

ДЕКОГЕРЕНТНОСТЬ И ПЕРЕПУТЫВАНИЕ ПРИ РАДИАЦИОННОМ РАСПАДЕ ДВУХАТОМНОЙ СИСТЕМЫ

*А. М. Башаров**

*Московский инженерно-физический институт
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 11 января 2002 г.

Показано, что релаксация в марковском приближении двух не взаимодействующих между собой атомов в поле общего термостата приводит не только к декогерентности, но и к противоположному процессу — перепутыванию атомных состояний, которое может принимать стационарное значение в зависимости от начальных условий. Эта область начальных условий сужается с увеличением среднего числа фотонов в термостате. Установлено, что основным радиационным механизмом, разрушающим любое первоначальное перепутывание атомов, является взаимодействие каждого из атомов со своим, независимым от другого, термостатом. Все обсуждаемые модели марковской релаксации основаны на уравнениях Линдблада.

PACS: 03.65.Ud, 42.60.Rn

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время под декогерентностью понимают несколько родственных, но немного различных процессов. Традиционно, атомная декогерентность — это затухание недиагональных элементов матрицы плотности атома, которые определяют поляризацию атома и различные фазовые соотношения и когерентность [1, 2]. Рассмотрение такого процесса сопровождается переходом от описания атома при помощи волновой функции к описанию атома при помощи матрицы плотности (переход от чистого состояния в смешанное состояние), что также соответствует декогерентности. Релаксация вследствие взаимодействия атома с термостатом сопровождается перепутыванием атомных состояний с состояниями частиц термостата [3–5]. Однако под декогерентностью также понимается и процесс разрушения перепутывания в выделенной системе частиц [6]. Предметом исследования данной статьи является возникновение перепутывания атомных состояний системы из двух атомов (и разрушение его) при радиационном распаде.

Напомним, что перепутанными состояниями называют такие состояния квантовых систем, когда

волновая функция (матрица плотности) системы частиц не может быть представлена в виде произведения волновых функций (матриц плотности) отдельных частиц даже в случае, если частицы не взаимодействуют друг с другом. При этом перепутанные состояния представляют собой особый случай квантовых корреляций, поскольку наличие простых квантовых корреляций, например, различия между двухчастичной матрицей плотности и произведением одночастичных матриц плотности, не всегда обуславливает перепутанность. Таким перепутанным состояниям, но не атома и частиц термостата, а выделенной системы квантовых частиц (атомов или фотонов) в последнее время уделяется повышенное внимание. Отчасти это связано с тем, что перепутанные состояния являются одним из основных ресурсов квантовой информации, квантовых вычислений, квантовой телепортации и т. п. Известные белловские состояния представляют собой пример максимально перепутанных состояний системы из двух двухуровневых частиц. Примером перепутанных фотонных состояний служит так называемый сжатый свет [7], используемый в экспериментах по телепортации фотонных состояний [8, 9]. Перепутанные состояния не взаимодействующих между собой атомов определяют ряд оптических эффектов [10–12], из которых наиболее известным является

*E-mail: bash@online.ru

ся сверхизлучение [13, 14] — в этом случае состояния Дике представляют собой перепутанные состояния в системе N частиц.

Получению перепутанных атомных состояний посвящены недавние исследования [15–19]. Как правило, предполагается, что атомы взаимодействуют между собой [15–17]. Тогда перепутывание атомных состояний выглядит вполне естественно. В данной работе рассматриваются невзаимодействующие между собой атомы, распадающиеся в поле общего термостата. В результате установлен факт, кажущийся на первый взгляд парадоксальным — релаксационный процесс, обычно обуславливающий потерю квантовых корреляций и т. п., приводит к возникновению перепутанности в ансамбле невзаимодействующих между собой атомов. Для простоты рассмотрение ограничено двумя атомами.

Для описания коллективного атомного распада используются широко известная модель Дике и другие модели [13, 14]. В данной работе используются новые модели, основанные на уравнениях Линдблада, позволяющие обсуждать динамику как симметричных по частицам атомных состояний, так и антисимметричных. Получено общее решение уравнений простейшей модели, а другие уравнения исследованы численно. В качестве критерия перепутанности атомных состояний в работе использован критерий Переса–Хородецких [20, 21], являющийся более сильным, чем неравенства Белла. Вычислены собственные значения двухчастичной атомной матрицы плотности, транспонированной по методу Переса–Хородецких, и обнаружена область значений параметров задачи, в которой атомные состояния, полученные в результате распада неперепутанных начальных атомных волновых функций, становятся перепутанными. Установлено, что одним из основных условий перепутывания атомных состояний в процессе радиационного распада является наличие общего термостата. При этом перепутанность атомных состояний оказывается весьма чувствительной к среднему числу фотонов в термостате — с увеличением среднего числа фотонов область значений параметров, при которых возникает перепутанность, сужается. Однако общий термостат не может полностью разрушить исходную перепутанность в системе, связанную с антисимметричными по частицам атомными состояниями. Основным фактором, разрушающим перепутанность, является взаимодействие каждого из атомов со «своим», не зависящим от других, термостатом. Подчеркнем, что в статье не учитывается взаимодействие между атомами, чтобы выявить эффект перепутывания из-за взаимодей-

ствия с общим термостатом в наиболее явном виде. Что касается термостата, то под ним в статье понимается любое широкополосное электромагнитное излучение, начальное состояние которого удовлетворяет условию δ -коррелированности, а среднее значение операторов уничтожения или рождения фотонов равно нулю. Такое излучение может быть создано параметрическими генераторами, а его состояние может быть сжатым [1, 2]. В последнем случае электромагнитное излучение часто называют сжатым вакуумом.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 выводятся квантовые стохастические уравнения Ито и обсуждаются приближения и модели коллективной релаксации, рассматриваемые в дальнейшем. В разд. 3 на основе одночастичных уравнений для атомной матрицы плотности делается вывод о наиболее благоприятных условиях для перепутывания атомных состояний. В разд. 4 получено общее решение для модели распада атомов в поле общего термостата при нулевой температуре в однонаправленном приближении и рассматривается критерий Переса–Хородецких перепутывания атомных состояний. В разд. 5 рассматривается влияние температуры, сжатия термостата, фазового параметра, типа модели на минимальное собственное значение матрицы Переса–Хородецких, характеризующее степень перепутывания атомов. В Заключении обсуждаются механизмы, приводящие как к атомному перепутыванию, так и к полной атомной декогерентности, а также указывается на аналогию результатов данной работы с некоторыми результатами квантовой теории информации.

2. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОЙ РЕЛАКСАЦИИ

Взаимодействие двух одинаковых покоящихся двухуровневых атомов с квантованным электромагнитным полем в электродипольном приближении характеризуется гамильтонианом

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}^A + \mathcal{H}^F + \mathcal{V}, \\ \mathcal{H}^A &= \frac{\hbar\omega_0}{2} (C_3 \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes C_3), \\ \mathcal{H}^F &= \sum_{\mathbf{q}\lambda} \hbar qc \left(b_{\mathbf{q}\lambda}^+ b_{\mathbf{q}\lambda} + \frac{1}{2} \right), \\ \mathcal{V} &= -\frac{i}{\sqrt{V_s}} \sum_{\mathbf{q}\lambda} \sqrt{2\pi\hbar qc} (\mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda} \cdot \mathbf{d}_{10}) \times \\ &\times b_{\mathbf{q}\lambda} (e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} C_+ \otimes \hat{1} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_2} \hat{1} \otimes C_+) + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathcal{H} — гамильтониан системы двух двухуровневых атомов, расположенных в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , $C_- = |0\rangle\langle 1|$ и $C_+ = |1\rangle\langle 0|$ — операторы уничтожения и рождения возбуждения двухуровневого атома. Вместе с оператором C_3 они делают возможной реализацию алгебры $SU(2)$: $[C_+, C_-] = C_3$, $[C_3, C_\pm] = \pm 2C_\pm$. Через $|0\rangle$ и $|1\rangle$ обозначены векторы состояний атома, отвечающие нижнему и верхнему энергетическим уровням, $\hbar\omega_0$ — разность энергий этих уровней. Величина \mathbf{d}_{10} представляет матричный элемент дипольного момента атома; \mathcal{H}^F — гамильтониан электромагнитного поля, у которого операторы уничтожения и рождения фотонов с волновым вектором \mathbf{q} и поляризацией $\mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda}$ даются величинами $b_{\mathbf{q}\lambda}$ и $b_{\mathbf{q}\lambda}^+$: $[b_{\mathbf{q}\lambda}, b_{\mathbf{q}'\lambda'}^+] = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}\delta_{\lambda\lambda'}$. Далее, \mathcal{V} — оператор резонансного взаимодействия атомов с поперечной компонентой электромагнитного поля, V_s — объем, в котором находится электромагнитное поле. Для простоты выражение для \mathcal{V} записано без учета эффектов отдачи при поглощении и излучении фотонов. В дальнейшем также будем пренебрегать поляризационными эффектами, опуская знаки векторов. Кроме того, уравнения (1) предполагают, что взаимодействие атомов с продольной компонентой электромагнитного поля, определяющее оператор диполь-дипольного взаимодействия атомов, не учитывается. Это сделано, чтобы четче выделить эффекты перепутывания, обусловленные процессами релаксации в поле общего термостата.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда электромагнитное поле распространяется в одном направлении. Отметим, что именно этому случаю соответствуют все известные точно интегрируемые модели резонансного взаимодействия квантованного поля с двухуровневыми атомами [22, 23]. Пусть, например, $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_z = \omega\mathbf{e}_z/c$. Оператор взаимодействия принимает вид

$$\mathcal{V} = -i \sum_{\omega} g(\omega) d_{10} b_{\omega} \times \left(C_+ \otimes \hat{1} + \exp\left(\frac{i\omega\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{e}_z}{c}\right) \hat{1} \otimes C_+ \right) + \text{H.c.}, \quad (2)$$

где $b_{\omega} \equiv b_{\omega\mathbf{e}_z/c}$ и для простоты положено $\mathbf{r}_1 = 0$. Будем считать, что начальное состояние $|\Phi_0\rangle$ электромагнитного поля δ -коррелировано:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | b_{\omega}^+ b_{\omega'} | \Phi_0 \rangle &= N(\omega) \delta(\omega - \omega'), \\ \langle \Phi_0 | b_{\omega} b_{\omega'}^+ | \Phi_0 \rangle &= (1 + N(\omega)) \delta(\omega - \omega'), \\ \langle \Phi_0 | b_{\omega} b_{\omega'} | \Phi_0 \rangle &= M(\omega) \delta(2\Omega_{\Gamma} - \omega - \omega'), \\ \langle \Phi_0 | b_{\omega}^+ b_{\omega'}^+ | \Phi_0 \rangle &= M^*(\omega) \delta(2\Omega_{\Gamma} - \omega - \omega'). \end{aligned} \quad (3)$$

Это означает, что электромагнитное поле рассматривается как термостат с центральной частотой Ω_{Γ} , плотностью фотонов $N(\omega)$ на частоте ω , параметром сжатия $M(\omega)$,

$$M(\omega) \leq \sqrt{N(\omega)(N(\omega) + 1)}.$$

Взаимодействие с описанным термостатом будем описывать в марковском приближении. Будем считать, что постоянная связи $g(\omega)$, параметры электромагнитного поля $N(\omega)$, $M(\omega)$, и экспонента $\exp(i\omega\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{e}_z/c)$ не зависят от частоты, а оператор уничтожения фотонов в представлении Гейзенберга описывается свободной эволюцией, так что уравнение Гейзенберга для произвольного атомного оператора дается выражением

$$\dot{A} = -\frac{i}{\hbar}[A, \mathcal{H}^A] + \sqrt{\chi}[A, C_+]b(t) - \sqrt{\chi}[A, C_-]b^+(t). \quad (4)$$

Здесь

$$C_{\pm} = C_{\pm} \otimes \hat{1} + e^{\mp i\theta} \hat{1} \otimes C_{\pm}, \quad (5)$$

$$\theta = \frac{\omega\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{e}_z}{c}, \quad \chi = 2\pi g^2(\omega_0),$$

$$N = N(\omega_0), \quad M = M(\omega_0),$$

$$b_{\omega} = b_{\omega}(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)},$$

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega(t-t_0)} b_{\omega}(t_0).$$

Поскольку при резонансном взаимодействии эффективны лишь фотоны с частотой вблизи резонансной частоты ω_0 , интегрирование по частоте ведется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Заметим также, что на эволюцию термостата не влияют излученные атомами фотоны, так что взаимодействие атомов в процессе поглощения фотона, излученного другим атомом, в уравнении (4) не учитывается.

Уравнение (4) представляет собой квантовое уравнение Ланжевена и, как все уравнения Ланжевена с мультипликативным шумом, математически не определено. Чтобы доопределить уравнение (4), введем квантовые винеровские процессы $B(t, t_0)$ следующим образом:

$$B(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt' b(t'), \quad [B(t, t_0), B^+(t, t_0)] = t - t_0.$$

Определяя интеграл и дифференциал Ито стандартным образом [1, 24], получим квантовое стохастиче-

ское уравнение Ито для атомного оператора A в виде

$$\begin{aligned}
 dA = & -\frac{i}{\hbar} [A, \mathcal{H}^A] dt + \sqrt{\chi} d_{10} [A, C_+] dB(t) - \\
 & - \sqrt{\chi} d_{10}^* [A, C_-] dB^+(t) + \\
 & + \frac{\chi |d_{10}|^2}{2} (N+1) (C_+ [A, C_-] + [C_+, A] C_-) dt + \\
 & + \frac{\chi |d_{10}|^2}{2} N (C_- [A, C_+] + [C_-, A] C_+) dt - \\
 & - \frac{\chi (d_{10}^*)^2}{2} M (C_+ [A, C_+] + [C_+, A] C_+) dt - \\
 & - \frac{\chi (d_{10}^*)^2}{2} M^* (C_- [A, C_-] + [C_-, A] C_-) dt, \quad (6)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 dB^+(t) dB(t) &= N dt, \\
 dB(t) dB^+(t) &= (1+N) dt, \\
 dB(t) dB(t) &= M dt, \quad dB^+(t) dB^+(t) = M^* dt, \quad (7) \\
 dt dt &= dt dB(t) = dt dB^+(t) = \\
 &= dB(t) dt = dB^+(t) dt = 0.
 \end{aligned}$$

