

# ЗАТУХАЮЩАЯ КВАЗИДВУМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ТОНКОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

*С. Д. Данилов, В. А. Довженко\*, Ф. В. Должанский, В. Г. Кочина*

*Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова  
Российской академии наук  
109017, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 ноября 2001 г.

Приведены результаты лабораторных измерений затухающей квазидвумерной турбулентности в тонком слое жидкости. Показано, что отношение энтропии к энергии убывает по степенному закону на некотором интервале затухания. Показатель в степенном законе зависит от числа Рейнольдса. Затухание энтропии оказывается аномально медленным, как предсказывается в ряде численных исследований. Показано, что в рассматриваемом квазидвумерном течении аномальное затухание происходит не вследствие интенсивного вихреобразования, как в численной затухающей турбулентности, а из-за ограниченности диапазона масштабов, на которых течения можно считать двумерными.

PACS: 47.27.-i, 47.27.Eq

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в турбулентном двумерном течении несжимаемой жидкости, возбуждаемом на малых масштабах, поток энергии по спектру направлен в сторону малых волновых чисел [1]. Для достижения стационарных режимов в такой системе необходима дополнительная диссипация на малых волновых числах, поскольку в противном случае масштаб спектрального максимума энергии и сама энергия нарастают. По этой причине значительное количество работ посвящено изучению затухания двумерных турбулентных течений, энергия которых в пределе больших чисел Рейнольдса остается практически постоянной (хотя масштаб максимума энергии возрастает).

Согласно предсказанию Бэтчелора [2], энтропия затухающего двумерного турбулентного течения (в пределе больших чисел Рейнольдса) убывает во времени как  $t^{-2}$ , а типичный размер вихрей нарастает линейно во времени. Многие численные эксперименты по изучению затухающей двумерной турбулентности [3–9] не подтвердили это предсказание и свидетельствуют, как правило, о существенно бо-

лее медленном затухании. Причина этого состоит в том, что затухание двумерной турбулентности обусловлено формированием вихрей [10], в которых сосредотачивается почти вся энтропия течения. Эти вихри оказываются устойчивыми к сдвигам, формируемым фоновым полем завихренности, и поэтому филаментация — основной процесс, через который энтропия течения переносится на малые масштабы, — оказывается подавленной. Исследователи сообщают о разных сценариях затухания, поэтому возникает вопрос, какой из них имеет место в реальных течениях.

Количество экспериментальных работ, посвященных изучению двумерной затухающей турбулентности, невелико. Известна серия экспериментов, выполненных с тонкими мыльными пленками, стекающими под действием силы тяжести [11–15]. В них турбулентные возмущения эволюционируют, затухая, вниз по потоку, поэтому изучение законов затухания затруднено. В работах [11, 12, 14, 15] флуктуации поля скорости измеряются в точке, а для вычисления пространственных спектров привлекается гипотеза Тейлора. В работах [16, 17] турбулентное течение возбуждается магнитогидродинамическим методом в тонком слое слабого электролита, помещенного в магнитное поле, которое создается двоякопериодическим набором магнитов. В этих экспе-

\*E-mail: fourvort@aport.ru

риментах, как и в экспериментах, описанных в [13], поле скорости измеряется сразу по всей площади течения при помощи цифровой обработки видеоизображений трассерных частиц, помещенных на поверхность жидкости. Наблюдаемое в экспериментах затухание энтропии происходит по аномально медленному степенному закону с показателем степени  $-0.47$ . В последней из упомянутых работ делается вывод о том, что затухание следует сценарию, предсказанному в [4]. Согласно этому сценарию, основывающемуся на результатах численных экспериментов, из-за образования вихрей в процессе затухания сохраняется не только энергия, но и экстремумы завихренности. Если количество вихрей убывает во времени как  $t^{-\xi}$ , то, согласно [4], энтропия убывает во времени по степенному закону с показателем  $-\xi/2$ . Для величины  $\xi$  найдено значение 0.72.

Затухание турбулентности связано с действием вязкости и, как следует из недавних работ [8, 9], чувствительно к механизму диссипации. По этим причинам соответствие между результатами [4], полученными в численных экспериментах с гипервязкостью, и работы [17], полученными в лабораторных экспериментах, представляется неожиданным. И дело не только в том, что гипервязкость не реализуема в лабораторном эксперименте. Более важен тот факт, что медленные горизонтальные движения жидкости в тонких слоях подвержены действию придонного трения, которое существенно превосходит обычную диссипацию для всех масштабов, которые можно считать двумерными.

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование законов затухания двумерной турбулентности, возбуждаемой магнитогидродинамически в тонком слое электролита, в широком диапазоне начальных чисел Рейнольдса. Мы показываем, что действительно существует степенной участок в законе затухания энтропии, однако, не для всех чисел Рейнольдса. Показатель в степенном законе зависит от того, каким образом компенсируется затухание энергии. Наш вывод заключается в следующем: затухание энтропии оказывается аномально медленным не вследствие интенсивного вихреобразования, как в численной затухающей турбулентности, а из-за ограниченности диапазона масштабов, на которых лабораторные течения можно считать двумерными. Для того чтобы показать это, мы проводим сопоставление экспериментальных результатов с результатами численного интегрирования квазидвумерного уравнения трансформации завихренности с учетом придонного трения.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И ВНЕШНИЕ ПАРАМЕТРЫ

