

МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА РЕШЕТКЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

*А. И. Бугрий**, *О. О. Лисовой*

*Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Национальной академии наук Украины
03143, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 13 декабря 2001 г.

Дано обобщение формфакторного представления корреляционной функции двумерной модели Изинга на цилиндре на случай произвольного расположения коррелирующих спинов. Вычислена магнитная восприимчивость на решетке с одним конечным размером N как в ферро-, так и в парамагнитной областях параметров модели. Обсуждается структура сингулярностей восприимчивости в комплексной плоскости температуры при конечных N и переход к термодинамическому пределу $N \rightarrow \infty$.

PACS: 05.50.+q, 11.10.-z

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Изинга уже многие годы привлекает к себе внимание исследователей. Вычисление свободной энергии [1], спонтанной намагниченности [2], представление корреляционных функций в виде рядов [3, 4], а также вывод и решение нелинейных дифференциальных уравнений [5, 6] для корреляционных функций являются важнейшими достижениями современной математической физики. Задача о вычислении статистической суммы в двумерной модели Изинга с взаимодействием ближайших соседей в отсутствие внешнего поля решается точно [7] не только в термодинамическом пределе, но и на решетке с конечными размерами при учете различных граничных условий. Соответствующие выражения имеют красивый и достаточно простой вид, что дает возможность детально изучить особенности перехода к термодинамическому пределу, получить представление о механизме возникновения критических сингулярностей в термодинамических величинах как с физической, так и с математической точек зрения.

Аналитические выражения для термодинамических величин, содержащие зависимость от размеров решетки, полезны и с прикладной точки зрения. Они могут давать ориентиры в задачах компьютерного моделирования термодинамических и кванто-

волевых систем для количественной оценки числа степеней свободы, при котором дискретную численную модель можно воспринимать как адекватную исходной непрерывной и бесконечной системе. Полезны подобные результаты и в качестве отправной точки для теоретического анализа проблем в современных экспериментах и технологиях, где теперь уже имеют дело с явно не бесконечным числом частиц.

В данной работе представлены точные выражения парной корреляционной функции и восприимчивости в модели Изинга на решетке с одним конечным, $N = \text{const}$, а другим бесконечным, $M \rightarrow \infty$, размером в виде, аналогичном формфакторному разложению [8, 9]. Мы исследуем структуру сингулярностей восприимчивости при конечных N и обсудим переход к термодинамическому пределу $N \rightarrow \infty$.

2. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ $\langle \sigma(0, 0) \sigma(x, 0) \rangle$

Модель Изинга на прямоугольной решетке с размерами $M \times N$ (см. рис. 1) определяется гамильтонианом $H[\sigma]$

$$H[\sigma] = -J \sum_{\mathbf{r}} \sigma(\mathbf{r}) (\nabla_x + \nabla_y) \sigma(\mathbf{r}),$$

где двумерный вектор $\mathbf{r} = (x, y)$ нумерует узлы решетки: $x = 1, 2, \dots, M$, $y = 1, 2, \dots, N$; изинговский

*E-mail: abugrij@bitp.kiev.ua

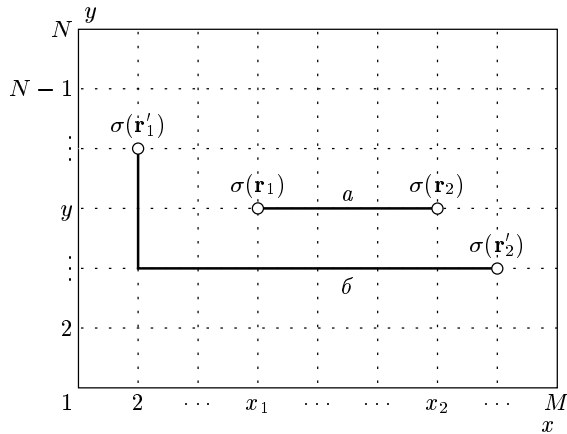


Рис. 1. Нумерация узлов решетки и варианты расположения коррелирующих спинов: a — спины размещены на линии, параллельной оси цилиндра, b — произвольное расположение спинов на решетке

спин $\sigma(\mathbf{r})$ в каждом узле принимает значения ± 1 ; параметром $J > 0$ определяется энергия связи пары соседних спинов. Операторы сдвига ∇_x, ∇_y действуют следующим образом:

$$\nabla_x \sigma(x, y) = \sigma(x + 1, y), \quad \nabla_y \sigma(x, y) = \sigma(x, y + 1).$$

Статистическая сумма при заданной температуре β^{-1}

$$Z = \sum_{[\sigma]} e^{-\beta H[\sigma]} \quad (2.1)$$

и парная корреляционная функция

$$\langle \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \rangle = Z^{-1} \sum_{[\sigma]} e^{-\beta H[\sigma]} \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \quad (2.2)$$

даются суммами по всем возможным конфигурациям спинов. Безразмерные параметры, с которыми будем иметь дело, следующие

$$K = \beta J, \quad t = \text{th } K, \quad s = \text{sh } 2K. \quad (2.3)$$

Будем рассматривать изинговскую решетку с периодическими граничными условиями вдоль обеих осей. Для операторов сдвига эти условия приводят к равенствам

$$(\nabla_x)^M = 1, \quad (\nabla_y)^N = 1.$$

При таких граничных условиях статистическую сумму (2.1) можно представить в виде суммы четырех слагаемых [7]:

$$Z = (2 \text{ch}^2 K)^{MN} \frac{1}{2} (Q^{f,f} + Q^{f,b} + Q^{b,f} - Q^{b,b}), \quad (2.4)$$

