

# ЭФФЕКТ ШВИНГЕРА И ВОЗМОЖНОСТИ ЕГО НАБЛЮДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОПТИЧЕСКИХ И РЕНТГЕНОВСКИХ ЛАЗЕРОВ

*В. С. Попов*

*Институт теоретической и экспериментальной физики  
117218, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 декабря 2001 г.

Рассчитана вероятность  $W$  рождения  $e^+e^-$ -пар из вакуума под действием интенсивного переменного электрического поля, создаваемого с помощью мощных лазеров оптического или рентгеновского диапазона. Рассмотрены две характерные области:  $\gamma \ll 1$  и  $\gamma \gg 1$ , где  $\gamma$  — параметр адиабатичности, и показано, что с ростом  $\gamma$  вероятность  $W$  резко возрастает (при одном и том же значении напряженности поля  $F$ ). Подробно обсуждается зависимость вероятности  $W$  и импульсного спектра электронов и позитронов от формы лазерного импульса. Проведены численные расчеты для случая лазерного импульса с гауссовой огибающей, а также для некоторых импульсных полей.

PACS: 12.20.Fv, 42.55.Vc

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая электродинамика (КЭД) предсказывает возможность рождения электрон-позитронных ( $e^+e^-$ ) пар из вакуума под действием сильного электрического поля [1]. Этот нелинейный эффект, выходящий за рамки теории возмущений и вначале рассматривавшийся для статического поля, был исследован теоретически также для переменных во времени полей электрического типа, т. е. при выполнении условий

$$J_1 = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) < 0,$$

$$J_2 = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 0,$$

где  $J_1$  и  $J_2$  — инварианты электромагнитного поля. В частности, подробно рассматривалось пространственно-однородное поле

$$\mathcal{E}(t') = \{F\varphi(t), 0, 0\}, \quad \mathbf{B}(t') = 0 \quad (1)$$

в случае  $\varphi(t) = \cos t$  [2–10]. Такое поле может быть реализовано в пучности стоячей световой волны, возникающей при сложении двух когерентных лазерных пучков<sup>1)</sup>. В (1)  $t'$  — время,  $t = \omega t'$  — безраз-

<sup>1)</sup> Плоская волна произвольной интенсивности и спектрального состава имеет инварианты  $J_1 = J_2 = 0$  и пар в вакууме не образует [1].

мерное время,  $F$  — амплитудное значение электрического поля,  $\omega$  — его характерная частота, а функция  $\varphi(t)$  задает форму лазерного импульса. Далее мы примем, что  $\varphi$  — аналитическая функция от  $t^2$ ,  $\varphi(-t) = \varphi(t)$ , причем всюду на вещественной оси  $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$  (т. е.  $t = 0$  — момент максимума поля, когда  $e^+$  и  $e^-$  выходят из-под барьера [3]). Примерами таких полей являются  $\varphi(t) = \cos t$ ,  $1/\text{ch}^2 t$ ,  $\exp(-t^2)$  и т. д.

Этот процесс (будем называть его швингеровским механизмом рождения пар) имеет принципиальное значение для КЭД и для квантовой теории поля вообще<sup>2)</sup>. Проведенные ранее оценки [4, 25, 26] показали, однако, что нельзя было рассчитывать на его наблюдение с имевшимися в то время оптическими лазерами. Поэтому обычно считалось, что результаты работ [1–8] представляют чисто теоретический интерес для КЭД.

<sup>2)</sup> Процессы, аналогичные швингеровскому рождению пар, встречаются в различных областях современной физики, например в теории квантового испарения черных дыр [11, 12], при рассмотрении ранних стадий эволюции Вселенной [13, 14], в теории многофотонной ионизации полупроводников [15] и т. д. Близким по физике процессом является спонтанное рождение позитронов в электрическом поле сверхтяжелого ядра с зарядом  $Z > Z_{cr}$  [16–19] ( $Z_{cr} \approx 170$  для сферического ядра) или при адиабатическом сближении двух тяжелых ядер с  $Z_1 + Z_2 > Z_{cr}$  [17–22]. Относительно современного состояния этой проблемы см., например, [23, 24].