Такое «уточнение» обеспечивает выполнение правила дифференцирования Ито: для любых атомных операторов A_1 и A_2

$$d(A_1 A_2) = (dA_1) A_2 + A_1 dA_2 + (dA_1)(dA_2).$$

Квантовое стохастическое уравнение Ито (6) с алгеброй (7) полностью описывает эволюцию атомов при взаимодействии с «однонаправленным» термостатом в марковском приближении. На его основе стандартными методами нетрудно получить уравнение для двухатомной матрицы плотности \mathcal{R} в виде

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{R}, \mathcal{H}^A] - \hat{\Gamma} \mathcal{R}, \quad (8)$$

где введен релаксационный оператор

$$\begin{aligned}
 \hat{\Gamma} \mathcal{R} = & \frac{\chi |d_{10}|^2}{2} \times \\
 & \times (N+1) (\mathcal{R} C_+ C_- + C_+ C_- \mathcal{R} - 2C_- \mathcal{R} C_+) + \\
 & + \frac{\chi |d_{10}|^2}{2} N (\mathcal{R} C_- C_+ + C_- C_+ \mathcal{R} - 2C_+ \mathcal{R} C_-) + \\
 & + \frac{\chi d_{10}^2}{2} (2C_+ \mathcal{R} C_+ - \mathcal{R} C_+ C_+ - C_+ C_+ \mathcal{R}) M + \\
 & + \frac{\chi (d_{10}^*)^2}{2} (2C_- \mathcal{R} C_- - \mathcal{R} C_- C_- - C_- C_- \mathcal{R}) M^*. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Уравнения (8) и (9), описывающие коллективную релаксацию двух атомов в однонаправленном электромагнитном поле (3), могут быть легко обобщены на случаи одномерного и трехмерного полей.

Для одномерной модели наряду с операторами (5) вводим дополнительные операторы

$$C'_\pm = C_\pm \otimes \hat{1} + e^{\pm i\theta} \hat{1} \otimes C_\pm, \quad (10)$$

отличающиеся от (5) заменой θ на $-\theta$. Тогда уравнение для двухатомной матрицы плотности можно получить в виде

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{R}, \mathcal{H}^A] - \hat{\Gamma} \mathcal{R} - \hat{\Gamma}' \mathcal{R}, \quad (11)$$

где оператор $\hat{\Gamma}'$ отличается от оператора $\hat{\Gamma}$ заменой C_\pm на C'_\pm . Будем считать, что параметры χ , N и M , входящие в $\hat{\Gamma}'$, также отличаются от аналогичных параметров, входящих в $\hat{\Gamma}$, обозначим их знаком штрих. Это отличие может быть связано с тем, что система из двух атомов облучается с двух сторон двумя различными широкополосными полями, создаваемыми, например, вырожденными параметрическими генераторами [2]. Отметим, что вывод уравнений (11) полностью аналогичен случаю однонаправленного распространения электромагнитного поля за исключением того, что вместо одной пары квантовых винеровских процессов $B(t, t_0)$ и $B^+(t, t_0)$ необходимо рассматривать и вторую пару $B'(t, t_0)$ и $B'^+(t, t_0)$, соответствующую полю, распространяющемуся в противоположном направлении \mathbf{e}_z , причем эти пары процессов независимы друг от друга:

$$\begin{aligned}
 dB(t) dB'(t) &= dB(t) dB'^+(t) = \\
 &= dB^+(t) dB'(t) = dB^+(t) dB'^+(t) = 0.
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что для одинаковых параметров $\chi = \chi'$, $N = N'$, $M = M'$ и $\theta = 0$ уравнение (11) совпадает с уравнениями (8) и (9) при $\theta = 0$ и перенормированной константой $\chi \rightarrow 2\chi$.

Для трехмерной модели электромагнитного поля наиболее просто получить кинетическое уравнение для двухатомной матрицы плотности в случае, когда атомы расположены в объеме, линейные размеры которого много меньше длины волны резонансных мод, т. е. полагая $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. При этом удобно ввести усредненные по различным ориентациям волнового вектора операторы уничтожения и рождения фотонов, например

$$b_\omega = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}.$$

Вводя дополнительные предположения о δ -коррелированности начального состояния электромагнитного поля по отношению к усредненным операторам и

повторяя стандартные рассуждения, получим квантовые уравнения Ито в виде (6), соответствующие винеровским процессам, построенным на усредненных операторах. Из них следуют те же уравнения для двухатомной матрицы плотности (8) и (9) с $\theta = 0$.

Форма уравнений (8), (9) и (11) является единой для кинетических уравнений, описывающих релаксацию в марковском приближении, что впервые доказано в работе Линдблада [25] для случая отсутствия сжатия при весьма общих предположениях о свойствах термостата и характере эволюции динамической системы. Поэтому, с точки зрения атомной динамики, приведенное краткое обоснование кинетических уравнений путем построения квантового стохастического уравнения Ито (6) необходимо лишь для определения вида операторов C_{\pm}, C'_{\pm} и аналогичных операторов, отвечающих за связь квантовой системы с независимыми друг от друга термостатами. Следует подчеркнуть, что стохастические уравнения (6) и (7) намного богаче соответствующих им кинетических уравнений, поскольку позволяют судить и о фотонной динамике, оперируя с *in*- и *out*-полями и стохастическим уравнением для оператора эволюции [1]. Подход с использованием квантовых стохастических уравнений Ито дает также возможность рассматривать повторные воздействия одной и той же реализации квантового винеровского процесса на атомную систему. Однако в данной работе это не обсуждается.

Модели (8), (9) и (10) для общности следует дополнить еще двумя операторами релаксации Γ_1 и Γ_2 , описывающими взаимодействие каждого из атомов с независимыми друг от друга термостатными полями. Таким образом, наиболее общей моделью марковской релаксации двухатомной системы, взаимодействующей с широкополосными квантованными электромагнитными полями, являются следующие уравнения:

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{R}, \mathcal{H}^A] - \hat{\Gamma}\mathcal{R} - \hat{\Gamma}'\mathcal{R} - \hat{\Gamma}_1\mathcal{R} - \hat{\Gamma}_2\mathcal{R}. \quad (12)$$

Здесь $\hat{\Gamma}$ и $\hat{\Gamma}'$ определяются уравнением (9) (с величинами C'_{\pm}, χ', N' и M' для $\hat{\Gamma}'$), а Γ_1 и Γ_2 определяются выражением того же вида, что и (9), но с другими основными величинами:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_j\mathcal{R} = & \frac{\chi^{(j)}|d_{10}|^2}{2} (N^{(j)} + 1) \times \\ & \times (\mathcal{R}C_+^{(j)}C_-^{(j)} + C_+^{(j)}C_-^{(j)}\mathcal{R} - 2C_-^{(j)}\mathcal{R}C_+^{(j)}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\chi^{(j)}|d_{10}|^2}{2} N^{(j)} \times \\ & \times (\mathcal{R}C_-^{(j)}C_+^{(j)} + C_-^{(j)}C_+^{(j)}\mathcal{R} - 2C_+^{(j)}\mathcal{R}C_-^{(j)}) + \\ & + \frac{\chi^{(j)}d_{10}^2}{2} M^{(j)} \times \\ & \times (2C_+^{(j)}\mathcal{R}C_+^{(j)} - \mathcal{R}C_+^{(j)}C_+^{(j)} - C_+^{(j)}C_+^{(j)}\mathcal{R}) + \\ & + \frac{\chi^{(j)}d_{10}^{*2}}{2} M^{(j)*} \times \\ & \times (2C_-^{(j)}\mathcal{R}C_-^{(j)} - \mathcal{R}C_-^{(j)}C_-^{(j)} - C_-^{(j)}C_-^{(j)}\mathcal{R}), \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$C_{\pm}^{(1)} = C_{\pm} \otimes \hat{1}, \quad C_{\pm}^{(2)} = \hat{1} \otimes C_{\pm}. \quad (14)$$