### 2.1. Экспериментальная установка

Экспериментальная установка состоит из прямоугольной кюветы высотой 20 мм с тонким (1 мм) дном, помещенной на прямоугольную двоякопериодическую решетку, составленную из круглых (диаметр 14 мм) магнитов чередующейся полярности. Длина кюветы равна 660 мм. Вдоль нее расположены медные электроды на расстоянии 140 мм друг от друга толщиной по 10 мм каждый. В кювету заливался раствор медного купороса плотностью  $\rho = 1.070$  г/см<sup>3</sup>. Глубина слоя жидкости  $h$  варьировалась от 2 мм до 6 мм. Ток  $I$  между электродами изменялся от 0.1 А до 3 А. При пропускании электрического тока в присутствии пространственно периодического магнитного поля в жидкости образуется решетка вихрей с чередующимся направлением вращения. При  $I > I_{cr}$  эта стационарная вихревая структура теряет устойчивость и становится изменяющимся во времени и пространстве течением, которое не имеет начальной пространственной периодичности. Через некоторое время это течение можно считать установившимся или «квазистационарным» в том смысле, что среднее значение энергии, определяемое на разных временных интервалах, не зависит от величина интервала. По мере увеличения надкритичности это квазистационарное течение становится все более хаотическим. В некоторый начальный момент времени  $t = t_0$  ток выключается, и скорость течения начинает затухать.

Достижение «квазистационарной» стадии течения первоначально контролировалось визуально, а затем подтверждалось, либо уточнялось после обработки результатов эксперимента. В необходимых случаях эксперимент повторялся с увеличенным интервалом времени между включением и выключением тока. Критерием являлось наличие выраженного постоянного среднего значения энергии на достаточном интервале времени в графике зависимости энергии от времени. Сама эта зависимость, естественно, имеет пульсирующий характер.

### 2.2. Методика измерений

Поле скорости на поверхности жидкости измерялось с помощью корреляционной обработки последовательных видеоизображений трассерных частиц, помещенных на поверхность жидкости. В качестве трассера использовалась алюминиевая пудра. Рабочая область течения составляла  $187 \times 140$  мм. Кла-

стеры частиц алюминиевой пудры при соответствующем внешнем освещении и при наличии «черного» дна позволяют получить видеоизображения с хорошим контрастом. Видеоизображения переводились в цифровой формат на сетке  $720 \times 540$  пикселей. Первый из каждых двух последовательных кадров разбивался на элементарные квадраты со стороной 9 пикселей. Среднее смещение каждого элементарного квадрата при переходе к следующему кадру определялось по минимуму разности интенсивности при смещении квадратов друг относительно друга. Это позволяло восстановить поле скорости на регулярной сетке  $76 \times 57$  точек. Шаг между точками соответствует приблизительно 2.5 мм и на один магнит приходится приблизительно 6 интервалов сетки. Такого разрешения достаточно для формирования вихрей на начальной стадии течения, однако приводит к некоторым неточностям при вычислении производных поля скорости (в том числе, завихренности и дивергенции) на масштабах меньших масштаба накачки. По мере затухания течения характерные размеры областей с завихренностью одного знака растут и точность вычисления завихренности увеличивается. Однако с уменьшением амплитуды поля скорости течения увеличивается доля субпиксельных смещений, что может служить новым источником ошибок. Чтобы избежать этого, мы увеличивали интервал между кадрами, которые выбирались для обработки. Начальный временной интервал между парами обрабатываемых кадров составлял  $1/25$  с, и мы заканчивали обработку, когда интервал становился равным времени затухания энергии в  $e$  раз (в экспериментах с наибольшей толщиной слоя конечный интервал превышал 1 с). Это позволило существенно расширить динамический диапазон измерения поля скорости и энергии. Так, в большинстве случаев мы были в состоянии проследить уменьшение энергии течения более чем на три порядка величины.

Мы обнаружили, что дивергенция двумерного поля скорости отлична от нуля, однако ее среднеквадратичное значение редко превосходит  $1/6$  от среднеквадратичной завихренности на начальной стадии затухания и уменьшается относительно среднеквадратичной завихренности по мере затухания течения. Относительная амплитуда дивергенции оказалась хорошим индикатором точности восстановления поля скорости: увеличение доли субпиксельных смещений сказывается, в первую очередь, на росте этой величины. Относительная погрешность измерения поля скорости оценивается величиной 5%, относительная погрешность измерения завихренности и дивергенции по крайней мере в

два раза больше. Малость дивергенции позволяет приближенно считать двумерное течение несжимаемым.

Течения, возбуждаемые в тонких слоях, являются медленными (число Фруда мало) и квазидвумерными (поле скорости почти горизонтально). Поле завихренности на свободной поверхности такого течения приближенно описывается уравнением [18, 19]

$$\partial\zeta + [\psi, \zeta] = -\lambda\zeta + \nu\Delta\zeta, \quad (1)$$

где  $\psi$  — функция тока на поверхности течения,  $\zeta = \Delta\psi$  — завихренность,  $[\psi, \zeta]$  — якобиан  $\psi$  и  $\zeta$ ,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\lambda$  — коэффициент придонного трения. Слагаемое, содержащее коэффициент придонного трения, является результатом параметризации влияния дна и может быть обосновано тем, что локально течение жидкости должно быть близко к паузейлеву. В этом случае коэффициент придонного трения можно оценить как  $\lambda = 2\nu\kappa/h^2$ , где  $\kappa$  — подгоночный параметр порядка единицы. Этот параметр подлежит измерению [18, 19]. Для вынужденных течений его значение зависит от конфигурации магнитного поля по высоте. Для затухающих двумерных течений в режиме, когда вязкость доминирует и поле скорости двумерно (стоксово течение), коэффициент  $\lambda$  должен совпадать с декрементом первой стоксовой моды, что дает  $\kappa = \pi^2/8$  [16, 17, 20]. В реальности слабые вертикальные движения всегда присутствуют и параметр  $\kappa$  превосходит эту величину.