В последнее время, однако, ситуация меняется. Во-первых, мощности оптических и инфракрасных лазеров возросли на много порядков (уже достигнуты поля, на один-два порядка превышающие характерное атомное поле  $F_a \approx 5.14 \cdot 10^9$  В/см [27, 28]). Во-вторых, разрабатываются (см., например, [10, 29]) проекты создания рентгеновских лазеров на свободных электронах на электрон-позитронном коллайдере TESLA в DESY, а также соответствующие устройства в SLAC, в которых предполагается получить когерентные пучки фотонов с энергией порядка нескольких килоэлектронвольт. В виду этого необходимо более подробно рассмотреть теорию эффекта Швингера с учетом новых экспериментальных возможностей, чему посвящены недавно появившиеся работы Рингвальда [10], а также [30].

Здесь мы продолжим обсуждение этого круга вопросов. Кратко опишем содержание статьи. В разделах 2 и 3 вычислены вероятности  $W$  рождения  $e^+e^-$ -пар из вакуума для лазеров инфракрасного, оптического и рентгеновского диапазонов. Обсуждаются два предельных режима:  $\gamma \ll 1$  и  $\gamma \gg 1$ , где  $\gamma$  — параметр адиабатичности<sup>3)</sup>:

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_t} = \frac{mc\omega}{eF} = \frac{\hbar\omega}{eF\lambda_e} \quad (2)$$

(здесь  $\omega_t$  — частота туннелирования электрона через щель  $2mc^2$  между нижним и верхним континуумами в электрическом поле  $F$  [3, 8]). Рассчитана зависимость вероятности  $W$  от амплитуды поля  $F$  и частоты  $\omega$  для различных типов лазеров (как известных, так и проектируемых в настоящее время). В разд. 4 рассмотрена зависимость вероятности  $W$  и импульсного спектра образующихся  $e^+$  и  $e^-$  от вида функции  $\varphi(t)$  в (1), т. е. от формы лазерного импульса. Показано, что при уменьшении длительности импульса вероятность  $W$  резко возрастает, особенно в области  $\gamma \gg 1$  (т. е. при  $\omega \gg \omega_t$ ). Приведены результаты численных расчетов для лазерного импульса с гауссовской огибающей и рассмотрен вид импульсного спектра  $e^\pm$  в адиабатической области  $\gamma \ll 1$ , а также при  $\gamma \gg 1$ . В заключительном разд. 5 дано обсуждение полученных результатов. В Приложения вынесены детали вычислений и некоторые вспомогательные формулы.

<sup>3)</sup> Введен в работах [2, 3]. Отметим, что он характеризует динамику процесса туннелирования частицы через меняющийся во времени барьер и аналогичен известному параметру Келдыша в теории многофотонной ионизации атомов и ионов лазерным излучением [15].

В статье используются следующие обозначения:  $\epsilon = F/F_{cr}$  — приведенное электрическое поле;  $F_{cr} = m^2c^3/e\hbar \approx 1.32 \cdot 10^{16}$  В/см — «критическое», или швингеровское [1], поле в КЭД ( $eF_{cr}\lambda_e = mc^2$ );  $F_a = m^2e^5/\hbar^4 = \alpha^3 F_{cr}$  — атомное поле,  $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ ;  $K_0 = 2mc^2/\hbar\omega = \lambda/\pi\lambda_e$  — параметр многоквантовости процесса,  $\lambda = 2\pi c/\omega$  — длина волны лазерного излучения,  $\lambda_e = \hbar/mc = 386$  Фм;  $m$  — масса электрона и, как правило,  $\hbar = c = 1$  (при этом  $\gamma = 2/K_0\epsilon$ ). Далее предполагается выполнение условий  $\epsilon \ll 1$  и  $K_0 \gg 1$ , обеспечивающих применимость квазиклассического приближения в данной задаче.

Результаты данной работы частично анонсированы в [31].

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вначале рассмотрим монохроматическое лазерное поле:  $\varphi(t) = \cos t$ . Используя метод мнимого времени [3] для описания подбарьерного движения электрона в релятивистском случае (между границами нижнего и верхнего континуумов), можно показать, что вероятность рождения пары из вакуума в состоянии с импульсами  $\pm \mathbf{p}$  у  $e^\pm$  с точностью до предэкспоненты [2–4] равна

$$w(\mathbf{p}) = \frac{d^3W}{d^3p} \propto \exp \left\{ -\frac{\pi}{\epsilon} \left[ \tilde{g}(\gamma) + \tilde{b}_1(\gamma) \frac{p_{\parallel}^2}{m^2} + \tilde{b}_2(\gamma) \frac{p_{\perp}^2}{m^2} \right] \right\}, \quad (3)$$