Уравнения (12) и (9), (10), (13), (14) дают возможность рассматривать коллективные эффекты в системе двух атомов, связанные с взаимодействием атомов с полем общего термостата. Более широкий круг задач можно охватить, если понимать под \mathcal{H}^A не только гамильтониан системы двух изолированных покоящихся двухуровневых атомов, но и операторы взаимодействия между атомами и с внешними классическими электромагнитными полями.

3. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО АТОМА

Поскольку мы полагаем атомы не взаимодействующими друг с другом, интересно посмотреть, как выглядят кинетические уравнения для каждого из атомов. Это позволит судить об области значений параметров, в которой можно ожидать перепутывания атомных состояний при коллективном радиационном распаде.

Одночастичная матрица плотности и одночастичный релаксационный оператор определяются, как обычно, путем операции взятия шпура по состояниям второго атома $\rho = \text{Sp}_2 \mathcal{R}$, $\hat{\Gamma}\rho = \text{Sp}_2 \hat{\Gamma}\mathcal{R}$. Обозначим одночастичную матрицу плотности, которой соответствует первое пространство в тензорном произведении \otimes , через $\rho^f = \text{Sp}_l \mathcal{R}$. (Индексами f , от слова first, описываем первый атом; l , от слова last, второй атом.) Ее матричные элементы представим в виде

$$\rho_{11}^f = \mathcal{R}_{ee} + \mathcal{R}_{ff}, \quad \rho_{00}^f = \mathcal{R}_{ll} + \mathcal{R}_{gg}, \quad \rho_{10}^f = \mathcal{R}_{el} + \mathcal{R}_{fg},$$

где использованы следующие обозначения:

$$\rho_{10}^f = \langle 1|\rho^f|0\rangle \quad \text{и т. п.}, \quad R_{el} = \langle e|\mathcal{R}|l\rangle \quad \text{и т. п.},$$

$$|g\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle, \quad |e\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle,$$

$$|f\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle, \quad |l\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle.$$

Здесь $|f\rangle$ — состояние двухчастичной системы, в которой первый атом возбужден, а второй находится в основном состоянии и т. д. Нетрудно получить следующее уравнение для одноатомной матрицы плотности:

$$\frac{d\rho^f}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\rho^f, H^f] - \hat{\Gamma}^f \rho^f, \quad (15)$$

где для определенности считаем, что одночастичная матрица плотности описывает первый атом. Здесь введены следующие обозначения. Величина

$$H^f = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 C_3 + V$$

представляет собой сумму гамильтониана изолированного покоящегося двухуровневого атома с частотой перехода ω_0 и оператора взаимодействия атома с внешними частицами и полями, которые не рассмотрены и не упоминались выше (например, с классическим электромагнитным полем). Релаксационный оператор

$$\hat{\Gamma}^f = \hat{\Gamma}_1^f + \hat{\Gamma}_0^f + \hat{\Gamma}'^f$$

складывается из оператора релаксации $\hat{\Gamma}_1^f$ рассматриваемого атома из-за взаимодействия с «его» термостатом (с которым второй атом не взаимодействует), и релаксационного оператора $\hat{\Gamma}_0^f$, определяемого коллективной релаксацией системы из двух атомов в поле общего термостата. Матричные элементы упомянутых релаксационных операторов следующие:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1^f \rho_{11}^f &= \chi^{(1)} \left(N^{(1)} + 1 \right) |d_{10}|^2 \rho_{11}^f - \\ &- \chi^{(1)} N^{(1)} |d_{10}|^2 \rho_{00}^f, \\ \hat{\Gamma}_1^f \rho_{00}^f &= -\chi^{(1)} \left(N^{(1)} + 1 \right) |d_{10}|^2 \rho_{11}^f + \\ &+ \chi^{(1)} N^{(1)} |d_{10}|^2 \rho_{00}^f, \\ \hat{\Gamma}_1^f \rho_{10}^f &= \chi^{(1)} \left(N^{(1)} + \frac{1}{2} \right) |d_{10}|^2 \rho_{10}^f + \\ &+ \chi^{(1)} (d_{10})^2 M^{(1)} \rho_{10}^{f*}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_0^f \rho_{11}^f &= \chi(N+1)|d_{10}|^2 \rho_{11}^f - \chi N |d_{10}|^2 \rho_{00}^f + \\ &+ \frac{1}{2}\chi |d_{01}|^2 (\mathcal{R}_{f1} e^{-i\theta} + \mathcal{R}_{1f} e^{i\theta}), \\ \hat{\Gamma}_0^f \rho_{00}^f &= -\chi(N+1)|d_{01}|^2 \rho_{11}^f + \chi N |d_{10}|^2 \rho_{00}^f - \\ &- \frac{1}{2}\chi |d_{01}|^2 (e^{-i\theta} \mathcal{R}_{f1} + e^{i\theta} \mathcal{R}_{1f}), \\ \hat{\Gamma}_0^f \rho_{10}^f &= \chi \left(N + \frac{1}{2} \right) |d_{01}|^2 \rho_{10}^f + \chi d_{10}^2 M \rho_{10}^{f*} - \\ &- \frac{1}{2}\chi |d_{10}|^2 e^{i\theta} (\mathcal{R}_{ef} - \mathcal{R}_{lg}). \end{aligned} \quad (17)$$

Релаксационный оператор $\hat{\Gamma}_0^f$ отличается от $\hat{\Gamma}_0^f$ заменой θ на $-\theta$ и величин χ, N и M на χ', N' и M' .

Динамика только одного атома, без учета каких-либо других атомов, описывается уравнением (15) с релаксационным оператором $\hat{\Gamma}^f = \hat{\Gamma}_1^f + \hat{\Gamma}_0^f$, в котором $\hat{\Gamma}_1^f$ представляется формулами (16), а $\hat{\Gamma}_0^f$ дается выражениями (17) без слагаемых, содержащих матричные элементы двухчастичной матрицы плотности \mathcal{R} . Таким образом, несмотря на отсутствие взаимодействия между атомами, наличие общего термостата у атомов существенно меняет одноатомную динамику. Чтобы указанные отличия были наиболее заметны, необходимы следующие условия: 1) отсутствие у каждого из атомов «своего» термостата, не зависящего от других (т. е. $\hat{\Gamma}_1^f = 0$); 2) нулевая температура общего термостата (т. е. отсутствие в общем термостате фотонов $N = M = 0$).