каждое из которых является пфаффианом оператора \hat{D} (решеточный аналог оператора Дирака)

$$Q = \text{Pf } \hat{D}, \quad (2.5)$$

где

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+t\nabla_x & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1+t\nabla_y \\ -1-t\nabla_{-x} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1-t\nabla_{-y} & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Верхние индексы (f, b) у величин Q в (2.4) указывают на тип граничных условий соответственно для операторов (∇_x, ∇_y) , которые входят в матрицу (2.6):

$$(\nabla_x^b)^M = (\nabla_y^b)^N = 1, \quad (\nabla_x^f)^M = (\nabla_y^f)^N = -1. \quad (2.7)$$

Если один из размеров решетки значительно превышает другой, например, $M \gg N$, т. е. тор вырождается в цилиндр, тогда в правой части (2.4) выживает только «антипериодический» вклад¹⁾

$$Z = (2 \text{ch}^2 K)^{MN} Q^{f,f}. \quad (2.8)$$

Оператор \hat{D} является трансляционно-инвариантным, диагонализуется фурье-преобразованием, и пфаффиан (2.5) легко вычисляется. В результате для статистической суммы (2.8) получается следующее факторизованное представление:

$$Z = 2^{MN} \prod_{\mathbf{q}}^{f,f} (s^2 + 1 - s \cos q_x - s \cos q_y)^{1/2}. \quad (2.9)$$

Верхний индекс f у знака операций произведения (или суммирования в дальнейшем) указывает на то, что компоненты квазиимпульса q_x и q_y пробегают в зоне Бриллюэна полуцелые значения соответственно в единицах $2\pi/M$ и $2\pi/N$, а индекс b — целые значения. Например,

$$\prod_{q_y}^f \mathcal{F}(q_y) = \prod_{l=1}^N \mathcal{F}\left(\frac{2\pi}{N} \left(l + \frac{1}{2}\right)\right),$$

¹⁾ Под этим подразумевается, что $Z = (2 \text{ch}^2 K)^{MN} \times Q^{f,f} (1 + \epsilon(M, N, s))$, причем функция $\epsilon(M, N, s)$ имеет при $s > 0, N \geq 1$ хорошо определенный предел $\lim_{M \rightarrow \infty} \epsilon(M, N, s) = 0$. Очевидно, что $\epsilon(M, N, 0) = 0$, поскольку все пфаффианы в (2.4) $Q^{\alpha,\beta} = 1$. В качестве иллюстрации приведем также асимптотическое выражение $\epsilon(M, N, 1)$ при $M \gg N \gg 1$: $\epsilon(M, N, 1) \approx \exp[-(\pi M)/(4N)]$.

$$\prod_{q_y}^b \mathcal{F}(q_y) = \prod_{l=1}^N \mathcal{F}\left(\frac{2\pi l}{N}\right).$$

Произведение в правой части (2.9) по одной из компонент импульса может быть выполнено в явном виде, и статистическая сумма приобретает следующий вид:

$$Z = (2s)^{MN/2} \prod_q^f e^{M\gamma(q)/2} (1 + e^{-M\gamma(q)}), \quad (2.10)$$

где функция $\gamma(q)$ определяется положительным корнем уравнения

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(q)}{2} = \operatorname{sh}^2 \frac{\mu}{2} + \sin^2 \frac{q}{2}, \quad (2.11)$$

$$\operatorname{sh} \frac{\mu}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{s} - 1/\sqrt{s}). \quad (2.12)$$

Если $q \neq 0$, то $\gamma(q)$ остается положительной во всей допустимой области изменения параметра $0 < s < \infty$. Но $\gamma(0)$ как функция s меняет знак при переходе через критическую точку $s = 1$. Поскольку произведение в (2.10) выполняется по фермионному спектру, где точка $q = 0$ исключена, то проблемы, связанные со знакопеременностью $\gamma(0)$, не возникают. Однако, забегая немного вперед, отметим, что неоднозначность в определении $\gamma(0) = \pm\mu$ приводит к двум различным представлениям для корреляционной функции.

Сумма по спиновым конфигурациям в правой части выражения (2.2) для корреляционной функции тоже может быть представлена в виде комбинации пфаффианов от некоторых операторов [10]. Но соответствующие матрицы не являются трансляционно-инвариантными, что радикально усложняет расчеты по сравнению с вычислением статистической суммы. Тем не менее отношение пфаффианов, через которое выражается в конечном счете корреляционная функция, может быть сведено к детерминанту от матрицы значительно меньшей размерности

$$\langle \sigma(0)\sigma(\mathbf{r}) \rangle = \det A^{(\dim)}, \quad (2.13)$$

где размерность $\dim = \dim(\mathbf{r})$ определяется расстоянием между коррелирующими спинами. Далее работа (и отнюдь не простая) заключается в вычислении определителя, а точнее, в том, чтобы преобразовать представление (2.13) к такому, в котором зависимость от расстояния содержалась бы в аналитическом виде. Статьи на эту тему появляются в печати до сих пор, хотя прошло уже сорок лет после пионерской работы [3], что говорит о сложности задачи.

Наиболее приемлемым с физической точки зрения является, на наш взгляд, так называемое формфакторное представление для корреляционной функции модели Изинга, которое было получено впервые [8] для бесконечной решетки в ферромагнитной области ($K > K_c$, $s > 1$) и позже обобщено [9] на парамагнитный случай ($K < K_c$, $s < 1$). Отметим, что несколько раньше подобное представление для двухточечной функции Грина было выведено [11] в рамках S -матричного подхода [12] для квантовополевой модели с факторизуемой S -матрицей ($S_2 = -1$), которую принято ассоциировать со скейлинговым пределом модели Изинга. Открытие формфакторного представления послужило толчком к развитию целого направления [13] в точно интегрируемых моделях квантовой теории поля.