где функция  $\tilde{g}(\gamma)$  и коэффициенты  $\tilde{b}_{1,2}(\gamma)$  импульсного спектра при  $\gamma \gtrsim 1$  существенно зависят от формы импульса (1) — см. ниже разд. 4, причем  $\tilde{g}(0) = \tilde{b}_2(0) = 1$ , а  $\tilde{b}_1(\gamma) \propto \gamma^2$  при  $\gamma \rightarrow 0$  (здесь означает, что эти функции относятся к процессу рождения пар, в отличие от аналогичных функций  $g(\gamma)$  и  $b_{1,2}(\gamma)$  в теории многофотонной ионизации атомов [32]). Различие между  $g(\gamma)$  и  $\tilde{g}(\gamma)$  и т. д. связано с различным видом закона дисперсии  $E(\mathbf{p})$  для электрона в подбарьерном движении (кроме того, параметр  $\gamma$  для этих двух процессов имеет разный порядок величины). Полная вероятность  $W$ , рассчитанная на инвариантный комптоновский 4-объем  $\lambda_e^4/c = m^{-4} \approx 7.25 \cdot 10^{-53}$  см<sup>3</sup>·с, получается интегрированием (3) по  $d^3p$  с учетом закона сохранения энергии при  $n$ -фотонном поглощении. Соответствующие формулы (достаточно громоздкие) приведены в работе [4] и могут быть использованы для численных расчетов.

Эти формулы, однако, значительно упрощаются<sup>4)</sup> при  $\gamma \ll 1$  и  $\gamma \gg 1$ . В первом случае (низкая частота  $\omega$ , сильное электрическое поле) спектр значений  $n\omega$  практически непрерывный и

$$W = \frac{m^4}{2^{3/2}\pi^4} \epsilon^{5/2} \exp \left\{ -\frac{\pi}{\epsilon} \tilde{g}(\gamma) \right\}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\gamma) &= 1 - \frac{1}{8}\gamma^2 + \frac{3}{64}\gamma^4 + \dots, \\ \tilde{b}_1 &= \frac{1}{2}\gamma^2 \left( 1 - \frac{9}{8}\gamma^2 + \dots \right), \quad \tilde{b}_2 = 1 - \frac{1}{4}\gamma^2 \end{aligned} \quad (4')$$

(по сравнению со случаем постоянного поля, предэкспонента в (4) содержит малый множитель, пропорциональный  $\sqrt{\epsilon}$ , происхождение которого обсуждается в Приложении А). Можно вычислить и следующие коэффициенты этих разложений, см. Приложение В.

Считая, что максимальное электрическое поле  $F$  достигается при фокусировке лазерного излучения в объеме  $\Delta V = \lambda^3$  (дифракционный предел), а длительность импульса равна  $T$ , находим полное число  $e^+e^-$ -пар, рожденных из вакуума:

$$N(T) = 0.354K_0^4 \epsilon^{5/2} \times \exp \left\{ -\frac{\pi}{\epsilon} \left[ 1 - \frac{1}{2(K_0\epsilon)^2} \right] \right\} N', \quad (5)$$

если лазерный импульс охватывает  $N' = \omega T/2\pi$  периодов поля. Для скорости образования пар (в объеме  $\lambda^3$ ) получаем

$$\frac{dN}{dt} [c^{-1}] = 4.34 \cdot 10^{19} (K_0\sqrt{\epsilon})^3 \exp \left( -\frac{\pi}{\epsilon} \right), \quad (6)$$

$\gamma \ll 1$ .

В другом предельном случае,  $\gamma \gg 1$ , имеем

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\gamma) &= \frac{4}{\pi\gamma} \left[ \ln \gamma + c_0 + \frac{\ln \gamma}{4\gamma^2} + \dots \right], \\ \tilde{b}_1(\gamma) &= \frac{2}{\pi\gamma} \left[ \left( 1 - \frac{3}{4\gamma^2} \right) \ln \gamma + c_1 \right], \\ \tilde{b}_2 &= \frac{2}{\pi\gamma} \left[ \left( 1 - \frac{1}{4\gamma^2} \right) \ln \gamma + c_2 \right], \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>4)</sup> См. уравнения (20), (21) и (П.12) в [4] соответственно для  $\gamma \ll 1$  и  $\gamma \gg 1$ . Формулы, используемые Рингвальдом (см. (18) в [10]), при  $\gamma \ll 1$  полностью совпадают с (4), а в случае  $\gamma \gg 1$  их отличие от (8) состоит только в численном множителе  $2/\sqrt{\pi} \approx 1.13$  несущественном для дальнейших оценок.