Течение в тонком слое характеризуется двумя числами Рейнольдса [21], отвечающими двум типам диссипации в правой части (1). Мы введем стандартное число Рейнольдса  $Re = UL/\nu$ , где  $U$  — характерная скорость и  $L$  — характерный размер. Мы принимаем  $U = E^{1/2}$  и  $L = (E/Z)^{1/2}$ , откуда  $Re = E/Z^{1/2}\nu$ . Здесь  $E$  и  $Z$  — энергия и энтрофия на единицу массы. Принятое определение размера соответствует длине волны, деленной на  $2\pi$ , поэтому в нашем случае начальный размер должен превосходить размер магнита, деленный на  $\pi\sqrt{2}$  (или 0.31 см). Так как максимальная достигаемая в данном эксперименте среднеквадратичная скорость составляет несколько см/с, максимальное начальное число Рейнольдса  $Re \approx 100$ . Число Рейнольдса, определяемое по размеру рабочей области, доходило до 3500, что больше, чем в экспериментах, описанных в работах [16, 17].

Второе число Рейнольдса соответствует придонному трению и может быть определено как  $Re_\lambda = U/L\lambda = Z^{1/2}/\lambda$  [18, 19]. Поскольку для квазидвумерных течений диссипация за счет придонного тре-

ния всегда больше, именно оно определяет истинную закритичность течения. Подробное обсуждение плодотворности применения числа Рейнольдса по придонному трению в различных реальных квазидвумерных течениях при не слишком больших закритичностях проводилось в [19]. В работах [22–24] уравнение (1) было успешно подвергнуто прямой экспериментальной проверке. Однако в течениях со сложным профилем возбуждающей силы [25, 26], в изменяющихся во времени течениях [27] и тем более в турбулентных течениях [28, 29] справедливость и особенности применения приближения придонного трения пока еще являются предметом исследований.

Так как известные теоретические результаты формулируются в терминах стандартного числа Рейнольдса, будем использовать его для описания экспериментальных течений, принимая во внимание, что внутреннее и внешнее числа Рейнольдса связаны соотношением

$$\text{Re} \propto \frac{E}{Zh^2} \text{Re}_\lambda.$$

### 3. ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИДОННОГО ТРЕНИЯ

Измерения проводились при глубинах  $h = 2, 3, 4, 5, 6$  мм и при значениях тока  $I = 100, 200, 300, 400, 500, 600$  мА. При малых глубинах обычные инструментальные методы обеспечения горизонтальности дна кюветы оказываются недостаточно точными, поэтому точная подгонка осуществлялась с помощью анализа характеристик течения на разных концах кюветы (по этой причине, в частности, измерения при глубине 1 мм не проводились). При использованных глубинах равномерность поля скорости во всей кювете обеспечивалась надежно. Все течения были закритическими.

Метод определения  $\lambda$  основывался на использовании уравнения баланса кинетической энергии

$$E = \int (\nabla\psi)^2 dx dy,$$

которое, согласно (1), для области, ограниченной жесткими границами, записывается в виде

$$\frac{dE}{dt} = -2\lambda E - 2\nu Z. \quad (2)$$

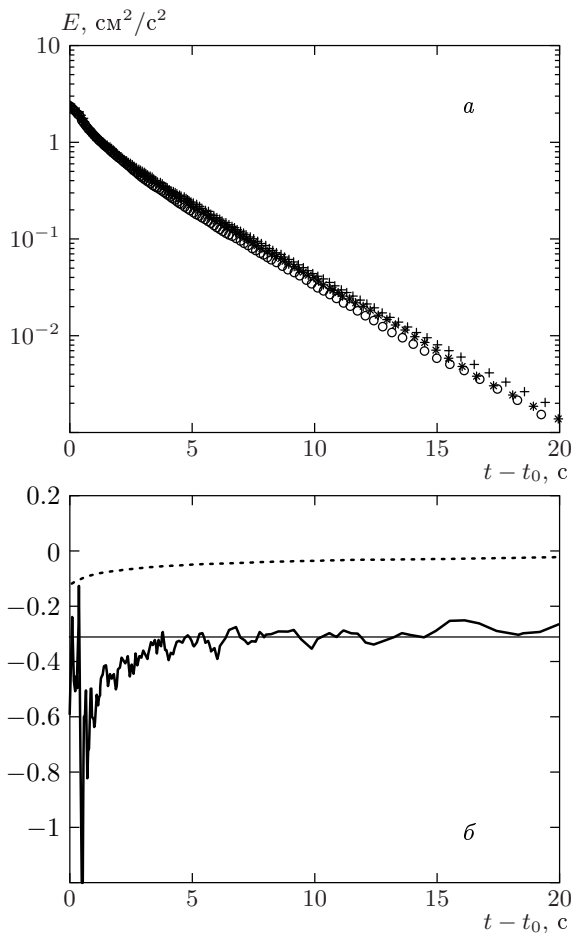
В нашем случае границы рабочей области являются открытыми, но потоки через них очень малы, что проверялось непосредственно.

Отсюда следует, что  $\lambda$  можно определить по логарифмической производной по времени от энергии

$$2\lambda = -\frac{d \ln E}{dt} - \frac{2\nu Z}{E}. \quad (3)$$

Второе слагаемое в правой части последнего уравнения вносит заметный вклад только при больших глубинах слоя жидкости. Для глубин  $h = 2, 3, 4, 5, 6$  мм мы получили средние значения  $\lambda$  соответственно 1.09, 0.49, 0.25, 0.165, 0.105 с<sup>-1</sup>. Это дает значение подгоночного коэффициента  $\kappa \approx 1.7 \pm 0.1$  в среднем по всем экспериментам, хотя следует отметить, что при уменьшении глубины подгоночный коэффициент уменьшается. Экспериментально найденное значение заметно отличается от теоретического значения  $\kappa = \pi^2/8$ , определяемого по декременту первой стоксовой моды (при строго горизонтальном движении). Это расхождение, по-видимому, объясняется влиянием неучтенных вертикальных движений. Хотя трехмерность движения жидкости все-таки проявляется, течение устроено таким образом, что при не слишком больших скоростях (текущих числах Рейнольдса) уравнение (1) оказывается справедливым, если для  $\kappa$  принять экспериментальное значение.

