \alpha]}{4 \sin \alpha \cos \alpha [\alpha(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) - 2 \sin^2 \alpha]}.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ $f_1 \rightarrow 4$, $f_3 \sim 10\alpha^2$. При $\alpha \rightarrow \pi/2$ $f_{1,3} \rightarrow \infty$. Графики этих функций представлены на рис. 5.

Экспериментально измеряя зависимость $R_0(\alpha)$ для тактоидов различного объема и сопоставляя ее с формулой (5), можно получить данные о C_1 и C_3 . Для этой цели нами выбран лиотропный неорганический жидкий кристалл V_2O_5 -вода. Его золи приготавливались по методике, описанной в работе [15]. Мы наблюдали тактоидную фазу в интервале концентраций V_2O_5 0.3–1.2 масс.%. Исследуемая система заправлялась в плоскопараллельные стеклянные капилляры толщиной порядка 200 мкм, которые герметизировались плицеином. Толщина капилляров задавалась тефлоновыми прокладками и до заправки измерялась интерференционным методом. Сразу после заправки текстура вещества в капиллярах была анизотропной. В течение часа мы наблюдали ее расслоение на изотропную и анизотропные области. В дальнейшем анизотропные области приобретали форму тактоидов. При этом наблюдалось их распределение по размерам.

Для подтверждения факта, что вытянутая форма тактоидов является равновесной, в капиллярах с исследуемым веществом механически возбуждались потоки. При этом границы тактоидов размывались, в изотропной фазе за счет потоков индуцировалось

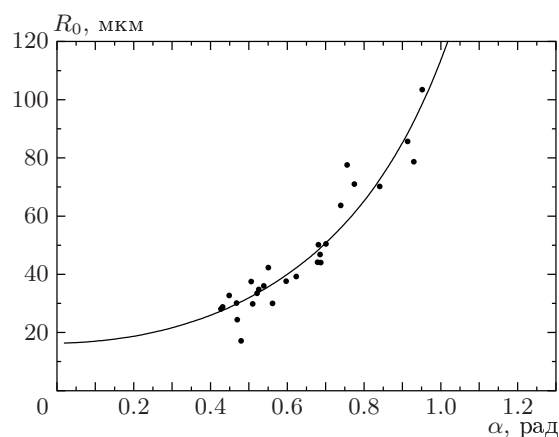
Рис. 6. Зависимость $R_0(\alpha)$ при концентрации V_2O_5 равной 0.33 масс.%. Значения $C_1 = 4.1 \pm 0.6$ мкм, $C_3 = 92.1 \pm 8.6$ мкм

Рис. 7. Ориентация тактоидов в магнитном поле

двулучепреломление. Текстура в целом становилась анизотропной. С течением времени происходил тот же процесс, что и непосредственно после заправки вещества в капилляр. Анизотропные области опять приобретали равновесную форму тактоидов.

Для того чтобы дать возможность системе прийти в равновесие, все измерения проводились через сутки после заправки вещества в капилляры. Измерения проводились с помощью поляризационного микроскопа Axiolab Pol фирмы Zeiss. Изображение через видекамеру выводилось на монитор. Определение размеров тактоидов выполнялось с помощью приставки Linkam VTO 232. Измерялись только те тактоиды, поперечные размеры которых были меньше толщины ячейки.

Результатом измерений были параметры R_0 и α для тактоидов различного объема. На рис. 6 представлена типичная экспериментальная зависимость $R_0(\alpha)$. По методу наименьших квадратов с помощью функции (5) рассчитывались коэффициенты C_1 и C_3 . Сплошной линией на рис. 6 показана аппроксимирующая кривая. Отношение C_3/C_1 равно отношению K_3/K_1 . Для всех исследованных образцов $C_1 \sim 1$ мкм, $C_3 \sim 10\text{--}100$ мкм, $K_3/K_1 \sim 10\text{--}100$. Полученные значения K_3/K_1 очень велики по сравнению с термотропными и органическими лиотропными жидкими кристаллами. Обычно K_3/K_1 не более 3 [1, 18]. Если использовать значение $K_1 = 4 \cdot 10^{-7}$ дин, полученное из данных по переходу Фредерикса в нематической фазе исследуемой системы [10], и $C_1 \sim 1$ мкм, то можно сделать оценку поверхностного натяжения $\sigma \sim 10^{-3}$ эрг/см² на границе тактоида. Такие малые значения поверхностного натяжения приводят к тому, что макроскопические тактоиды являются вытянутыми.