$c_0 = c_1 = 2 \ln 2 - 1 \approx 0.386$ ,  $c_2 = 2 \ln 2$ , а вероятность образования пар представляется в виде суммы вероятностей  $n$ -фотонных процессов:

$$W = \sum_n w_n, \quad (8)$$

$$w_n = \frac{2}{\pi^3} m^4 K_0^{-5/2} \left( \frac{e}{4\gamma} \right)^{2n} q(n - K_0),$$

где  $n > K_0 = 2m/\omega$ ,  $e = 2.718 \dots$  и

$$q(x) = \frac{1}{2} e^{-2x} \int_0^{2x} \frac{e^t dt}{\sqrt{t}} \approx \begin{cases} \sqrt{2x} \left( 1 - \frac{4}{3}x + \dots \right), & x \rightarrow 0, \\ \frac{1}{\sqrt{8x}} \left( 1 + \frac{1}{4x} + \dots \right), & x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Поскольку в этом случае вероятности  $w_n$  быстро убывают с ростом  $n$ , а  $q(x)$  — вялая функция порядка единицы (ее максимальное значение равно 0.541 и достигается при  $x = x_m \approx 0.427$ , см. [33, с. 121]), то из (8) следуют оценки

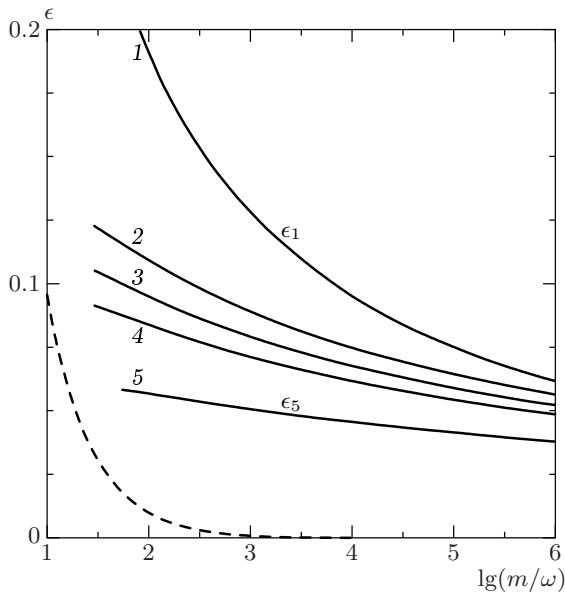
$$W \approx \frac{m^4}{2^{3/2}\pi^3} \left( \frac{\omega}{m} \right)^{5/2} \left( \frac{4\gamma}{e} \right)^{-2K_0}, \quad \gamma \gg 1, \quad (9)$$

$$N(T) \approx 2\pi K_0^{3/2} \exp \left( -2K_0 \ln \frac{4\gamma}{e} \right) N', \quad (10)$$

где  $N'$  имеет тот же смысл, что и в (5). Сравнение формул (5) и (10) показывает, что (при одном и том же значении электрического поля  $F$ ) вероятность рождения пар в случае  $\gamma \gg 1$  на много порядков больше, чем в адиабатической области  $\gamma \ll 1$  (то же имеет место и для многофотонной ионизации атомов [15, 32] и вообще при туннелировании частиц через колеблющийся барьер, если частота его колебаний  $\omega \gg \omega_t$ ). При значениях  $\gamma \sim 1$  выражения (5) и (10) сшиваются между собой по порядку величины.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Перейдем к численным оценкам. На рис. 1 показаны значения приведенного электрического поля  $\epsilon$ , отвечающие рождению одной  $e^+e^-$ -пары в объеме  $\Delta V = \lambda^3$ , для нескольких длительностей лазерного импульса: от  $T = 2\pi/\omega$  (кривая 1, за один период поля) до  $T = 1$  с (кривая 5). Для оптических лазеров эти значения довольно близки друг к другу, но различие между ними резко возрастает с ростом