С ростом температуры общего термостата отличия в одноатомной динамике сглаживаются, что отчетливо видно при $N \gg 1$. При этом слагаемыми в (17), содержащими матричные элементы двухчастичной матрицы плотности \mathcal{R} , можно пренебречь. Важно подчеркнуть, что наличие сжатия общего термостата при $N \gg 1$, вообще говоря, не влияет существенно на различия в одноатомной динамике. Однако при малых N можно ожидать, как обычно, существенного влияния сжатия термостата при отличных от нуля значениях фазы θ .

При наличии у каждого из атомов своего термостата в какой-то момент влияние общего термостата окажется также ничтожным.

Из сказанного следует, что весьма благоприятными условиями возникновения перепутанности в системе двух невзаимодействующих атомов является наличие только одного общего термостата при нулевой температуре. При ненулевых температурах благоприятные условия могут также появиться при наличии сжатия термостата.

4. КРИТЕРИЙ ПЕРЕСА-ХОРОДЕЦКИХ

Рассмотрим самую простую модель коллективного распада (8), (9), (5) в отсутствие в термостате фотонов, $N = M = 0$. Наряду с введенными выше матричными обозначениями будем также использовать \mathcal{R}_{ij} , где индекс i пробегает значения 1, 2, 3, 4 или g, f, l, e .

Очевидно, что ненулевые матричные элементы операторов \mathcal{C}_{\pm} равны

$$\langle f | \mathcal{C}_+ | g \rangle = \langle g | \mathcal{C}_- | f \rangle = 1,$$

$$\begin{aligned} \langle l|C_+|g\rangle &= \langle g|C_-|l\rangle^* = e^{i\theta}, \\ \langle e|C_+|f\rangle &= \langle f|C_-|e\rangle^* = e^{-i\theta}, \\ \langle e|C_+|l\rangle &= \langle l|C_-|e\rangle = 1. \end{aligned}$$

В матричном виде имеем

$$C_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_- = \begin{pmatrix} 0 & 2 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем общее решение уравнений (8), (9). Заметим, что матричные элементы операторов C_{\pm} между двухчастичным перепутанным состоянием

$$|a\rangle = 2^{-1/2} (|f\rangle - \exp(-i\theta)|l\rangle)$$

и $|g\rangle$ или $|e\rangle$ равны нулю:

$$\langle e|C_+|a\rangle = \langle g|C_-|a\rangle = 0.$$

Векторы $|a\rangle$ и

$$|s\rangle = 2^{-1/2} (|f\rangle + \exp(-i\theta)|l\rangle)$$

совместно с $|g\rangle$ и $|e\rangle$ образуют новый ортонормированный базис пространства состояний двухатомной системы. В этом базисе уравнения (8) и (9) принимают наиболее простой вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{R}_{gg}}{d\tau} &= 2\mathcal{R}_{ss}, & \frac{d\mathcal{R}_{ee}}{d\tau} &= -2\mathcal{R}_{ee}, \\ \frac{d\mathcal{R}_{ss}}{d\tau} &= 2\mathcal{R}_{ee} - 2\mathcal{R}_{ss}, & \frac{d\mathcal{R}_{aa}}{d\tau} &= \frac{d\tilde{\mathcal{R}}_{ag}}{d\tau} = 0, \\ \frac{d\tilde{\mathcal{R}}_{ae}}{d\tau} &= -\tilde{\mathcal{R}}_{ae}, & \frac{d\mathcal{R}_{sa}}{d\tau} &= -\mathcal{R}_{sa}, \\ \frac{d\tilde{\mathcal{R}}_{sg}}{d\tau} &= 2e^{i\theta}\tilde{\mathcal{R}}_{es} - \tilde{\mathcal{R}}_{sg}, & \frac{d\tilde{\mathcal{R}}_{se}}{d\tau} &= -2\tilde{\mathcal{R}}_{se}, \\ \frac{d\tilde{\mathcal{R}}_{eg}}{d\tau} &= -\tilde{\mathcal{R}}_{eg}. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь введено безразмерное время $\tau = \chi|d_{10}|^2t$, а знак тильда обозначает медленную (по сравнению с $\exp(\pm i\omega_0t)$) часть матрицы плотности, например,

$$\mathcal{R}_{sg} = \tilde{\mathcal{R}}_{sg} \exp(-i\omega_0t), \quad \mathcal{R}_{eg} = \tilde{\mathcal{R}}_{eg} \exp(-2i\omega_0t) \quad \text{и т. п.}$$

Общее решение уравнений (4) дается выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ss} &= \left(2\mathcal{R}_{ee}^{(0)}\tau + \mathcal{R}_{ss}^{(0)}\right) e^{-2\tau}, & \mathcal{R}_{ee} &= \mathcal{R}_{ee}^{(0)} e^{-2\tau}, \\ \mathcal{R}_{aa} &= \mathcal{R}_{aa}^{(0)}, \\ \mathcal{R}_{gg} &= 1 - \mathcal{R}_{aa}^{(0)} - \left\{\mathcal{R}_{ss}^{(0)} + \mathcal{R}_{ee}^{(0)}(1 + 2\tau)\right\} e^{-2\tau}, \\ \tilde{\mathcal{R}}_{ag} &= \tilde{\mathcal{R}}_{ag}^{(0)}, & \tilde{\mathcal{R}}_{ae} &= \tilde{\mathcal{R}}_{ae}^{(0)} e^{-\tau}, \\ \mathcal{R}_{sa} &= \mathcal{R}_{sa}^{(0)} e^{-\tau}, & \tilde{\mathcal{R}}_{se} &= \tilde{\mathcal{R}}_{se}^{(0)} e^{-2\tau}, \\ \tilde{\mathcal{R}}_{eg} &= \tilde{\mathcal{R}}_{eg}^{(0)} e^{-\tau}, \\ \mathcal{R}_{sg} &= \mathcal{R}_{sg}^{(0)} e^{-\tau} + 2e^{i\theta}\tilde{\mathcal{R}}_{es}^{(0)}(e^{-\tau} - e^{-2\tau}), \end{aligned} \tag{19}$$

где верхний индекс (0) отмечает начальное значение матрицы плотности. Существует очевидная связь

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ff} &= \frac{1}{2}(\mathcal{R}_{ss} + \mathcal{R}_{aa} + \mathcal{R}_{as} + \mathcal{R}_{sa}), \\ \mathcal{R}_{ll} &= \frac{1}{2}(\mathcal{R}_{ss} + \mathcal{R}_{aa} - \mathcal{R}_{as} - \mathcal{R}_{sa}), \\ \tilde{\mathcal{R}}_{el} &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} (\tilde{\mathcal{R}}_{es} - \tilde{\mathcal{R}}_{ea}), \\ \tilde{\mathcal{R}}_{ef} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\mathcal{R}}_{ea} + \tilde{\mathcal{R}}_{es}), \\ \tilde{\mathcal{R}}_{gl} &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} (\tilde{\mathcal{R}}_{gs} - \tilde{\mathcal{R}}_{ga}), \\ \tilde{\mathcal{R}}_{gf} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\mathcal{R}}_{ga} + \tilde{\mathcal{R}}_{gs}), \\ \tilde{\mathcal{R}}_{fl} &= \frac{1}{2} e^{i\theta} (\tilde{\mathcal{R}}_{as} + \tilde{\mathcal{R}}_{ss} - \mathcal{R}_{aa} - \mathcal{R}_{sa}). \end{aligned} \tag{20}$$

Выражения (19) и (20) представляют собой общее решение задачи о радиационном распаде двух неподвижных и невзаимодействующих между собой одинаковых атомов, помещенных в один и тот же термостат, действие которого на атомы описывается в марковском приближении.