Известно, что магнитное поле ориентирует тактоиды по своему направлению [13] (рис. 7). Нами обнаружено, что магнитное поле, кроме того, вытягивает тактоиды. Наиболее заметно это проявляется для крупных тактоидов (рис. 8). Для объяснения этого явления в выражении (1) для свободной энергии Φ необходимо учесть магнитное слагаемое, возникающее в результате влияния магнитного поля \mathbf{H} на поле директора \mathbf{n} . Это слагаемое связано с анизотропией магнитной восприимчивости χ_a . Плотность магнитной энергии F_m имеет вид [1, 17]

$$F_m = -\frac{\chi_a}{2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})^2. \quad (6)$$

При $\chi_a > 0$ магнитное поле стремится ориентировать директор по своему направлению. Интегрирование выражения (6) по объему тактоида позволяет рассчитать магнитную энергию (см. Приложение II). Однако результат можно записать сразу, используя соображения размерности. Он имеет вид

$$-\chi_a H^2 R^3 \Phi_m(\alpha), \quad (7)$$

где $\Phi_m(\alpha)$ — безразмерная функция угла α (см. Приложение II). Прибавляя формулу (7) в правую часть выражения (1) и исключая, как и ранее, R , получаем

$$\tilde{\Phi} = \frac{K_i}{\sigma V^{1/3}} \Psi_i(\alpha) + \Psi_s(\alpha) - \frac{\chi_a H^2 V^{1/3}}{\sigma} \Psi_m(\alpha), \quad (8)$$

где $\Psi_m(\alpha) = \Phi_m(\alpha)/\Psi$ — убывающая безразмерная функция угла α .

Из формулы (8) следует, что при малых V магнитным слагаемым можно пренебречь. Однако при этом важную роль играют упругие слагаемые. Таким образом, мелкие тактоиды вытягиваются за счет конкуренции упругих и поверхностных сил. Для крупных тактоидов (большие V), наоборот, упругие слагаемые малы и конкуренция возникает между магнитным и поверхностным слагаемым в выражении (8). Это приводит к вытянутости крупных тактоидов.

Для количественного решения задачи необходимо исследовать выражение (8) энергии $\tilde{\Phi}$ на экстремум при постоянном объеме V . Это приводит к квадратному уравнению относительно радиуса R кривизны тактоида:

$$R^2 - \left[\frac{\sigma}{\chi_a H^2} \frac{\Psi'_s}{\Psi'_m \Psi^{1/3}} \right] R - \frac{K_i}{\chi_a H^2} \frac{\Psi'_i}{\Psi'_m \Psi^{2/3}} = 0. \quad (9)$$

Его решение имеет два корня R_{\pm} , которые равны:

$$R_{\pm} = \frac{\sigma}{2\chi_a H^2} \frac{\Psi'_s}{\Psi'_m \Psi^{1/3}} \times \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4K_i \chi_a H^2}{\sigma^2} \frac{\Psi'_i \Psi'_m}{(\Psi'_s)^2}} \right]. \quad (10)$$

Если использовать формулу (5) для $R_0(\alpha)$ — радиуса кривизны равновесного тактоида в отсутствие магнитного поля, то (10) удобно записать в виде

$$R_{\pm} = \frac{\sigma}{2\chi_a H^2} \frac{1}{f(\alpha)} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\chi_a H^2}{\sigma} R_0(\alpha) f(\alpha)} \right], \quad (11)$$

где

$$f(\alpha) = \frac{\Psi'_m \Psi^{1/3}}{\Psi'_s} = \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha (6 + \sin^2 \alpha) + 6\alpha^2 \cos^3 \alpha - \alpha \sin \alpha (12 - 11 \sin^2 \alpha)}{24 \cos \alpha [2 \sin^2 \alpha - \alpha (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)]}$$

— возрастающая функция угла α . При $\alpha \rightarrow 0$ величина $f \rightarrow 0$. При $\alpha \ll 1$ радикал в формуле (11) можно разложить в ряд. Тогда получаем

$$R_- \approx R_0(\alpha),$$

$$R_+ \approx \frac{\sigma}{\chi_a H^2} \frac{1}{f(\alpha)}.$$

Если $\alpha > \alpha_c$, которое находится из решения уравнения

$$\frac{4\chi_a H^2}{\sigma} R_0(\alpha_c) f(\alpha_c) = 1,$$

то действительные решения R_{\pm} исчезают. Это соответствует тому, что даже крупные капли вытянуты за счет магнитного поля и для них $\alpha < \alpha_c$. Оба значения R_{\pm} в формуле (11) отвечают минимуму свободной энергии (8). При одном и том же α значению R_- соответствует мелкий тактоид, а R_+ соответствует более крупный тактоид. Графики функции (11) при $\sigma = 10^{-3}$ эрг/см², $\chi_a = 10^{-9}$ [10], $C_1 = 4$ мкм, $C_3 = 40$ мкм и различных значениях магнитного поля H представлены на рис. 9. Двухзначность этой функции связана с тем, что мелкие тактоиды вытягиваются за счет упругих сил, а крупные — за счет магнитных сил.