На рис. 1 представлены временные зависимости энергии для трех реализаций затухания (а) и отдельных компонент уравнения (3) для первой из этих реализаций (б) (течение возбуждалось током 1.5 А, начальное значение числа  $\text{Re} \approx 70$ , глубина слоя жидкости  $h = 5$  мм). По оси абсцисс отложено время от начала затухания. Приведенные на рис. 1а три реализации различаются мало и измерения по каждой из них приводят к близким значениям коэффициента придонного трения. Максимальная разница не превышает 4%. Это справедливо и для измерений, выполненных при других значениях начального числа Рейнольдса. Из рис. 1б видно, что после первоначального периода приспособления течение действительно выходит на режим, приближенно характеризующийся постоянным значением величины коэффициента придонного трения. Отклонения логарифмической производной энергии на начальном участке показывают, что полная динамика течения включает трехмерные эффекты. Приспособление связано с перестройкой вертикальной структуры течения. Это приводит к увеличенной диссипации и существенному уменьшению числа Рейнольдса.



**Рис. 1.** Затухание энергии в экспериментах с  $Re(0) \approx 70$  (ток 1.5 А, три реализации) и  $h = 5$  мм (а) и вклады в затухание энергии для реализации (о) (б):  $d(\ln E)/dt + 2\nu Z/E$  (ломаная линия),  $-2\lambda$  (прямая сплошная линия),  $-2\nu Z/E$  (пунктирная линия). Значения по оси ординат в (б) отложены в  $1/c$

#### 4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАТУХАЮЩЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Основная часть измерений при больших начальных числах Рейнольдса была выполнена для слоя жидкости  $h = 5$  мм. Ниже мы остановимся только на них. Измерения выполнялись для начального тока от 0.5 до 3 А с шагом 0.5 А.

Из-за влияния придонного трения энергия экспериментального течения убывает во времени. Уменьшение энтропии связано не только с влиянием придонного трения, но и с перестройкой структуры течения. Для выделения эффектов, связанных с перестройкой структуры течения, можно использовать два способа. Первый состоит в том, что изучается

убывание отношения  $Z/E$ . Второй основан на введении экспоненциально сжатого элемента времени

$$d\tau = \exp[-\lambda(t - t_0)] dt$$

или

$$\tau = \frac{1 - \exp[-\lambda(t - t_0)]}{\lambda},$$

и компенсированных полей

$$(\psi', \zeta') = (\psi, \zeta) \exp[\lambda(t - t_0)].$$

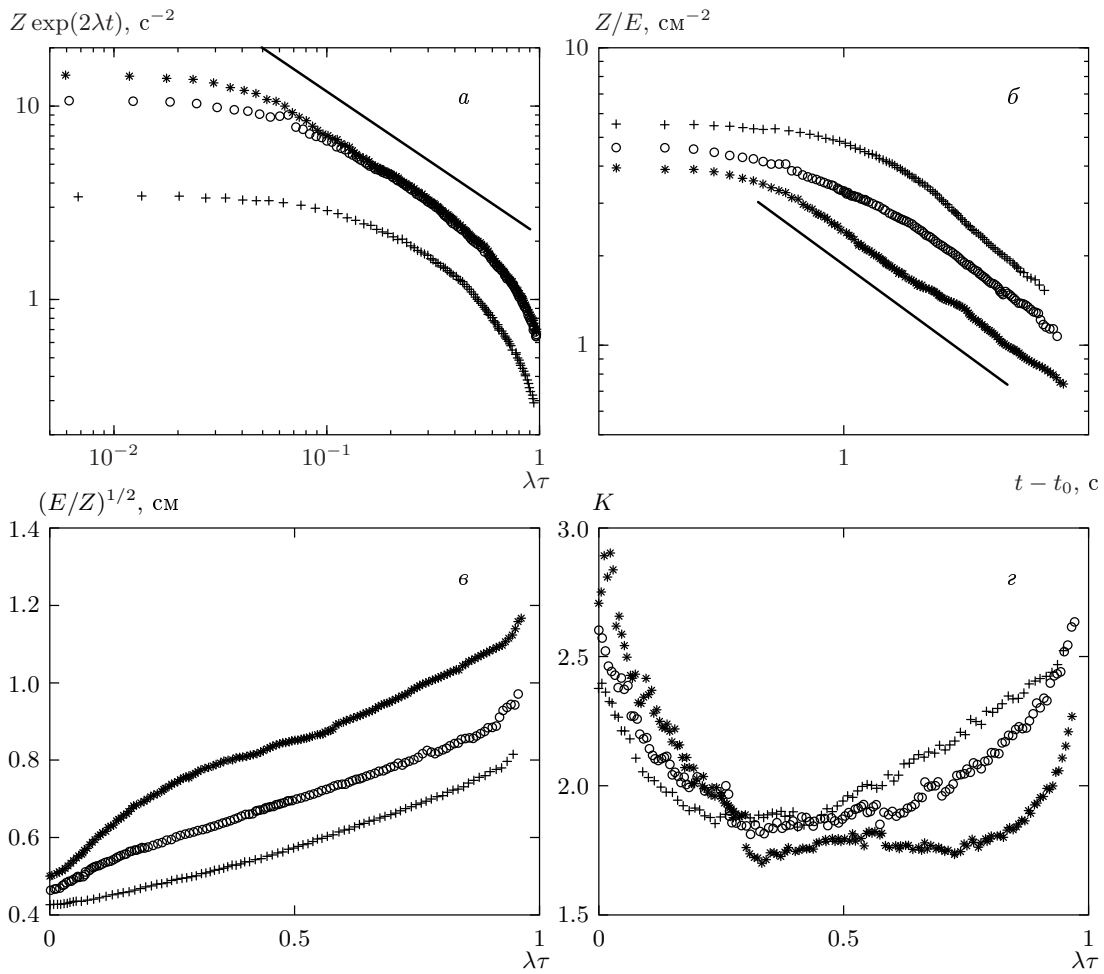
Здесь  $t_0$  — время начала затухания. В новых переменных слагаемое, ответственное за придонное трение, исчезает и уравнение завихренности записывается в виде