Рассмотрим стационарное решение уравнений (8), (9). Ненулевые элементы двухчастичной матрицы плотности имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{gg}^{st} &= 1 - \mathcal{R}_{aa}^{(0)}, & \mathcal{R}_{ff}^{st} &= \mathcal{R}_{ll}^{st} = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{aa}^{(0)}, \\ \tilde{\mathcal{R}}_{gl}^{st} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}\tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)}, & \tilde{\mathcal{R}}_{gf}^{st} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)}, \\ \tilde{\mathcal{R}}_{fl}^{st} &= -\frac{1}{2} e^{i\theta}\tilde{\mathcal{R}}_{aa}^{(0)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Чтобы определить, является ли стационарное решение (21) перепутанным, воспользуемся критерием Переса–Хородецких [20, 21], который состоит в следующем. Берется двухчастичная матрица плотности, транспонированная по индексам одного из ато-

мов, например, второго. Будем называть такую матрицу матрицей Переса–Хородецких. Необходимым условием факторизуемости матрицы плотности является положительность всех ее собственных значений. Для перепутанных состояний хотя бы одно собственное значение такой матрицы плотности отрицательно. Например, для перепутанных состояний

$|s\rangle$ и $|a\rangle$ обсуждаемое отрицательное собственное значение равно $-1/2$. Значение отрицательного собственного значения матрицы Переса–Хородецких можно рассматривать как характеристику перепутанного состояния. Стационарная матрица Переса–Хородецких имеет вид

$$\mathcal{R}^{P-H st} = \begin{pmatrix} 1 - \mathcal{R}_{aa}^{(0)} & \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)} & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} \tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)*} & -\frac{1}{2} e^{-i\theta} \mathcal{R}_{aa}^{(0)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)*} & \frac{1}{2} \mathcal{R}_{aa}^{(0)} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)} & 0 & \frac{1}{2} \mathcal{R}_{aa}^{(0)} & 0 \\ -\frac{1}{2} e^{i\theta} \tilde{\mathcal{R}}_{aa}^{(0)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения определяются из уравнений

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{aa}^{(0)}, \quad 4\lambda \left\{ \left(\lambda - \frac{1}{2} \mathcal{R}_{aa}^{(0)} \right) \left(1 - \mathcal{R}_{aa}^{(0)} - \lambda \right) + \left| \tilde{\mathcal{R}}_{ga}^{(0)} \right|^2 \right\} + \left(\lambda - \frac{1}{2} \mathcal{R}_{aa}^{(0)} \right) \mathcal{R}_{aa}^{(0)2}. \quad (22)$$

Исследование уравнения (22) показывает, что существуют области параметров, где одно из собственных значений матрицы Переса–Хородецких отрицательно. Обсуждать возможность перепутывания атомных состояний имеет смысл лишь для начальных условий, которые соответствуют факторизованной двухатомной матрице плотности $\mathcal{R}^{(0)} = \rho^f{}^{(0)} \otimes \rho^l{}^{(0)}$.

Рассмотрим сначала случай чистых атомных состояний, для которых одноатомные матрицы плотности можно представить в виде

$$\rho^f{}^{(0)} = \frac{|0\rangle\langle 0| + \alpha_f^* |0\rangle\langle 1| + |\alpha_f| |1\rangle\langle 0| + |\alpha_f|^2 |1\rangle\langle 1|}{1 + |\alpha_f|^2}, \quad (23)$$

$$\rho^l{}^{(0)} = \frac{|0\rangle\langle 0| + \alpha_l^* |0\rangle\langle 1| + |\alpha_l| |1\rangle\langle 0| + |\alpha_l|^2 |1\rangle\langle 1|}{1 + |\alpha_l|^2}.$$

Тогда

$$\mathcal{R}_{aa}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\mathcal{R}_{ff}^{(0)} + \mathcal{R}_{ll}^{(0)} - e^{i\theta} \mathcal{R}_{lf}^{(0)} - e^{-i\theta} \mathcal{R}_{fl}^{(0)} \right) = \frac{|\alpha_f - \alpha_l e^{i\theta}|}{2(1 + |\alpha_f|^2)(1 + |\alpha_l|^2)} \equiv 2a,$$

$$|\mathcal{R}_{ag}^{(0)}|^2 = \frac{1}{2} \left| \mathcal{R}_{fg}^{(0)} - e^{i\theta} \mathcal{R}_{lg}^{(0)} \right|^2 = \frac{|\alpha_f - \alpha_l e^{i\theta}|^2}{2(1 + |\alpha_f|^2)^2(1 + |\alpha_l|^2)^2} = 2a\beta,$$

$$\beta^{-1} = (1 + |\alpha_f|^2)(1 + |\alpha_l|^2),$$

и второе уравнение (22) можно записать как

$$\lambda^3 + \lambda^2(a - 1) - \lambda a(3a - 1 + 2\beta) + a^3 = 0,$$

где параметр a изменяется от нуля (для одинаковых начальных атомных состояний и $\theta = 0$) до $1/4$ (для $\alpha_f = -\alpha_l^{-1} \exp(i\theta)$, а также при всех $|\alpha_f| \gg 1 \gg |\alpha_l|$ и наоборот, $|\alpha_f| \ll 1 \ll |\alpha_l|$), а $0 < \beta < 1$.

Для различных начальных чистых квантовых атомных состояний одно из собственных значений, которое обозначим λ_- , становится отрицательным. Это отрицательное значение тем меньше, чем больше значения параметров a и β . Для $a = 1/4$ и $\alpha_f = -\alpha_l^{-1} \exp(i\theta)$ параметр β принимает максимальное значение $1/4$ при $|\alpha_f| = 1$. При этом получаем минимальное значение $\lambda_- \approx -0.17$. Таким образом, в атомной системе возникает стационарное перепутывание, причем во время коллективного распада параметр λ_- монотонно убывает. Интересная ситуация возникает, когда один из атомов заселяет нижний уровень. Распад второго атома приводит к возбуждению первого атома и возникновению перепутывания в этой системе двух атомов.

В зависимости от начальных условий и набега фазы θ стационарного перепутывания может и не быть, например, для одинаковых состояний и при $\theta = 0$. Однако в процессе коллективного распада атомные состояния все же немного перепутываются. Для рассмотренного выше случая минимальное значение $\lambda_- \approx -0.026$.

Рассмотрим теперь случай смешанных начальных атомных состояний. Пусть

$$\rho^{f(0)} = \begin{pmatrix} n_0 & p^* \\ p & 1 - n_0 \end{pmatrix}, \quad \rho^{l(0)} = \begin{pmatrix} m_0 & q^* \\ q & 1 - m_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть атомы не поляризованы, $p = q = 0$. Тогда $\mathcal{R}_{ag}^{(0)} = 0$ и у собственных значений матрицы Переса-Хородецких всегда есть значение

$$\lambda_- = \frac{1}{2} \left(1 - 2a - \sqrt{1 - 4a + 8a^2} \right),$$

$$a = \frac{1}{4} \{ (1 - n_0)m_0 + n_0(1 - m_0) \},$$

которое всегда отрицательно, за исключением случаев, когда оба атома заселяют либо верхний, либо нижний уровень. Минимальное значение $\lambda_- \approx -0.1$ определяется максимально возможным значением $a = 1/4$. В этом случае один атом не возбужден, а другой заселяет верхний уровень, и атомы находятся в чистом состоянии.