Полученные в работе отношения $K_3/K_1 \sim 10$ согласуются с аналогичными данными для другой лиотропной нематической системы вирус табачной мозаики (TMV)–вода. Для нее значение $K_3/K_1 = 8.8$ получено на основе изучения магнитогидродинамических доменов [19]. Следует отметить, что в системе TMV–вода, хотя она и не относится к неорганическим лиотропным жидким кристаллам, также наблюдается тактоидная фаза [20]. Кроме того, отношение $K_3/K_1 \sim 10$ измерено также в нематической фазе N_1 лиотропного жидкого кристалла системы тетрапалладиевый органил–пентадекан [21]. Эти измерения основаны на изучении перехода Фредерикса. По-видимому, большие значения K_3/K_1 связаны с большими значениями отношения длины L к диаметру D структурных элементов. Например, для TMV $L/D \approx 17$ [19], в то время как для типичного представителя термотропных жидких кристаллов параазоксианизола (ПАА) $L/D \approx 4$ [1].

Большие значения отношения $K_3/K_1 > 10$, полученные в работе, могут быть связаны с тем, что в модели тактоида связь директора с границей принята сильной. Однако, как показано выше, для мелких тактоидов это условие может нарушаться. Поэтому для обработки таких экспериментальных результатов необходимо уточнить модель, учитывая энергию сцепления.

Предложенное объяснение вытянутой формы тактоидов основано на конкуренции между упругой энергией нематической фазы и поверхностной энергией. Это возможно при условии сильной связи директора с границей. При этом поверхностное натяжение $\sigma \sim 10^{-3}$ эрг/см² мало. Обычно, для термотропных жидких кристаллов ситуация обратная: $\sigma \sim 10$ эрг/см², $W \sim 10^{-2}$ эрг/см² [22]. Поэтому в них не наблюдается вытянутая форма капель. Для сравнения W и σ необходимо дополнительно иметь экспериментальные данные о значении энергии сцепления в исследуемой системе. В настоящее время они отсутствуют. Хотя уже сейчас можно ожидать, что $W \geq \sigma$. По-видимому в этом проявляется одна из особенностей лиотропных неорганических жидких кристаллов.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Выражение для плотности упругой энергии F_{el} нематической фазы имеет вид [1, 17]

$$F_{el} = \frac{K_1}{2} (\text{div } \mathbf{n})^2 + \frac{K_2}{2} (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n})^2 + \frac{K_3}{2} (\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n})^2, \quad (\text{I.1})$$

где K_1, K_2, K_3 — константы упругости соответственно поперечного изгиба, кручения и продольного изгиба, \mathbf{n} — директор. Единичный вектор \mathbf{n} совпадает с ортом \mathbf{e}_η бисферической системы координат ξ, η, φ . В этой системе координат $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$. Бисферические координаты связаны с декартовыми координатами x, y, z соотношениями [16]

$$x = \frac{a \sin \xi \cos \varphi}{\text{ch } \eta - \cos \xi},$$

$$y = \frac{a \sin \xi \sin \varphi}{\text{ch } \eta - \cos \xi},$$

$$z = \frac{a \text{ sh } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \xi},$$

где $a = R \sin \alpha$ — параметр преобразования (рис. 4). Упругая энергия Φ_{el} нематической фазы получается интегрированием выражения (I.1) по объему тактоида. В бисферических координатах она имеет вид

$$\Phi_{el} = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \times$$

$$\times \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \frac{4K_1 \text{ sh}^2 \eta \sin \xi + K_3 \sin^3 \xi}{(\text{ch } \eta - \cos \xi)^3} d\xi. \quad (\text{I.2})$$

Рис. 8. Магнитное поле вытягивает крупные тактоиды

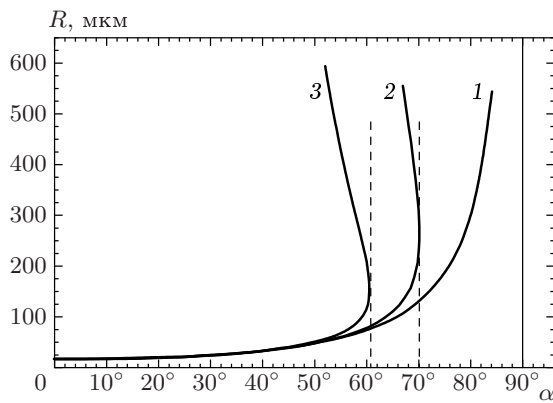


Рис. 9. Зависимость $R(\alpha)$ при различных значениях напряженности магнитного поля: 1 — 0, 2 — 10, 3 — 20 кЭ; $C_1 = 4$ мкм, $C_3 = 40$ мкм, $\sigma = 10^{-3}$ эрг, $\chi_a = 10^{-9}$