$$\partial_\tau \zeta' + [\psi', \zeta'] = \nu' \Delta \zeta'.$$

Это уравнение характеризуется растущим экспоненциально коэффициентом кинематической вязкости  $\nu' = \nu \exp[\lambda(t - t_0)]$ . В новых переменных затухание происходит за конечное «сжатое время». В работе [17] утверждается, что именно анализ в этих координатах приводит к согласию с теорией, приведенной в [4]. Асимптотически при больших временах компенсированная энтропия и отношение  $Z/E$  следуют одному и тому же закону по отношению к обычному времени.

На рис. 2 приведены результаты обработки экспериментов для трех значений начального тока — 0.5, 1.5, 3 А. На рис. 2а изображена компенсированная энтропия как функция сжатого времени. Мы видим, что по мере увеличения начального тока (начальная амплитуда поля скорости не увеличивается линейно с током, поскольку течение находится в сильно закритическом режиме) в законе затухания формируется степенной участок. Он полностью отсутствует при меньших значениях начального тока и всегда исчезает при достаточно большом времени. Прямая линия, проведенная на рисунке, соответствует наклону  $-0.75$ . Таким образом, говорить о наличии степенного закона в координатах компенсированная энтропия — сжатое время можно лишь с известной долей условности. Таким образом, не подтверждается вывод работы [17] (динамический диапазон затухания в наших экспериментах на порядок больше) о совпадении закона затухания с предсказаниями теории, приведенной в [4].

Из рис. 2б видно, что отношение  $Z/E$  как функция обычного времени следует степенному закону в большей степени. Однако и здесь затухание не характеризуется единой экспонентой для всех случаев. Прямая линия на этом рисунке имеет наклон  $-0.4$ .



**Рис. 2.** Компенсированная энтрофия  $Z' = Z \exp(2\lambda t)$  (а), отношение энтрофии к энергии (б), характерный размер  $l = (E/Z)^{1/2}$  (в) и эксцесс (г) как функции времени в реализациях затухания с различными начальными числами Рейнольдса. Значок + соответствует реализации, возбужденной током 0.5 А, о — 1.0 А, \* — 3.0 А; прямые линии имеют наклон  $-0.75$  (а),  $-0.4$  (б)

Столь заметное различие между двумя наклонами обусловлено двумя причинами. Во-первых, участок степенного поведения энтрофии начинается там, где энергия еще не вышла на асимптотический закон убывания (см. рис. 1б). Во-вторых, в первом случае экспоненциальное сжатие времени заведомо должно приводить к увеличению крутизны закона затухания.

Указанный закон затухания близок к найденному в [4], однако это не означает, что наши эксперименты подтверждают сформулированную в этой работе теорию. Действительно, экспериментальное поле завихренности во время затухания не следует сценариям, наблюдаемым при численных исследованиях. На рис. 3 и 4 показаны поле скорости и поле завихренности для течения, возбуждаемого

током 1.5 А в последний момент перед выключением тока, через 1 с после выключения и через время  $1/\lambda$  после выключения. Контуры на рис. 4 проведены по уровням  $\pm\zeta_{rms}$  и  $\pm 2\zeta_{rms}$ . Оба рисунка показывают, что по мере затухания происходит увеличение размера вихревых структур, однако затухание происходит без образования мелкомасштабных структур и филаментации поля завихренности. Распределение поля завихренности является гладким, и области, где завихренность по модулю превышает удвоенное среднеквадратичное значение, практически отсутствуют. Мы видим, что завихренность одного знака действительно объединяется в крупные области, однако структуры, подобные вихрям в численной двумерной турбулентности, не формируются. Границы областей по мере затухания становятся

ние слабо выражено при использовании сжатого времени. В работе [17] типичный размер определяется по структурам в поле завихренности. В ней утверждается, что этот размер следует степенному закону, совместному с законом убывания энтрофии в смысле [4]. Вследствие того что поле завихренности не содержит четко выделенных вихревых структур, всякое определение размера будет неточным, поэтому мы такой анализ не проводим.

На рис. 2*г* представлено поведение эксцесса (куртозиса) поля завихренности

$$K = \frac{S \int \xi^4 dx dy}{(\int \xi^2 dx dy)^2},$$

где  $S$  — площадь рабочей области.

Эксцесс во всех случаях ведет себя похожим образом и нигде не превышает гауссова значения 3 (этот же факт имеет место и в экспериментах [17]). Значение эксцесса составляет несколько десятков в типичных численных экспериментах по затуханию двумерной турбулентности, и большие значения эксцесса являются следствием присутствия в поле завихренности хорошо выраженных экстремумов, превышающих во много раз среднеквадратичные значения завихренности (см., например, [3]). Малые значения эксцесса в лабораторных экспериментах свидетельствуют об очень сильном подавлении динамики завихренности за счет диссипативных эффектов и о необходимости существенно больших начальных чисел Рейнольдса для достижения режимов, подобных численным.