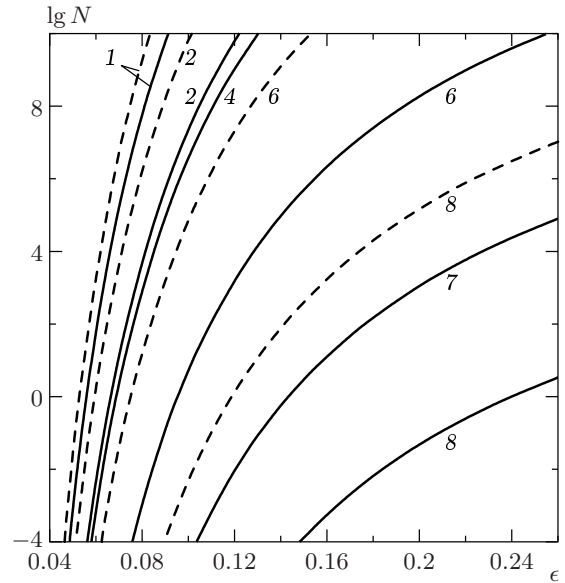
**Рис. 1.** Приведенное электрическое поле  $\epsilon = F/F_{cr}$ , необходимое для рождения одной электрон-позитронной пары в объеме  $\Delta V = \lambda^3$  за время  $T$ . Сплошным кривым соответствуют следующие значения длительности импульса: один период поля  $T = 2\pi/\omega$  ( $\epsilon_1$ , кривая 1),  $T = 10^{-12}$ ,  $10^{-10}$ ,  $10^{-8}$  и 1 с (соответственно кривые 2–5). Область адиабатичности расположена выше штриховой кривой, для которой  $\gamma = 1$

частоты  $\omega$ , если  $\hbar\omega \gtrsim 1$  кэВ. Это согласуется с вытекающими из (5) и (10) оценками ( $K_0 \gg 1$ )

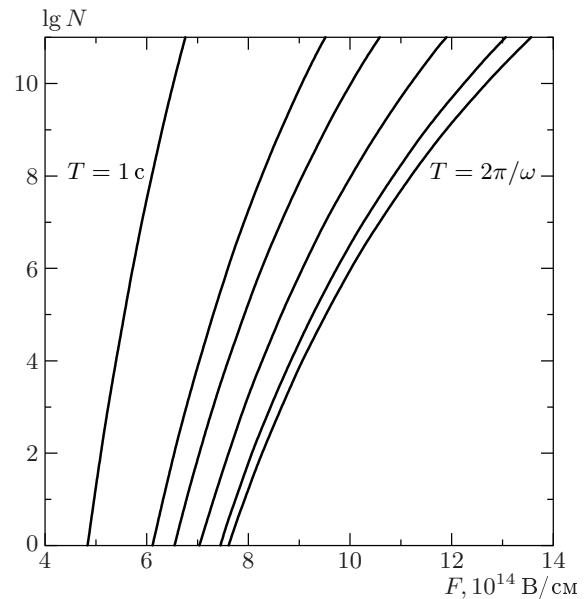
$$\epsilon_1 \sim \frac{\pi}{4 \ln K_0}, \quad \epsilon_5 \sim \frac{\pi}{3(\ln K_0 + 15)},$$

где значения  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_5$  отвечают кривым 1 и 5. Штриховая кривая на этом рисунке отвечает значению  $\gamma = 1$ , причем для всех точек, лежащих выше этой кривой, параметр адиабатичности  $\gamma < 1$ .

На рис. 2–4 дано полное число пар (в объеме  $\lambda^3$ ) в зависимости от напряженности электрического поля; номера кривых на рис. 2 соответствуют значениям энергии квантов, приведенным в табл. 1. Как видно из этих рисунков, с ростом напряженности поля  $F$  число пар возрастает столь быстро (особенно в случае  $\lambda \gtrsim 1$  мкм), что можно говорить о «лазерном пробое вакуума» [4]. При фиксированном  $F$  число пар увеличивается с ростом длины волны  $\lambda$ . Это объясняется тем, что все кривые относятся к адиабатической области  $\gamma \ll 1$  (см. рис. 1, а также столбец  $F^{(1)}$  в табл. 1), в которой  $N$  пропорционально объему  $\Delta V$  области фокусировки. В силу экспоненциальной зависимости  $N$  от поля (см. (5)), возрастает



**Рис. 2.** Число  $e^+e^-$ -пар  $N$ , образующихся в объеме  $\lambda^3$  за время  $T$ . Сплошные кривые — за один период, штриховые — за  $T = 1$  пс. Номера кривых соответствуют лазерам, указанным в табл. 1