Радиационный распад двух атомов в общем термостате приводит также к возникновению атомных корреляций при отсутствии перепутывания. Примером служит распад возбужденного атомного состояния [1]. В случае одноатомной системы имеем обычный радиационный распад

$$\rho_{10}^f = 0, \quad \rho_{11}^f = e^{-\tau}, \quad \rho_{00}^f = 1 - e^{-\tau}. \quad (24)$$

Коллективный распад двух возбужденных атомов описывается выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ss} &= 2\tau e^{-2\tau}, & \mathcal{R}_{ee} &= e^{-2\tau}, \\ \mathcal{R}_{gg} &= 1 - (1 + 2\tau)e^{-2\tau}, \\ \mathcal{R}_{ag} &= \mathcal{R}_{aa} = \mathcal{R}_{ae} = \mathcal{R}_{sa} = \\ &= \mathcal{R}_{se} = \mathcal{R}_{eg} = \mathcal{R}_{sg} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

или в переменных g, f, l, e :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ff} &= \mathcal{R}_{ll} = \tau e^{-2\tau}, & \mathcal{R}_{fl} &= e^{i\theta} \tau e^{-2\tau}, \\ \mathcal{R}_{ef} &= \mathcal{R}_{el} = \mathcal{R}_{gl} = \mathcal{R}_{gf} = 0. \end{aligned}$$

Здесь в качестве начального условия считалось, что оба атома находились на возбужденном уровне (отличен от нуля только матричный элемент $R_{ee}^{(0)} = 1$). При этом одночастичная матрица плотности каждого атома эволюционирует по закону:

$$\begin{aligned} \rho_{11}^f &= e^{-2\tau} (1 + \tau), & \rho_{00}^f &= 1 - (1 + \tau)e^{-2\tau}, \\ \rho_{10}^f &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно критерию Переса-Хородецких, состояние (25) не является перепутанным, хотя уравнение

для одночастичной матрицы плотности не замкнуто и управляется динамикой двухчастичной матрицы плотности:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} \rho_{11}^f &= \rho_{11}^f + \frac{1}{2} (\mathcal{R}_{fl} e^{-i\theta} + \mathcal{R}_{lf} e^{i\theta}), \\ \hat{\Gamma} \rho_{00}^f &= -\rho_{11}^f - (e^{-i\theta} \mathcal{R}_{fl} + e^{i\theta} \mathcal{R}_{lf}), \\ \hat{\Gamma} \rho_{10}^f &= \rho_{10}^f - \frac{1}{2} e^{i\theta} (\mathcal{R}_{ef} - \mathcal{R}_{lg}). \end{aligned}$$

5. ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ НА ПЕРЕПУТЫВАНИЕ

Проведенный анализ показывает, что в модели коллективного радиационного распада в поле термостата при нулевой температуре почти всегда происходит эффективное перепутывание атомных состояний. Обсудим теперь факторы, препятствующие такому перепутыванию.

Согласно (17), с увеличением плотности фотонов в термостате стационарное перепутывание должно исчезнуть независимо от степени сжатия термостата. На рис. 1 представлена зависимость минимального собственного значения λ_- матрицы Переса-Хородецких от плотности числа фотонов общего термостата для нулевого и максимального сжатия при различных значениях сдвига фазы $\theta = 0$

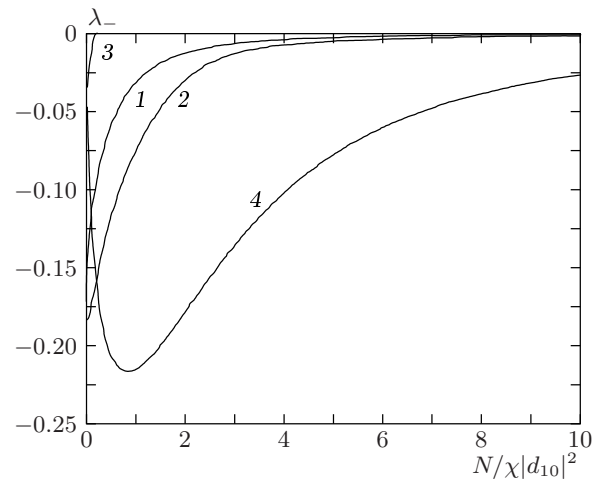


Рис. 1. Зависимость минимального собственного значения матрицы Переса-Хородецких от плотности фотонов. Кривые 1 и 2 отвечают сдвигу фазы $\theta = 0$ и сжатию, соответственно, $|M| = 0$ и $|M| = \sqrt{N(N+1)}$, кривые 3 и 4 — сдвигу фазы $\theta = \pi/2$ и сжатию $|M| = 0$ и $|M| = \sqrt{N(N+1)}$. Начальные атомные состояния взяты в виде (23) с $\alpha_f = -\alpha_l$

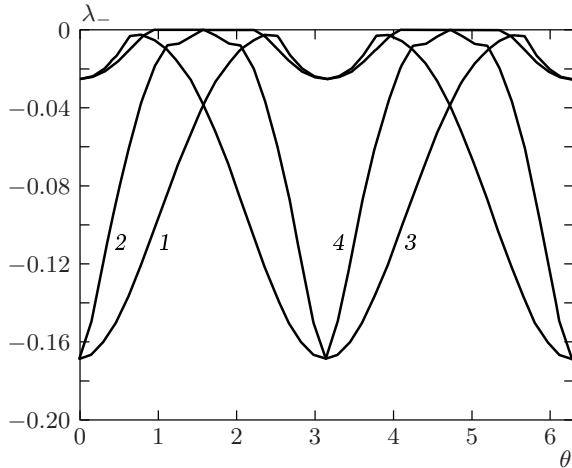


Рис. 2. Зависимость минимального собственного значения матрицы Переса–Хородецких от сдвига фазы для однонаправленной (1, 3) и одномерной (2, 4) моделей при нулевой температуре. Кривые соответствуют начальным состояниям в виде (23) с $\alpha_f = -\alpha_l = 1$ (1 и 2), $\alpha_f = \alpha_l = 1$ (3 и 4)

и $\theta = \pi/2$. Видно, что максимальное сжатие термостата при малом значении плотности фотонов увеличивает степень перепутывания при сдвиге фазы на $\theta = \pi/2$.

Зависимость λ_- от сдвига фазы представлена на рис. 2. Видно, что однонаправленная и одномерная модели дают одни и те же экстремальные значения λ_- . Это выполняется и для случая, когда у атомов разные константы связи для волн, распространяющихся в разных направлениях. Таким образом, результаты численного моделирования показывают, что экстремальные значения λ_- слабо зависят от того, является ли модель термостата однонаправленной или одномерной, и позволяют предположить, что однонаправленная модель (совпадающая при $\theta = 0$ с трехмерной моделью) служит хорошей абстракцией для исследования атомного перепутывания в различных условиях, в том числе и при одновременном действии нескольких независимых термостатов в условиях различных резонансных воздействий на атомы когерентными полями.