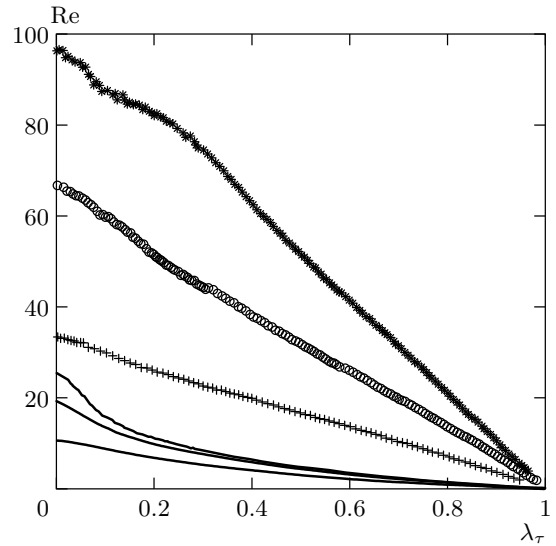
На рис. 5 приведены зависимости чисел Рейнольдса от времени в процессе затухания. Согласно результатам работы [9], если начальное число Рейнольдса превосходит критическое значение, приблизительно равное  $15.7/\sqrt{2}$ , затухание двумерного турбулентного течения должно сопровождаться увеличением текущего числа Рейнольдса из-за быстрого затухания энтрофии. В лабораторном эксперименте это не наблюдается вследствие дополнительного затухания, вносимого придонным трением, и затухания на начальной стадии, обусловленного трехмерными эффектами. Вместе это приводит к тому, что обычные числа Рейнольдса убывают, а числа Рейнольдса по придонному трению (сплошные линии на рис. 5) оказываются очень умеренными.

В условиях эксперимента адвекция поля завихренности не успевает привести к формированию тонких вытянутых вихревых структур, ответственных за диссипацию энтрофии в стандартной затухающей турбулентности. Соответственно, энтрофия за-

**Рис. 3.** Поле скорости в реализации, возбужденной током 1.5 А в момент выключения тока (*а*), через 1 с после выключения (*б*) и через  $1/\lambda \approx 6$  с после выключения (*в*). Длина векторов нормирована на максимальную в данный момент времени

изрезанными.

Средний размер вихревых структур, определяемый как  $l = (E/Z)^{1/2}$ , показан на рис. 2*в*. За полное время затухания он увеличивается приблизительно в два раза. В силу определения, средний размер демонстрирует степенное поведение в тех же случаях, что и отношение энтрофии к энергии. Такое поведе-



**Рис. 5.** Поведение чисел Рейнольдса в реализациях, возбужденных током 0.5 А (\*), 1.5 А (о), 3 А (+). Сплошные линии соответствуют  $Re_\lambda$  для представленных реализаций

**Рис. 4.** Распределение завихренности, соответствующее реализациям поля скорости, показанным на рис. 3. Черные участки соответствуют отрицательной завихренности, белые — положительной. Контуры проведены для уровней  $\pm\zeta_{rms}$  и  $\pm 2\zeta_{rms}$

тухает аномально медленно по отношению к теоретическим и численным предсказаниям. В работе [9] показано, что закон затухания Бэтчелора в двумерной турбулентности с обычной (не гипер) вязкостью должен реализовываться только для критического числа Рейнольдса, а при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности показатель в законе

затухания увеличивается до  $-0.8$ . Если формально следовать этому результату, то от изучаемой экспериментальной системы следовало бы ожидать более крутого закона затухания, что на практике не наблюдается.

Хотя поля скоростей в исследуемых течениях в основном можно считать двумерными (отношение дивергенции к ротору поля скорости на поверхности в среднем не превышает  $1/6$ ), трехмерными эффектами при анализе результатов эксперимента нельзя пренебрегать. На масштабах, меньших глубины жидкости, и при временах изменения, меньших  $1/\lambda$ , перестройка течения имеет трехмерный характер. Оказывается, что дополнительная диссипация, вносимая такой трехмерной адаптацией на начальной стадии затухания, приводит к тому, что в лабораторном эксперименте затухание энтрофии ведет себя аномальным образом. Чтобы показать это, мы выполнили численные эксперименты по изучению затухания течений, строго подчиняющихся уравнению (1), параметры которых соответствовали экспериментальным (начальный спектр и числа Рейнольдса).

### 5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Численные эксперименты выполнены псевдоспектральным методом. Интегрировалось уравнение завихренности с придонным трением (1). Размеры области интегрирования равны  $2\pi \times 2\pi$ ,



расчеты выполнены на сетке  $128 \times 128$  точек. Такого небольшого разрешения достаточно, поскольку начальные числа Рейнольдса сравнительно малы и при эволюции течения большую часть времени убывают. Начальная реализация поля завихренности выбиралась так, что пространственный спектр энергии течения был сосредоточен в окрестности моды  $(k) = (k_x, k_y) = (N, N)$ , где  $N = 5$ , что приблизительно соответствует экспериментальным условиям. Начальная амплитуда поля завихренности выбиралась так, чтобы начальная энергия была равна 1. Далее вычислялась начальная энтропия течения. Затем проводился выбор коэффициента кинематической вязкости из условия, что число Рейнольдса  $Re = E/Z^{1/2}\nu$  равно заданному значению. Значение коэффициента  $\lambda$  определяется глубиной слоя жидкости. Чтобы сохранить подобие с лабораторным экспериментом, мы выбрали

$$\lambda = \frac{2\nu\kappa}{h^2} = \frac{2\nu\kappa}{(\alpha d)^2},$$

где  $\alpha$  — отношение толщины слоя жидкости к диаметру магнита, определяющему начальный размер вихря. Это отношение для лабораторного эксперимента составляет 0.33. Роль начального размера вихрей в численном эксперименте выполняет величина  $\pi/N$ . Численные расчеты выполнены для нескольких значений числа Рейнольдса в интервале от 50 до 500. Интегрирование в каждом случае проводилось за время  $3/\lambda$ , в течение которого скорость движения в жидкости успевала существенно затухнуть.