Разумеется, для конечной решетки задача выглядит гораздо сложнее, однако ответ [14] в определенном смысле оказывается даже проще. В частном случае, когда спины расположены вдоль какой-либо из главных осей решетки, матрица в правой части (2.13) принимает теплицевский вид и задача упрощается. Пусть узлы, в которых находятся коррелирующие спины, расположены на линии, параллельной горизонтальной оси, как показано на рис. 1, линия a . Тогда

$$\langle \sigma(\mathbf{r}_1)\sigma(\mathbf{r}_2) \rangle = \det A^{(|x|)}, \quad \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x, 0), \quad (2.14)$$

где матрица $A_{k,k'}^{(|x|)}$ размерности $|x| \times |x|$ имеет вид [14]

$$A_{k,k'}^{(|x|)} = \frac{1}{MN} \sum_{f,f} e^{ip_x(k-k')} \frac{[2t(1+t^2) - (1-t^2)(e^{ip_x} + t^2e^{-ip_x})]}{(1+t^2)^2 - 2t(1-t^2)(\cos p_x + \cos p_y)}, \quad k, k' = 0, 1, \dots, |x| - 1, \quad (2.15)$$

а ее элементы на диагоналях, параллельных главной ($k - k' = \text{const}$), одинаковы.

Как показано в [14], с помощью техники интегральных уравнений Винера-Хопфа [7], должным

образом адаптированной к случаю решетки конечного размера, теплицевский определитель (2.14) может быть вычислен аналитически, и корреляционные функции представляются в следующем виде:

$$\langle \sigma(\mathbf{r}_1)\sigma(\mathbf{r}_2) \rangle = (\xi\xi_T)e^{-|x|/\Lambda} \sum_{l=0}^{[N/2]} g_{2l}(x) \quad (2.16)$$

при $\gamma(0) = \mu$,

$$\langle \sigma(\mathbf{r}_1)\sigma(\mathbf{r}_2) \rangle = (\xi\xi_T)e^{-|x|/\Lambda} \sum_{l=0}^{[(N-1)/2]} g_{2l+1}(x) \quad (2.17)$$

при $\gamma(0) = -\mu$,

$$g_n(x) = \frac{e^{-n/\Lambda}}{n!N^n} \sum_{[q]}^b \left(\prod_{i=1}^n \frac{e^{-|x|\gamma_i - \eta_i}}{\text{sh } \gamma_i} \right) F_n^2[q], \quad (2.18)$$

$g_0 = 1$,

$$F_n[q] = \prod_{i < j}^n \frac{\sin((q_i - q_j)/2)}{\text{sh}((\gamma_i + \gamma_j)/2)}, \quad F_1 = 1, \quad (2.19)$$

где $\gamma_i = \gamma(q_i)$, $\eta_i = \eta(q_i)$. Выражения (2.16), (2.17) являются суммами конечного числа вкладов g_n , однако верхние пределы суммирования формально можно распространить до бесконечности, поскольку формфакторы $F_n[q]$, как это видно из определения (2.19), обращаются в нуль при $n > N$. Отметим важную деталь: суммирование по фазовому объему в (2.18) ведется по бозонному спектру квазиимпульсов, в отличие от исходного фермионного спектра, которым определяется, в частности, и матрица (2.15). Остальные величины, входящие в (2.16)–(2.19), даются следующими выражениями:

$$\xi = |1 - s^{-4}|^{1/4}, \quad (2.20)$$

$$\ln \xi_T = \frac{N^2}{2\pi^2} \int_0^\pi \frac{dp dq \gamma'(p)\gamma'(q)}{\text{sh}(N\gamma(p))\text{sh}(N\gamma(q))} \times \ln \left| \frac{\sin((p+q)/2)}{\sin((p-q)/2)} \right|, \quad (2.21)$$

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dp \ln \text{cth} \left(\frac{N\gamma(p)}{2} \right), \quad (2.22)$$

$$\eta(q) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dp(\cos p - e^{-\gamma(q)})}{\text{ch } \gamma(q) - \cos p} \times \ln \text{cth} \left(\frac{N\gamma(p)}{2} \right). \quad (2.23)$$

Как видно из (2.21)–(2.23), величины ξ_T , Λ^{-1} , $\eta(q)$, которые мы будем называть «цилиндрическими параметрами», явным образом зависят от числа узлов N на окружности цилиндра. Их асимптотическое поведение при больших N , а точнее, при $N|\mu| \gg 1$, следующее:

$$\ln \xi_T \approx \frac{1}{\pi} e^{-2N|\mu|}, \quad (2.24)$$

$$\Lambda^{-1} \approx e^{-N|\mu|} \sqrt{\frac{2 \text{sh } |\mu|}{\pi N}}, \quad (2.25)$$

$$\eta(q) \approx \frac{4e^{-N|\mu|}}{(e^{\gamma(q)} - 1)} \sqrt{\frac{\text{sh } |\mu|}{2\pi N}}. \quad (2.26)$$