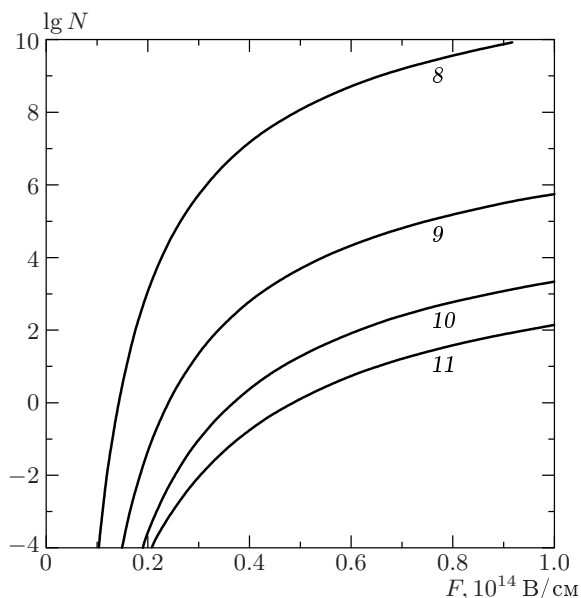


**Рис. 3.** Зависимость числа  $e^+e^-$ -пар  $N$  от амплитуды поля  $F$  (в единицах  $10^{14}$  В/см) для Тиссапфирового лазера. Кривым (справа налево) отвечают длительности импульса  $T = 2.6$  фс (один период поля), 0.01 пс, 1 пс, 100 пс, 10 нс и 1 с,  $\Delta V = \lambda^3$

**Таблица 1.** Параметры некоторых лазеров

№	$\lambda$ , нм	$\hbar\omega$ , эВ	$K_0$	$F^{(1)}$	Тип лазера
1	1.24(4)	0.1	1.02(7)	2.59(9)	—
2	1.06(4)	0.117	8.74(6)	3.02(9)	CO <sub>2</sub> [34]
3	1064	1.165	8.77(5)	3.01(10)	Nd-YAG [34]
4	785	1.58	6.47(5)	4.08(10)	Ti-сапфир
5	694	1.786	5.72(5)	4.64(10)	рубин
6	109	11.4	8.97(4)	2.94(11)	на свободных электронах [35]
7	25	50	2.06(4)	1.29(12)	—
8	1.24	1.0(3)	1.02(3)	2.59(13)	рентгеновский [10]
9	0.1	1.24(3)	82.4	3.20(14)	[10]

*Примечание.*  $\lambda$  — длина волны,  $K_0$  — параметр многоквантовости,  $F^{(1)}$  — электрическое поле, для которого  $\gamma = 1$ ; обозначение  $a(b) \equiv a \cdot 10^b$ .



**Рис. 4.** То же, что и на рис. 2, для рентгеновских лазеров (при  $T = 2\pi/\omega$ ). Кривые 8 и 9 соответствуют номерам в табл. 1, для кривых 10 и 11 энергии квантов соответственно  $\hbar\omega = 50$  и  $100$  кэВ

тание длительности импульса на много порядков, от одного периода до 1 с, приводит к сравнительно небольшому сдвигу кривых  $N = N(\epsilon, \omega)$  в сторону меньших полей (для оптических лазеров, рис. 3). В случае рентгеновских лазеров (рис. 4) уменьшение минимально необходимого поля более заметно.

В табл. 2 даны значения полей  $F_N$ , необходимых для рождения  $N$  электрон-позитронных пар

**Таблица 2.** Характерные параметры для наблюдения эффекта Швингера

$\lambda$ , нм	$F_N, 10^{15}$ В/см			
	$N = 1$	$N = 10^3$	$N = 10^6$	$N = 10^9$
1.06(4)	0.739	0.838	0.967	1.14
	0.481	0.521	0.570	0.627
1064	0.873	1.02	1.21	1.49
	0.521	0.570	0.628	0.698
785	0.899	1.05	1.25	1.56
	0.527	0.577	0.636	0.707
694	0.902	1.06	1.27	1.59
	0.530	0.580	0.640	0.712
109	1.07	1.29	1.61	2.13
	0.569	0.627	0.697	0.785
25	1.26	1.56	2.04	2.91
	0.605	0.671	0.752	0.855
0.1	3.15	5.74	—	—
	0.774	0.890	1.04	1.25

*Примечание.*  $F_N$  — напряженность электрического поля, при которой в объеме  $\Delta V = \lambda^3$  образуется  $N$  электрон-позитронных пар: за один период поля (первая строка) и за 1 с (вторая строка, при данных  $N$  и  $\lambda$ ). Обозначение  $a(b) \equiv a \cdot 10^b$ .