Интегрируя (I.2), получаем

$$\Phi_{el} = K_1 R \cdot 4\pi(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + K_3 R \pi(3 \sin \alpha - 3\alpha \cos \alpha - \alpha^2 \sin \alpha). \quad (I.3)$$

Сравнение (I.3) с первыми двумя слагаемыми формулы (1) позволяет записать:

$$\begin{aligned} \Phi_{el}^{(1)}(\alpha) &= 4\pi(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha), \\ \Phi_{el}^{(3)}(\alpha) &= \pi(3 \sin \alpha - 3\alpha \cos \alpha - \alpha^2 \sin \alpha). \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Выражение для плотности магнитной энергии F_m (6) зависит от $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})^2$. Если \mathbf{H} совпадает с осью

тактоида Z (рис. 4), то $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})^2 = n_z^2 H^2$. Для поля директора \mathbf{n} можно записать: $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\eta / e_\eta$, где

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \mathbf{k},$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты декартовой системы координат, e_η — модуль \mathbf{e}_η . Тогда для n_z^2 получаем

$$n_z^2 = \left(\frac{1 - \operatorname{ch} \eta \cos \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \right)^2. \quad (II.1)$$

Для расчета магнитной энергии Φ_m проводим интегрирование выражения (6) с учетом (II.1) по объему тактоида в бисферических координатах. Этот интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_m &= -\frac{\chi_a H^2}{2} a^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \times \\ &\times \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \frac{\sin \xi (1 - \operatorname{ch} \eta \cos \xi)^2}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^5} d\xi. \quad (II.2) \end{aligned}$$

Вычисление (II.2) приводит к результату:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= -\chi_a H^2 R^3 \frac{\pi}{36} \times \\ &\times [\sin \alpha (20 + \cos^2 \alpha) - 3\alpha \cos \alpha (7 + 2 \sin^2 \alpha)]. \quad (II.3) \end{aligned}$$

Сравнение (II.3) с формулой (7) позволяет записать

$$\begin{aligned} \Phi_m(\alpha) &= \frac{\pi}{36} \times \\ &\times [\sin \alpha (20 + \cos^2 \alpha) - 3\alpha \cos \alpha (7 + 2 \sin^2 \alpha)]. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. П. де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, Москва (1977).
2. А. А. Веденов, Е. Б. Левченко, УФН **141**, 3 (1983).
3. А. С. Сонин, УФН **153**, 273 (1987).
4. А. С. Василевская, Э. В. Генералова, А. С. Сонин, Успехи химии LVIII, 1575 (1989).
5. А. С. Сонин, Коллоид. журн. **60**, 149 (1998).
6. A. S. Sonin, J. Mater. Chem. **8**, 2557 (1998).
7. P. Davidson, C. Bourgaux, L. Schouffet et al., J. de Phys. II **5**, 1577 (1995).
8. J.-C. P. Gabriel and P. Davidson, Adv. Mater. **12**, 9 (2000).
9. А. В. Казначеев, А. Ю. Ковалевский, И. А. Ропова и др., Коллоид. журн. **62**, 606 (2000).
10. Э. В. Генералова, А. В. Казначеев, А. С. Сонин, Кристаллография **46**, 127 (2001).
11. E. Guyon, R. V. Meyer, and J. Salan, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **54**, 261 (1979).
12. S. Fraden, A. J. Hurd, R. V. Meyer et al., J. Phys. Colloq. **46**(3), C3-85 (1985).
13. H. Zocher and K. Jacobsohn, Koll. Beih. **28**, 167 (1929).
14. М. В. Курик, О. Д. Лаврентович, УФН **154**, 381 (1988).
15. W. Biltz, Ber. Deut. Chem. Ges. **37**, 109 (1904).
16. Г. Арфкен, *Математические методы в физике*, Атомиздат, Москва (1970).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. I, Наука, Москва (1976).
18. В. де Же, *Физические свойства жидкокристаллических веществ*, Мир, Москва (1982).
19. A. J. Hurd, S. Fraden, F. Lonberg et al., J. de Phys. **46**, 905 (1985).
20. J. Bernal and J. Fankuchen, Nature **139**, 923 (1937).
21. А. В. Казначеев, К. Праефске, А. С. Сонин и др., Коллоид. журн. **64**, 1 (2002).
22. Л. М. Блинов, Е. И. Кац, А. А. Сонин, УФН **152**, 449 (1987).