Вне критической точки с увеличением размера N цилиндрические параметры Λ^{-1} , $\ln \xi_T$ и $\eta(q)$ экспоненциально быстро убывают и на бесконечной решетке обращаются в нуль. Конечные суммы (2.16), (2.17) превращаются в ряды, суммирование по фазовому объему в (2.18) заменяется на интегрирование, и в результате формфакторные представления на цилиндре переходят в формфакторные представления на бесконечной решетке [8, 9]. При любых конечных N оба разложения — по четным n (2.16) и по нечетным n (2.17) — справедливы как в ферромагнитной области ($s > 1$), так и в парамагнитной ($s < 1$). Однако при $N \rightarrow \infty$ ряд по четным n является хорошо определенным и сходящимся в ферромагнитной области, а ряд по нечетным n — в парамагнитной области. Напомним, что исходной величиной являлся определитель (2.14) матрицы с размерностью $|x| \times |x|$, число слагаемых в формальном определении которого очень быстро возрастает с увеличением размерности. Однако формфакторные представления (2.16)–(2.19) являются конечной суммой членов при фиксированном N , причем число этих членов одинаково при произвольном значении $|x|$. Это дает уникальную возможность проверить выражения (2.16)–(2.19), сравнивая их с результатами, например, расчетов с помощью трансфер-матрицы для N -рядных изинговских цепочек, чем мы и воспользовались. При заданном N размерность трансфер-матрицы для N -рядной цепочки изинговских спинов равна $2^N \times 2^N$. Поэтому для небольших значений N можно в аналитическом виде решить соответствующую систему уравнений и получить все собственные значения и собственные векторы. Нам удалось провести подобные проверки аналитически для $N = 2, 3, 4$ и численно — для $N = 5, 6$. Результат, разумеется, положительный.

3. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ $\langle \sigma(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \sigma(x, y) \rangle$

Напомним, что строгий вывод формфакторного представления на цилиндре был дан в [14] только для частного случая, когда коррелирующие спины расположены вдоль оси цилиндра. Обобщить метод на случай, когда коррелирующие спины расположены на окружности цилиндра и тем более для произвольной их конфигурации (рис. 1, линия δ), нам пока не удалось. Между тем, для того чтобы получить импульсное представление для корреляционной функции

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \langle \sigma(\mathbf{0}) \sigma(\mathbf{r}) \rangle, \quad (3.1)$$

или магнитную восприимчивость, связанную со значением $\tilde{G}(\mathbf{p} = 0)$, необходимо иметь явную зависимость корреляционной функции от обеих компонент радиуса-вектора \mathbf{r} . Обсуждаемое формфакторное представление (2.16)–(2.19) имеет очень прозрачную с физической точки зрения структуру. Это позволяет выдвигать разумные предположения относительно соответствующих обобщений, а отмеченная выше возможность независимой проверки позволяет исключить неверные гипотезы и сделать правильный выбор. В принципе, при ненулевом значении y -компоненты вектора \mathbf{r} модификации могут подвергнуться все величины, входящие в (2.16)–(2.19). Но изменение, которое определено напрашивается, например, из соответствующих выражений для корреляционной функции в системе свободных бозонов или фермионов на решетке, — это, в первую очередь, замена

$$e^{-|x|\gamma(q)} \rightarrow e^{-|x|\gamma(q) - iyq}.$$

Удивительно, что этого оказывается и достаточно. Если вместо $g_n(x)$ (2.18) использовать выражение

$$g_n(\mathbf{r}) = \frac{e^{-n/\Lambda}}{n! N^n} \times \sum_{[q]}^b \prod_{j=1}^n \left(\frac{e^{-|x|\gamma_j - iyq_j - \eta_j}}{\text{sh } \gamma_j} \right) F_n^2[q], \quad g_0 = 1, \quad (3.2)$$

то корреляционные функции (2.16) и (2.17) точно (в аналитическом виде) совпадают с расчетами с помощью трансфер-матрицы для $N = 2, 3, 4$ во всей области параметров x, y, K . Путем численных расчетов это подтверждается и для больших значений $N = 5, 6$. Для $N > 6$ размерность трансфер-матрицы слишком велика и для численных компьютерных расчетов. Мы не сомневаемся, что обобщение (3.2) является верным. Можно надеяться, что

знание правильного ответа облегчит и задачу его строгого вывода.

Проиллюстрируем сказанное на примере $N = 3$. Разложения (2.16), (2.17) с учетом (3.2) по своей структуре весьма похожи на представление корреляционной функции в виде разложения по степеням собственных значений трансфер-матрицы:

$$\langle \sigma(\mathbf{0}) \sigma(\mathbf{r}) \rangle = a_1(y) (\lambda_1 / \lambda_0)^{|\mathbf{r}|} + a_2(y) (\lambda_2 / \lambda_0)^{|\mathbf{r}|} + \dots, \quad (3.3)$$

где λ_0 — старшее собственное значение, а коэффициенты $a_j(y)$ выражаются через билинейные комбинации компонент собственных векторов. Чтобы привести, например, (2.17) к виду (3.3), воспользуемся следующими выражениями для цилиндрических параметров ξ_T, Λ^{-1} , а также $\eta(q)$:

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{2} \left(\sum_q^f \gamma(q) - \sum_q^b \gamma(q) \right), \quad (3.4)$$

$$\exp(-\Lambda^{-1} - \eta(q_i)) = \frac{\prod_q^b \text{sh} \left(\frac{\gamma(q) + \gamma(q_i)}{2} \right)}{\prod_q^f \text{sh} \left(\frac{\gamma(q) + \gamma(q_i)}{2} \right)}, \quad (3.5)$$

$$\xi_T^4 = \left(\prod_q^b \prod_p^f \text{sh}^2 \left(\frac{\gamma(q) + \gamma(p)}{2} \right) \right) \times \left[\prod_q^b \prod_p^b \text{sh} \left(\frac{\gamma(q) + \gamma(p)}{2} \right) \right] \times \left[\prod_q^f \prod_p^f \text{sh} \left(\frac{\gamma(q) + \gamma(p)}{2} \right) \right]^{-1}. \quad (3.6)$$

Эти выражения получаются из (2.21)–(2.23), если перейти к контурным интегралам по $z = e^{iq}$. После стягивания контуров интегрирования соответствующие интегралы выражаются через суммы вычетов в полюсах, результатом чего и являются представления (3.4)–(3.6).