за один период  $T = 2\pi/\omega$  и за время  $T = 1$  с. Для оптических лазеров порог наблюдения эффекта Швингера (т.е.  $N = 1$ ) достигается при  $F = (0.5-1.0) \cdot 10^{15}$  В/см, что на полтора порядка меньше критического поля  $F_{cr}$  (прочерк в табл. 2 означает, что рассчитанное значение  $F_N \gtrsim F_{cr}$ , а в таких полях необходимо уже учитывать обратное влияние рождающихся из вакуума частиц на внешнее поле). Для всех рассмотренных в табл. 2 случаев параметр  $\gamma < 1$ , поэтому формула (5) здесь применима. Так, значение  $\gamma = 1$  в случае рубинового лазера достигается при  $F \approx 4.6 \cdot 10^{10}$  В/см, для  $\lambda = 109$  нм [34] — при  $F \approx 2.9 \cdot 10^{11}$  В/см и т.д., что существенно меньше, чем соответствующие значения  $F_N$ .

Если  $\gamma \gg 1$ , то зависимость  $N$  от амплитуды поля уже не экспоненциальная, а степенная:

$$N \propto \gamma^{-2K_0} \propto F^{2K_0},$$

что отвечает многофотонному режиму (теория возмущений высокого порядка  $K_0$  по внешнему полю  $F$ ). При этом (10) дает значения, на много порядков превосходящие экстраполяцию по адиабатической формуле (5). Отношение соответствующих чисел составляет

$$\rho \sim (K_0 \epsilon)^{2K_0} \exp(\pi/\epsilon),$$

так что, например,  $\rho \sim 4 \cdot 10^{10}$  при  $K_0 = 5$  и  $\epsilon = 0.1$ ;  $\rho \sim 10^{21}$  при  $K_0 = 10$  и  $\epsilon = 0.05$ ;  $\rho \sim 10^{35}$  при  $K_0 = 10$  и  $\epsilon = 0.03$ , и т.д. Поэтому было бы легче наблюдать эффект Швингера в области  $\gamma \gtrsim 1$  (при данном значении поля  $F$ ), что понятно также из физических соображений: в этом случае за время туннелирования внешнее поле успеет много раз сменить свое направление, в результате чего ширина барьера уменьшается, а его проницаемость резко возрастает (что наглядно видно на языке метода мнимого времени [3, 8]).

К сожалению, режим  $\gamma \gg 1$  осуществляется лишь в слабых полях ( $\epsilon \ll 1/K_0$ ), где сама вероятность  $W$  чрезвычайно мала. Как и в случае многофотонной ионизации атомов, реально здесь нужны значения  $K_0 \lesssim 10-20$ , что означает  $\hbar\omega \gtrsim 100$  кэВ. При этом, например, для  $K_0 = 10$ ,  $\gamma \sim 3$  и  $T = 1$  с мы имели бы  $\epsilon \approx 0.03$ ,  $N \sim 10^{10}$ , в то время как согласно адиабатическому приближению в таких полях пары практически не образуются. Однако создание таких  $\gamma$ -лазеров если и возможно, то, по-видимому, лишь в достаточно отдаленной перспективе.

#### 4. ДИНАМИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ШВИНГЕРА

В оптическом диапазоне получение максимально интенсивных полей достигается с помощью сжатия (укорочения) лазерного импульса, длительность которого становится уже сравнимой с оптическим периодом, а форма далека от идеальной синусоиды [27, 28]. То же, по всей видимости, будет справедливо и для рентгеновских лазеров. В этой связи рассмотрим влияние укорочения импульса на вероятность эффекта Швингера.