Следует отметить, что для одномерной модели отклонение фазы от нулевого значения приводит к разрушению стационарного перепутывания, однако скорость этого процесса существенно меньше скорости выхода на стационарное значение при нулевом значении фазы.

Что касается роли независимых термостатов, каждый из которых действует только на один из ато-

мов, нетрудно видеть из (16), что они разрушают любое стационарное перепутывание в системе атомов, в том числе и в случае, когда начальное состояние атомов является перепутанным. Во временной динамике также может возникать перепутывание в атомной системе в условиях действия на атомы независимых термостатов. Как показывают численные расчеты, интересная зависимость минимальных собственных значений матрицы Переса–Хородецких от константы связи атома со «своим термостатом» имеет место в случае действия на атомы только одного «своего» термостата. Для начальных условий (23) при $\alpha_f = -\alpha_l = 1$ и отсутствии сжатия как у общего, так и «своего» термостатов, зависимость λ_- от $\chi^{(1)}$ очень похожа на кривую 4 рис. 1.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Напомним, что для выявления роли общего термостата в перепутывании атомных состояний в статье исключены из рассмотрения диполь-дипольное взаимодействие между атомами за счет продольного электрического поля, эффективное при малых межатомных расстояниях, и любое другое межатомное взаимодействие. Сам термостат описывается квантовым винеровским процессом, не зависящим от состояния атомов. Поэтому обратное влияние на атомы процессов испускания квантов атомами и их поглощения также исключено. Взаимодействие атомов с общим термостатом определяется операторами типа (5), имеющими определенный тип симметрии по отношению к перестановкам атомов. В то же время среди двухатомных состояний имеется как минимум два различных по отношению к перестановкам атомов типа состояний ($|s\rangle$ и $|a\rangle$), которые по-разному участвуют в релаксационной динамике. В простейшем случае один тип состояний ($|a\rangle$) эволюционирует унитарным образом, в то время как динамика второго типа ($|s\rangle$) не унитарна. В результате нарушается баланс представления перепутанного начального состояния через базисные векторы $|s\rangle$ и $|a\rangle$ перепутанного базиса. Поэтому через некоторое время атомные состояния оказываются перепутанными. Таким образом, роль общего термостата в перепутывании сводится к обеспечению существенно разной динамики атомных состояний, различающихся типом симметрии по отношению к атомным перестановкам. Состояния $|a\rangle$ и рассмотренная ситуация дают простую физическую реализацию так называемых Decoherence Free Subspaces [26], широко обсуж-

даемых в последнее время в квантовой теории информации.

Различная (в указанном смысле) динамика может заключаться не только в унитарности и неунитарности эволюции атомных состояний перепутанного базиса, но и в разной скорости их затухания при общей не унитарной эволюции. Распад двух атомов, первоначально заселяющих верхний возбужденный уровень, не приводит к перепутыванию атомных состояний, поскольку начальные состояния характеризуются лишь одним типом симметрии по отношению к перестановке атомов. Также и взаимодействие атомов с одной модой квантованного электромагнитного поля при отсутствии каких-либо релаксационных каналов не должно приводить к перепутыванию атомных состояний, поскольку динамика атомных состояний разной симметрии будет унитарной. Однако этот вопрос нуждается в дополнительных исследованиях.

На результаты данной работы можно взглянуть и иначе. Возникновение стационарного перепутывания означает, что в рассматриваемой модели коллективный радиационный распад произвольного начального состояния не приводит к установлению термодинамического равновесия, если под термодинамически равновесным состоянием понимать стационарное состояние модели в случае одного атома. Наиболее отчетливо это видно для нулевой температуры и однонаправленной модели. С другой стороны, наличие независимых термостатов и сколь угодно малых констант связи с ними приводит к разрушению стационарного перепутывания и к установлению термодинамического равновесия в системе только за счет радиационных процессов. По мнению автора это свидетельствует в пользу такой марковской модели радиационного распада, в которой наряду с коллективным термостатом существуют и независимые термостаты, как (12), (13). Представляется справедливым и обратное утверждение, что в исследованиях перепутывания атомов вследствие каких-либо иных причин, например, диполь-дипольного взаимодействия атомов, наряду с учетом релаксации отдельного атома вследствие взаимодействия со своим термостатом, как, например, в работах [15–17], необходим учет и коллективной релаксации, которая, согласно выводам данной работы, обуславливает свой механизм перепутывания атомных состояний.

В заключение отметим, что вывод данной работы о перепутывании атомных состояний согласуется с недавними результатами об увеличении информационной емкости квантовых каналов связи

в условиях действия на них коррелированных шумов [27], если под квантовым каналом понимать одноатомную динамику.

Автор выражает благодарность В. Н. Горбачеву и А. И. Маймистову за полезные дискуссии. Работа частично поддержана РФФИ (проект 00-02-17803).

ЛИТЕРАТУРА

1. C. W. Gardiner, *Quantum Noise*, Springer, Berlin (1991).
2. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2000).
3. М. Б. Менский, *Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология*, Физматлит, Москва (2001).
4. D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer et al., *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, Springer, Berlin (1996).
5. S. Bose, I. Fuentes-Guridi, P. L. Knight, and V. Vedral, E-print archives, quant-ph/0103063.
6. C. Simon and J. Kempe, E-print archives, quant-ph/0109102.
7. D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer, Berlin (1995).
8. С. Я. Килин, УФН **169**, 507 (1999).
9. И. В. Баргатин, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, УФН **171**, 625 (2001).
10. C. P. Yang and G. C. Guo, *Physica A* **273**, 352 (1999).
11. G. C. Guo and C. P. Yang, *Physica A* **260**, 173 (1998).
12. В. Н. Горбачев, А. И. Жилиба, А. И. Трубилко, Изв. РАН, сер. физ. **66**, 345 (2002).
13. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).
14. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov, and E. D. Trifonov, *Super-radiance: Multiatomic Coherent Emission*, IOP, Bristol and Philadelphia (1996).
15. G. K. Brennen, C. M. Caves, P. S. Jessen, I. H. Deutsch, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1060 (1999).
16. A. Beige, S. F. Huelga, P. L. Knight, M. B. Plenio, R. C. Thompson, *J. Mod. Opt.* **47**, 401 (2000).

17. I. V. Bargatin, B. A. Grishanin, and V. N. Zadkov, *Fortschr. Phys.* **48**, 637 (2000).
18. L. M. Duan, J. I. Cirac, P. Zoller, and E. S. Polzik, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5643 (2000).
19. B. Julsgaard, A. Kozhekin, and E. S. Polzik, E-print archives, quant-ph/0106057.
20. A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996).
21. M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, *Phys. Lett. A* **223**, 1 (1996).
22. В. И. Рупасов, *ЖЭТФ* **83**, 1711 (1982).
23. В. И. Юдсон, *ЖЭТФ* **88**, 1757 (1985).
24. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Academic, Dordrecht (1999), Appendix 1.
25. G. Lindblad, *Comm. Math. Phys.* **48**, 119 (1976).
26. D. A. Lidar, I. L. Chuang, and K. B. Whaley, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2594 (1998).
27. C. Macchiavello and G. M. Palma, E-print archives, quant-ph/0107052.