Для $N = 3$ имеем из (3.4)–(3.6) и (2.20)

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{2} \left[\gamma(\pi) + 2\gamma\left(\frac{\pi}{3}\right) - \gamma(0) - 2\gamma\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right], \quad (3.7)$$

$$\xi\xi_T = \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma(0) + \gamma(\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma(\pi) + \gamma(2\pi/3)}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(2\pi/3) + \gamma(\pi/3)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\gamma(0) + \gamma(2\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma(\pi) + \gamma(\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \gamma(\pi/3) \operatorname{sh} \gamma(2\pi/3)}, \quad (3.8)$$

$$\exp(-\Lambda^{-1} - \eta(q)) = \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma(0) + \gamma(q)}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(2\pi/3) + \gamma(q)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\gamma(\pi) + \gamma(q)}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(\pi/3) + \gamma(q)}{2}}. \quad (3.9)$$

В результате получим

$$\ln \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \Lambda^{-1} + \gamma(0), \quad (3.10)$$

$$\ln \frac{\lambda_0}{\lambda_2} = \Lambda^{-1} + \gamma\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad (3.11)$$

$$\ln \frac{\lambda_0}{\lambda_3} = \Lambda^{-1} + \gamma(0) + 2\gamma\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad (3.12)$$

$$a_1(y) = \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma(0) + \gamma(2\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma(\pi) + \gamma(2\pi/3)}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(2\pi/3) + \gamma(\pi/3)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\gamma(0) + \gamma(\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma(\pi) + \gamma(\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \gamma(\pi/3) \operatorname{sh} \gamma(2\pi/3)}, \quad (3.13)$$

$$a_2(y) = \frac{2}{3} \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma(0) + \gamma(\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma(0) + \gamma(\pi)}{2}}{\operatorname{sh} \gamma(\pi/3) \operatorname{sh} \frac{\gamma(\pi/3) + \gamma(\pi)}{2}} \cos\left(\frac{2\pi y}{3}\right), \quad (3.14)$$

$$a_3(y) = \frac{1}{64} \left[\operatorname{sh} \frac{\gamma(0) + \gamma(\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma(\pi) + \gamma(\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma(0) + \gamma(2\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma(\pi) + \gamma(2\pi/3)}{2} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sh} \gamma\left(\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{sh} \gamma\left(\frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(\pi/3) + \gamma(2\pi/3)}{2} \right]^{-1}. \quad (3.15)$$

Для трансфер-матрицы $2^3 \times 2^3$ имеется 8 собственных значений, но некоторые из них одинаковы. Кроме того, обращаются в нуль некоторые компоненты соответствующих собственных векторов. Поэтому в выражении для корреляционной функции (3.3) остается только три (а не семь) независимых вклада. С учетом определения (2.11), (2.12) функции $\gamma(q)$ для частных значений импульса $q = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi$ эти вклады точно соответствуют (3.10)–(3.15).

4. ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Имея выражение (3.2) для $g_n(\mathbf{r})$, содержащее в явном виде зависимость от проекций \mathbf{r} , проведем фурье-преобразование. Запишем импульсное представление (3.1) в виде суммы парциальных вкладов аналогично (2.16), (2.17):

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) = \xi\xi_T \sum_n \tilde{g}_n(\mathbf{p}), \quad (4.1)$$

$$\tilde{g}_n(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{r}} e^{-|\mathbf{x}|/\Lambda} g_n(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad (4.2)$$

где

$$\sum_{\mathbf{r}} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=1}^N. \quad (4.3)$$

Выполняя суммирование в (4.2), получим

$$\begin{aligned} \tilde{g}_n(\mathbf{p}) &= \frac{e^{-n/\Lambda}}{n!N^{n-1}} \sum_{[q]}^b \left(\prod_{j=1}^n \frac{e^{-\eta_j}}{\text{sh } \gamma_j} \right) \times \\ &\times \frac{\text{sh} \left(\Lambda^{-1} + \sum_{j=1}^n \gamma_j \right) F_n^2[q]}{\text{ch} \left(\Lambda^{-1} + \sum_{j=1}^n \gamma_j \right) - \cos p_x} \delta \left(p_y - \sum_{j=1}^n q_j \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Компонента p_x квазиимпульса имеет непрерывный спектр в зоне $[-\pi, \pi]$, а p_y дискретна:

$$p_y = \frac{2\pi l}{N}, \quad l = 1, 2, \dots, N.$$

Соответственно, δ -функция в правой части (4.4) имеет смысл символа Кронеккера

$$\delta \left(p_y - \sum_{j=1}^n q_j \right) = \delta \left(l - \sum_{j=1}^n l_j \right) \Big|_{\text{mod } N}.$$

Функция $\tilde{g}_n(\mathbf{p})$ периодична по p_x, p_y с периодом 2π . Вставляя под знак суммирования в (4.4) единицу,

$$1 = \int_{\Lambda^{-1}+n\gamma(0)}^{\Lambda^{-1}+n\gamma(\pi)} d\omega \delta \left(\Lambda^{-1} + \sum_{j=1}^n \gamma_j - \omega \right),$$

(здесь под интегралом δ -функция Дирака) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$\tilde{g}_n(\mathbf{p}) = \int_{\Lambda^{-1}+n\gamma(0)}^{\Lambda^{-1}+n\gamma(\pi)} d\omega \frac{\text{sh } \omega}{\text{ch } \omega - \cos p_x} \rho_n(\omega, p_y), \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \rho_n(\omega, p_y) &= \frac{e^{-n/\Lambda}}{n!N^{n-1}} \sum_{[q]}^b \left(\prod_{j=1}^n \frac{e^{-\eta_j}}{\text{sh } \gamma_j} \right) \times \\ &\times F_n^2[q] \delta \left(\Lambda^{-1} + \sum_{j=1}^n \gamma_j - \omega \right) \delta \left(p_y - \sum_{j=1}^n q_j \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

На бесконечной решетке в скейлинговом пределе восстанавливается симметрия относительно вращений и в результате (4.5), (4.6) переходит в классическое спектральное представление Лемана в квантовой теории поля.

5. МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

Если прямоугольная решетка имеет размеры $M \times N$ и одинаковые энергии взаимодействия для вертикальных и горизонтальных связей, то статистическая сумма Z является функцией четырех переменных:

$$Z = Z(K, h, N, M) = \sum_{[\sigma]} e^{-\beta H[\sigma] + h \sum_{\mathbf{r}} \sigma(\mathbf{r})}, \quad (5.1)$$

где безразмерный параметр $h = \beta \mathcal{H}$, \mathcal{H} — магнитное поле. Удельная намагниченность \mathfrak{M} и магнитная восприимчивость χ выражаются через производные по полю от статистической суммы:

$$\mathfrak{M}(K, h, N, M) = \frac{1}{MN} \frac{\partial \ln Z}{\partial h} = \langle \sigma \rangle, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \beta^{-1} \chi(K, h, N, M) &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial h} = \\ &= \sum_{\mathbf{r}} (\langle \sigma(0)\sigma(\mathbf{r}) \rangle - \langle \sigma \rangle^2). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Намагниченность вследствие Z_2 -симметрии модели Изинга обращается в нуль при $h = 0$ при любых конечных размерах M, N и даже, если хотя бы один из них удерживается конечным. В последнем случае, когда, например, $M \rightarrow \infty, N = \text{const}$, двумерная модель Изинга вырождается в N -рядную цепочку изинговских спинов, являющуюся с термодинамической точки зрения одномерной системой, в которой спонтанное нарушение симметрии невозможно. Представляя восприимчивость в виде суммы парциальных вкладов, получим из (4.1)–(4.4):

$$\chi = \chi_0 + \sum_{l=1}^{[N/2]} \chi_{2l} \quad \text{при } \gamma(0) = \mu, \quad (5.4)$$

$$\beta^{-1} \chi_0 = \xi \xi_T N \text{cth}(1/2\Lambda), \quad (5.5)$$

$$\chi = \sum_{l=0}^{[(N-1)/2]} \chi_{2l+1} \quad \text{при } \gamma(0) = -\mu, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \beta^{-1} \chi_n &= \frac{e^{-n/\Lambda}}{n!N^{n-1}} \sum_{[q]}^b \left(\prod_{i=1}^n \frac{e^{-\eta_i}}{\text{sh } \gamma_i} \right) \times \\ &\times F_n^2[q] \text{cth} \left[\frac{1}{2} \left(\Lambda^{-1} + \sum_{i=1}^n \gamma_i \right) \right] \delta \left(\sum_{i=1}^n q_i \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

В парамагнитной области ($s < 1$) выражение (5.6) допускает предел $N \rightarrow \infty$ и переходит в восприимчивость на бесконечной решетке, благодаря отсутствию спонтанной намагниченности в парамагнитной фазе. В ферромагнитной области ($s > 1$) можно

перейти к пределу $N \rightarrow \infty$ только для величины χ_F :

$$\chi_F = \chi - \chi_0 = \sum_{l=1}^{\infty} \chi_{2l}, \quad (5.8)$$

которая и воспроизводит то, что принято считать магнитной восприимчивостью модели Изинга при $h = 0$ в термодинамическом пределе. При больших, но конечных N главный вклад в восприимчивость дает слагаемое χ_0 , как это видно из (5.5):

$$\beta^{-1} \chi_0 \approx 2\xi N \Lambda \approx \frac{\sqrt{\pi} \xi N^{3/2}}{\sqrt{\text{sh} |\mu|}} e^{N|\mu|}, \quad (5.9)$$

который экспоненциально возрастает с увеличением окружности цилиндра. Из (5.9) следует, что чем больше N , тем меньшее возмущающее поле $\delta h \sim e^{-N|\mu|}$ нужно для того, чтобы упорядочить все спины на решетке.

Хотя двумерная модель Изинга и сопровождается, как правило, эпитетом точнорешаемая, точное решение для статистической суммы при наличии внешнего поля до сих пор не найдено ни в термодинамическом пределе, ни тем более для решетки с конечными размерами. Однако сам факт возникновения спонтанной намагниченности для решетки с бесконечными размерами можно установить из анализа высоко- и низкотемпературных разложений для свободной энергии в модели Изинга, не апеллируя к точному решению. Строгое определение спонтанной намагниченности дается следующим порядком предельных переходов в соответствии с концепцией квазисредних Боголюбова:

$$\mathfrak{M}_0(K) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\lim_{M, N \rightarrow \infty} \mathfrak{M}(K, h, N, M) \right]. \quad (5.10)$$

Однако в предположениях о переставимости соответствующих пределов и об ослаблении корреляций на больших расстояниях можно получить точное выражение для квадрата спонтанной намагниченности, связывая его со значением (2.20) парной корреляционной функции для модели Изинга на бесконечной решетке при нулевом магнитном поле:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_0^2(K) &= \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \langle \sigma(0) \sigma(\mathbf{r}) \rangle = \langle \sigma(0) \rangle \langle \sigma(\infty) \rangle = \\ &= \langle \sigma \rangle^2 = \xi. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Между тем, в термодинамическом пределе сумма по решетке каждого из двух слагаемых в правой части (5.3) по отдельности является расходящейся. Поэтому замена $\mathfrak{M}^2(K, 0, \infty, \infty)$ на последнем этапе предельных переходов $h \rightarrow 0, M, N \rightarrow \infty$ на предельное значение корреляционной функции (равное

ξ) под знаком (бесконечной) суммы предполагает не только равенство (5.11), но также существование предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \lim_{M, N \rightarrow \infty} MN [\mathfrak{M}^2(K, h, M, N) - \xi] \right\} = f(K), \quad (5.12)$$

и, более того,

$$f(K) = 0. \quad (5.13)$$

Явный вид зависимости корреляционной функции от размера N , а именно, экспоненциально быстрое стремление цилиндрических параметров к своим предельным значениям (2.24)–(2.26), может служить косвенным подтверждением тому, что равенства (5.12), (5.13) справедливы.