Существенное отличие численного течения, подчиняющегося уравнению (1), от его экспериментального «образа» состоит в том, что для первого логарифмическая производная энергии в точности совпадает с комбинацией  $-2\lambda - 2\nu Z/E$ . Это приводит к заметному различию в динамике на начальной стадии затухания. Численное течение затухает существенно медленнее, и нелинейные взаимодействия на этой стадии играют существенно большую роль. Напомним, что в лабораторном течении идет трехмерная адаптация поля скорости, в силу которой истинная скорость диссипации энергии оказывается больше по абсолютному значению, чем  $-2\lambda - 2\nu Z/E$ .

По указанной причине на начальной стадии затухания в численном течении наблюдается значительно более сильная филаментация фоновой завихренности, с одной стороны, и концентрация завихренности в окрестности локальных экстремумов в вихри, с другой стороны. Последнее проявляется в некотором росте эксцесса в случае с меньшим числом Рейнольдса и в значительном его росте в случае наи-

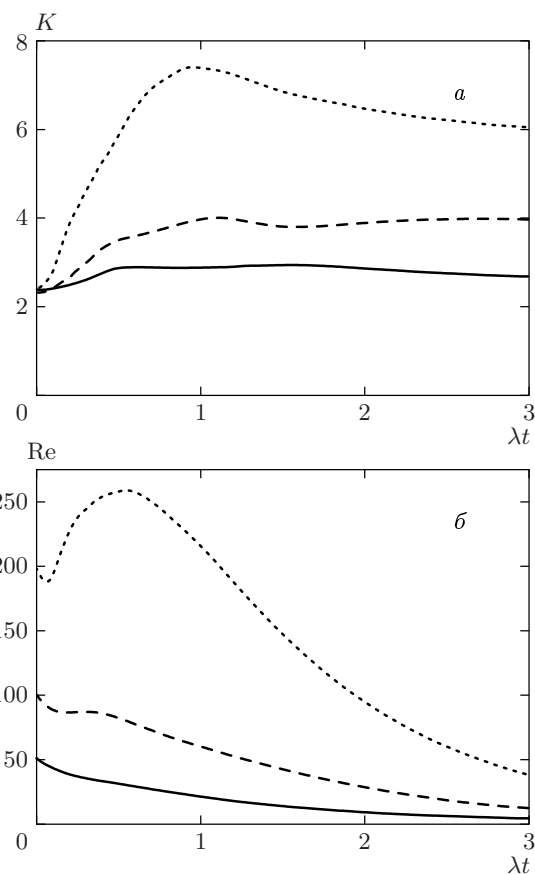


Рис. 6. Эксцесс поля завихренности (а) и числа Рейнольдса (б) в реализациях численного счета с начальным числом Рейнольдса 50 (сплошная линия), 100 (штриховая линия) и 200 (пунктирная линия) как функции времени

большего числа Рейнольдса (см. рис. 6а). На рис. 6б мы представляем числа Рейнольдса для соответствующих реализаций как функции времени. В эксперименте с начальным числом Рейнольдса  $Re = 50$  все время наблюдается его затухание, как и в лабораторных экспериментах. В случае с числом Рейнольдса  $Re = 100$  на участке времени  $\lambda t < 0.5$  наблюдается тенденция к формированию плато. Наконец, в случае с начальным числом Рейнольдса, равным 200, при  $\lambda t < 0.5$  мгновенное число Рейнольдса растет. Указанные временные интервалы, как следует из сравнения с рис. 6а, совпадают с интервалами, в течение которых происходит рост эксцесса. Только на этих участках поведение затухающей турбулентности в течении с придонным трением напоминает типичное поведение численной затухающей турбулентности без придонного трения. На последующих стадиях динамика течения определяется в основном

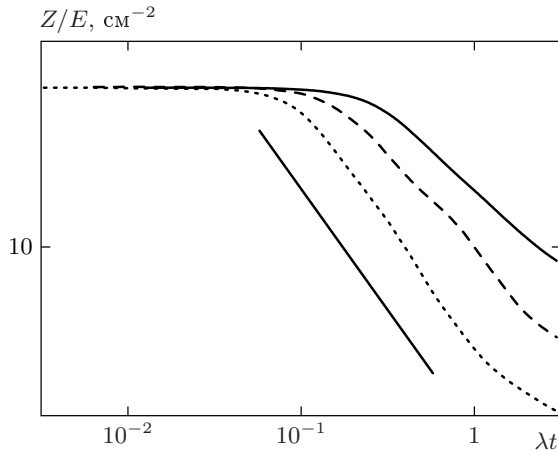


Рис. 7. Отношение энтропии к энергии как функция времени затухания для тех же случаев, что на рис. 6. Сплошная линия имеет наклон 1

затуханием и нелинейные процессы играют малую роль.

На рис. 7 представлено отношение энтропии к энергии как функция безразмерного времени  $\lambda t$ . Указанные зависимости содержат степенные участки, однако наклон их увеличивается при увеличении числа Рейнольдса (для  $Re_\lambda(0) = 200$  наклон составляет приблизительно 1.0). Это изменение наклона означает, что диссипация энтропии в случае меньших чисел Рейнольдса подавлена. Причина этого состоит в том, что перемешивание и филаментация поля завихренности при таких числах Рейнольдса еще не успевают произойти. Таким образом, начальные числа Рейнольдса должны быть больше 200, чтобы на каком-то начальном участке затухания наблюдалась картина, известная из численных экспериментов без придонного трения. Последнее еще в большей степени относится к лабораторным экспериментам, в которых на начальной стадии наблюдается дополнительное затухание энергии.

Мы измеряли также поведение во времени среднего количества вихрей и их среднего размера. Мы называли вихрем ту часть поля завихренности, где она превосходит по амплитуде удвоенное среднеквадратичное значение. При затухании указанные характеристики приближенно следуют степенным законам, но экспоненты являются функциями числа Рейнольдса. Так, экспонента в законе затухания количества вихрей меняется от  $-0.5$  до  $-0.9$ , но сравнивать эти законы с предсказаниями теории [4] вряд ли уместно в силу разного поведения эксцесса.