Как видно из (2.18), (3.2), главный вклад в поведение корреляционной функции на больших расстояниях в ферромагнитной области дает первый член в разложении (2.16), который, заметим, не зависит от проекции y

$$G_0(|\mathbf{r}|) = \xi \xi_T e^{-|x|/\Lambda}. \quad (5.14)$$

Отсюда видно, что расстояние порядка Λ , в пределах которого спины жестко коррелированы, очень быстро увеличивается (см. (2.25)) с увеличением размера N . Физически это означает, что в ферромагнитной области температур цилиндр разбивается на весьма протяженные участки (домены) с отличной от нуля намагниченностью, в то время как средняя намагниченность всего бесконечно длинного цилиндра сохраняется равной нулю. Понятно, что в качестве (квадрата) спонтанной намагниченности в такой картине разумно было бы рассматривать значение корреляционной функции не в пределе $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, а на расстояниях $|\mathbf{r}| = R(N)$, достаточно больших, но не превышающих размер домена:

$$N \ll R(N) \ll \Lambda.$$

Как видно из (2.25), при достаточно больших N такие неравенства вполне могут быть удовлетворены. Согласно этому, в определении термодинамического предела восприимчивости (5.3) суммирование в бесконечных пределах по координате x следует заменить на суммирование в пределах, не превышающих характерный размер домена. В этом случае формальным обоснованием определения (5.8) для восприимчивости в ферромагнитной фазе является условие обращения в нуль при $N \rightarrow \infty$ величины

$$\sum_{x=-R}^R \sum_{y=1}^N [G_0(|\mathbf{r}|) - G_0(R)] \approx \xi NR^2/\Lambda \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

откуда можно получить оценку для «параметра термодинамического обрезания» $R(N)$

$$R(N) \ll \sqrt{\Lambda/N\xi} \approx e^{N|\mu|/2} [\pi/(2N \operatorname{sh} |\mu|)]^{1/4}.$$

Мы полагаем, что эти оценки проясняют в определенной мере физическое содержание формальной процедуры термодинамического предела.

6. СТРУКТУРА СИНГУЛЯРНОСТЕЙ

Исходное выражение (2.1) для статистической суммы в модели Изинга является полиномом по s , а решение (2.9) — записью этого полинома в факторизованном виде. Оно дает наглядный пример механизма «нулей» Ли и Янга [15], обуславливающего возникновение критических сингулярностей в термодинамическом пределе. Корни полинома (2.9) расположены на окружности $|s| = 1$ в комплексной плоскости s . При любых конечных M и N нуль на вещественной оси $s = 1$ не появляется, поскольку в фермионном спектре отсутствует значение квазиимпульса $q_x = q_y = 0$. Если хотя бы один из размеров неограниченно возрастает, то нули на окружности $|s| = 1$ сгущаются, образуя плотное множество. В пределе $M \rightarrow \infty, N = \text{const}$ они превращаются в конечное число (равное N) точек ветвления корневого типа на окружности $|s| = 1$, что демонстрирует представление (2.10) и уравнения (2.11), (2.12), определяющие $\gamma(q)$ как функцию от s . В свою очередь, эти точки ветвления сгущаются при увеличении N , образуя плотное множество, но в пределе $N \rightarrow \infty$

превращаются в четыре изолированные точки ветвления логарифмического типа при $s = \pm 1, \pm i$. Как результат подобных метаморфоз теплоемкость в термодинамическом пределе приобретает расходимость в критической точке $\ln |1 - s|$, но при этом выражается в виде одной и той же функции как выше, так и ниже температуры фазового перехода.

Казалось бы, для магнитной восприимчивости как функции комплексной переменной s картина не должна выглядеть сложнее. В самом деле, исходное выражение (2.2) для корреляционной функции при конечных M и N является отношением полиномов от s . В знаменателе — статистическая сумма, формирование структуры сингулярностей которой мы только что вкратце описали. К сожалению, полином в числителе не удается представить в столь же простом факторизованном виде. Тем не менее формфакторное представление при $M \rightarrow \infty$ и конечном N , полученное в данной работе, показывает, что корреляционная функция имеет конечное число корневых точек ветвления на окружности $|s| = 1$. Их количество удвоено по сравнению со случаем статистической суммы, поскольку в выражениях (2.16)–(2.19), (3.2) присутствуют функции $\gamma(q)$ (2.11), соответствующие значениям квазиимпульса как из фермионного, так и бозонного спектров. Восприимчивость на цилиндре дается бесконечной суммой корреляционных функций, что, в принципе, может привести к появлению дополнительных сингулярностей. Можно убедиться, однако, что такие сингулярности не появляются на первом листе римановой поверхности.

Выпишем в явном виде в качестве примера выражение χ (5.4) для $N = 3$ с использованием представлений (3.7)–(3.9) для цилиндрических параметров, а также выражений (3.13)–(3.15):

$$\begin{aligned} \beta^{-1} \chi = & \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma(0) + \gamma(2\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma(\pi) + \gamma(2\pi/3)}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(2\pi/3) + \gamma(\pi/3)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\gamma(0) + \gamma(\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma(\pi) + \gamma(\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \gamma(\pi/3) \operatorname{sh} \gamma(2\pi/3)} \operatorname{cth} \left(\frac{\Lambda^{-1} + \gamma(0)}{2} \right) + \\ & + \frac{1}{64} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\gamma(0) + \gamma(\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma(\pi) + \gamma(\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma(0) + \gamma(2\pi/3)}{2} \operatorname{sh} \frac{\gamma(\pi) + \gamma(2\pi/3)}{2}} \times \\ & \times \frac{1}{\operatorname{sh} \gamma(\pi/3) \operatorname{sh} \gamma(2\pi/3) \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(\pi/3) + \gamma(2\pi/3)}{2}} \operatorname{cth} \left(\frac{\Lambda^{-1} + \gamma(0) + 2\gamma(2\pi/3)}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

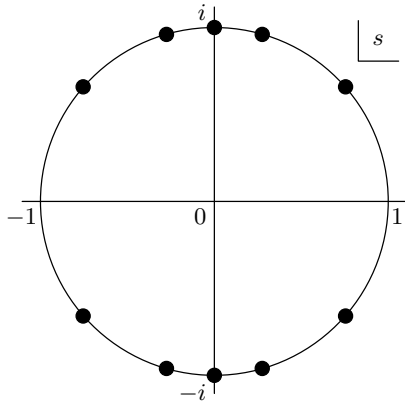


Рис. 2. Положение сингулярностей в комплексной плоскости для магнитной восприимчивости χ как функции от $s = \text{sh} 2\beta J$ при частном значении $N = 3$

Сингулярности по s могли бы появиться за счет обращения в нуль знаменателя в выражении (6.1). Легко видеть, однако, что соответствующие множители

$$\text{sh} \frac{\gamma(q) + \gamma(q')}{2} = (\cos q' - \cos q) / \text{sh} \frac{\gamma(q) - \gamma(q')}{2}$$

всегда отличны от нуля, если $q \neq q'$. Можно также показать, что на первом листе римановой поверхности, который определяется условием положительности $\gamma(q)$ как функции от s при вещественных $s > 0$, не обращаются в нуль и аргументы котангенсов, входящих в (6.1): эти множители есть результат бесконечного суммирования по координате x . Поэтому полный набор сингулярностей восприимчивости исчерпывается теми точками ветвления, которые содержатся в функциях

$$e^{\gamma(q)} = \left[\sqrt{\frac{1}{2}(s + s^{-1}) + \sin^2 \frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}(s + s^{-1}) - \cos^2 \frac{q}{2}} \right]^2. \quad (6.2)$$

Для каждого значения квазиимпульса $q \neq 0, \pi$ функция (6.2) имеет четыре точки ветвления. Если обозначить их через $s_c = |s_c|e^{\pm i\varphi_c}$, то

$$|s_c| = 1, \quad \cos \varphi_c = \begin{cases} \cos^2 q/2, \\ -\sin^2 q/2. \end{cases} \quad (6.3)$$

Из (6.2) видно, что при $q = 0, \pi$ имеются только две точки ветвления $s_c = \pm i$. Нетрудно подсчитать, что при заданном N полное число сингулярностей

равно $4N - 2$, и все они лежат на окружности $|s| = 1$. Для $N = 3$ соответствующая картинка представлена на рис. 2. Отметим, что на других листах римановой поверхности появляются сингулярности, соответствующие обращению в нуль аргументов гиперболических котангенсов в (6.1), причем эти точки не лежат на окружности $|s| = 1$. О том, что происходит в пределе $N \rightarrow \infty$, когда сингулярности при $|s| = 1$ сгущаются, образуя плотное множество, мы пока не можем сказать ничего определенного. Сошлемся на работы [16, 17], в которых эта проблема подверглась весьма серьезному анализу. Авторы этих работ склоняются к выводу о том, что результатом сгущения особых точек является возникновение в комплексной плоскости s сингулярности типа естественной границы.

Мы признательны В. Н. Шадуре за помощь в работе и обсуждение результатов, а также благодарны Б. М. Маккою (В. М. McCoy) за полезные замечания относительно формфакторного представления корреляционной функции на цилиндре и за то, что он указал нам на важность проблемы сингулярностей в магнитной восприимчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы INTAS (грант № 00-00055) и ГФФИ Украины (проект 02.07/00152).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).
2. C. N. Yang, Phys. Rev. **85**, 808 (1952).
3. E. W. Montroll, R. B. Potts, and J. C. Ward, J. Math. Phys. **4**, 308 (1963).
4. T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, and E. Barouch, Phys. Rev. B **13**, 316 (1976).
5. B. M. McCoy, E. Barouch, and T. T. Wu, Phys. Rev. Lett. **31**, 1409 (1973).
6. M. Jimbo and T. Miwa, Proc. Jap. Acad. A **56**, 405 (1980).
7. B. M. McCoy and T. T. Wu, *The Two-Dimensional Ising Model*, Harvard University Press, Cambridge (1973).
8. J. Palmer and C. A. Tracy, Adv. in Appl. Math. **2**, 329 (1981).
9. K. Yamada, Prog. Theor. Phys. **71**, 1416 (1984).
10. А. И. Бугрий, В. Н. Шадура, ЖЭТФ **109**, 1024 (1996).

11. B. Berg, M. Karowski, and P. Weisz, *Phys. Rev. D* **19**, 2477 (1979).
12. A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Ann. Phys.* **120**, 253 (1979).
13. F. A. Smirnov, in *Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory*, *Adv. Series in Math. Phys.*, World Scientific, Singapore (1992), Vol. 14.
14. А. И. Бугрий, *ТМФ* **127**, 143 (2001).
15. T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **87**, 410 (1952).
16. B. Nickel, *J. Phys. A* **32**, 3889 (1999).
17. B. Nickel, *J. Phys. A* **33**, 1693 (2000).