Таким образом, затухание «численной» турбу-

лентности, подчиняющейся уравнению завихренности с придонным трением, и затухание лабораторной турбулентности происходят по-разному, и при исследованных числах Рейнольдса еще достаточно далеки от картины, представленной в [4].

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Затухающая квазидвумерная турбулентность в лабораторном течении демонстрирует некоторые элементы, ожидаемые от затухающей двумерной турбулентности в теории. К ним относятся увеличение размера областей завихренности, степенное затухание энтропии. Вместе с тем придонное трение вносит свою специфику, и истинная динамика сильно отличается от теоретических предсказаний вопреки утверждениям работы [17]. Помимо этого, как следует из наших численных экспериментов, затухающая турбулентность в тонких слоях отличается от лабораторного квазидвумерного течения. Причина этого состоит в том, что рэлеевское трение при больших закритичностях — всего лишь удобная параметризация влияния дна. Истинная динамика в лабораторном течении сопряжена с трехмерными движениями и трехмерной адаптацией, что приводит к дополнительному затуханию.

Придонное трение является неотъемлемым компонентом практически всех квазидвумерных систем как в природе, так и в лаборатории (даже для мыльных пленок оно присутствует за счет трения о воздух [12]). Как показано в [19], для всех масштабов, на которых движения можно считать двумерными, придонное трение превалирует над обычным трением. На меньших масштабах трехмерные движения, обязанные своим присутствием наличию дна, также не могут контролироваться только обычной кинематической вязкостью. Влияние трения о дно для них также очень существенно. По этой причине экспериментальные квазидвумерные системы далеко не всегда должны следовать теории, не принимающей во внимание истинную диссипацию. Задача состоит в построении адекватной эксперименту теории, основанной на влиянии основного фактора, сводящего систему к двумерному случаю, а не должна ограничиваться только попытками примирить поведение определяемых в основном придонным трением течений с двумерной гидродинамикой (см., например, [16, 17, 30]).

Авторы благодарят О. И. Карпилову за помощь в проведении эксперимента и при подготовке статьи к печати.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 99-05-64350, 99-05-64351) и Федеральной программы «Исследование турбулентности и структурообразования в слоистых нелинейно-волновых системах».

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 1417 (1967).
2. G. K. Batchelor, Phys. Fluids Suppl. **12**, 233 (1969).
3. J. C. McWilliams, J. Fluid Mech. **146**, 21 (1984).
4. G. F. Carnevale, J. C. McWilliams, Y. Pomeau, J. B. Weiss et al., Phys. Rev. Lett. **66**, 2735 (1991).
5. J. B. Weiss and J. C. McWilliams, Phys. Fluids A **5**, 608 (1993).
6. R. Benzi, S. Partanello, and P. Santangelo, J. Phys. A **21**, 1221 (1988).
7. R. Benzi, M. Colella, M. Briscolini, and P. Santangelo, Phys. Fluids A **4**, 1036 (1992).
8. P. Bartello and T. Warn, J. Fluid Mech. **326**, 357 (1996).
9. J. R. Chasnov, Phys. Fluids **9**, 171 (1997).
10. J. C. McWilliams, J. Fluid Mech. **219**, 361 (1990).
11. H. Kellay, X. L. Wu, and W. I. Goldburg, Phys. Rev. Lett. **74**, 3975 (1995).
12. B. K. Martin, X. L. Wu, W. I. Goldburg, and M. A. Rutgers, Phys. Rev. Lett. **80**, 3964 (1998).
13. M. Rivera, P. Vorobieff, and R. E. Recke, Phys. Rev. Lett. **81**, 1417 (1998).
14. A. Belmonte, W. I. Goldburg, H. Kellay, M. A. Rutgers et al., Phys. Fluids **11**, 1196 (1999).
15. H. Kellay, C. H. Bruneau, and X. L. Wu, Phys. Rev. Lett. **84**, 1696 (2000).
16. O. Cardoso, D. Marteau, and P. Tabeling, Phys. Rev. E **49**, 454 (1994).
17. A. E. Hansen, D. Marteau, and P. Tabeling, Phys. Rev. E **58**, 7261 (1998).
18. Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов, *Системы гидродинамического типа и их применение*, Наука, Москва (1981), с. 368.
19. Ф. В. Должанский, В. А. Крымов, Д. Ю. Манин, УФН **160**, 1 (1990).
20. B. Jüttner, D. Marteau, P. Tabeling, and A. Thess, Phys. Rev. E **55**, 5479 (1997).
21. Ф. В. Должанский, Физика атмосф. и океана **23**, 348 (1987).
22. F. V. Dolzhanskii, V. A. Krymov, and D. Yu. Manin, J. Fluid Mech. **241**, 705 (1992).
23. F. V. Dolzhanskii, V. A. Krymov, and D. Yu. Manin, Russian J. Comp. Mech. **1**, 107 (1993).
24. В. А. Крымов, Д. Ю. Манин, Физика атмосф. и океана **28**, 129 (1992).
25. С. Д. Данилов, В. А. Довженко, Физика атмосф. и океана **31**, 621 (1995).
26. С. Д. Данилов, В. Г. Кочина, Физика атмосф. и океана **33**, 845 (1997).
27. S. D. Danilov, F. V. Dolzhanskii, V. A. Dovzhenko, and V. A. Krymov, Chaos **6**, 297 (1996).
28. С. Д. Данилов, Ф. В. Должанский, Физика атмосф. и океана **36**, 35 (2000).
29. С. Д. Данилов, В. А. Довженко, В. А. Крымов, Физика атмосф. и океана **36**, 284 (2000).
30. D. Marteau, O. Cardoso, and P. Tabeling, Phys. Rev. E **51**, 5124 (1995).