Импульсный спектр электронов и позитронов, рождающихся из вакуума электрическим полем (1), дается формулой (3), в которой<sup>5)</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\gamma) &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \chi(\gamma u) (1-u^2)^{1/2} du, \\ \tilde{b}_1(\gamma) &= -\gamma \tilde{b}'_2(\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\chi(\gamma u) - \chi(\gamma)}{(1-u^2)^{3/2}} du, \\ \tilde{b}_2(\gamma) &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \chi(\gamma u) (1-u^2)^{-1/2} du = \\ &= \frac{1}{2\gamma} \frac{d}{d\gamma} [\gamma^2 \tilde{g}(\gamma)], \end{aligned} \quad (11)$$

а функция  $\chi(u)$  полностью определяется формой полевого импульса  $\varphi(t)$  и имеет тот же вид, что и в теории многофотонной ионизации атомов. Так, в случае монохроматического излучения  $\varphi(t) = \cos t$  и  $\chi(u) = (1+u^2)^{-1/2}$ ; для «солитоноподобного» импульса  $\varphi(t) = 1/\text{ch}^2 t$  имеем  $\chi(u) = 1/(1+u^2)$ , и т.д. (см. подробнее в [32]).

В случае гауссовского импульса,  $\varphi(t) = \exp(-t^2/2\sigma^2)$ , обратная функция  $u = u(\chi)$  определяется в явном виде:

$$\begin{aligned} u &= \sigma \sqrt{-2 \ln \chi} {}_1F_1(1/2; 3/2; -\ln \chi), \\ 0 &< \chi \leq 1, \end{aligned}$$

где  ${}_1F_1$  — вырожденная гипергеометрическая функция. Аналогично для

$$\varphi(t) = (1+t^2)^{-\alpha}, \quad \alpha \geq 1, \quad (12)$$

имеем

$$\begin{aligned} \chi &= (1-\tau^2)^\alpha, \\ u &= \int_0^\tau (1-t^2)^{-\alpha} dt = \tau F(\alpha, 1/2; 3/2; \tau^2), \end{aligned} \quad (12')$$

<sup>5)</sup> Вывод этих формул, полученных с помощью метода мнимого времени [43], мы здесь опустим.

где  $F(\dots) \equiv {}_2F_1(\dots)$  — гипергеометрическая функция Гаусса. Исключая параметр  $\tau$ , приходим к довольно простому уравнению:

$$u = \frac{1}{2} \int_{\chi^{1/\alpha}}^1 \frac{dy}{y^\alpha \sqrt{1-y}}, \quad (12'')$$

определяющему обратную функцию  $u(\chi)$  для любого  $\alpha \geq 1$ . Отсюда

$$\chi(u) = 1 - \alpha u^2 + \frac{1}{6} (7\alpha^2 - 3\alpha) u^4 + \dots, \quad u \rightarrow 0, \quad (13)$$

а при  $u \rightarrow \infty$

$$\chi(u) \approx \begin{cases} [2(\alpha - 1)u]^{-\alpha/(\alpha-1)}, & \alpha > 1, \\ 4 \exp(-2u), & \alpha = 1. \end{cases} \quad (13')$$

Чем больше показатель  $\alpha$ , тем быстрее спадает полевой импульс (12) при  $t \rightarrow \infty$  и тем медленнее убывает функция  $\chi(u)$  на бесконечности. В [32] изложен общий рецепт вычисления функции  $\chi(u)$  по заданной форме импульса  $\varphi(t)$ , после чего, как видно из (11), задача сводится к квадратурам.

Заметим еще, что для целей численного счета удобно переписать (11) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\gamma) &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \chi(\gamma \sin \theta) \cos^2 \theta d\theta, \\ \tilde{b}_2(\gamma) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \chi(\gamma \sin \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя эти уравнения, мы вычислили функцию  $\tilde{g}(\gamma)$  и коэффициенты импульсного спектра  $\tilde{b}_{1,2}(\gamma)$  для некоторых импульсных полей. Результаты расчета для  $\tilde{g}(\gamma)$  приводятся на рис. 5 и 6. Во всех случаях функция  $\tilde{g}(\gamma)$  монотонно уменьшается с ростом параметра адиабатичности, при этом вероятность  $W$  при заданном значении поля  $F$  резко возрастает (в силу того, что  $\epsilon \ll 1$ ) и начинает существенно зависеть от формы импульса  $\varphi(t)$ . Это явление, возникающее на высоких частотах  $\omega \gtrsim \omega_t$ , можно назвать динамическим эффектом Швингера.

Приведем еще результаты расчета для модулированного электромагнитного импульса с гауссовской огибающей<sup>6)</sup>:

$$\varphi(t) = \exp(-t^2/2\sigma^2) \cos t, \quad (15)$$

<sup>6)</sup> Такая модель часто используется в лазерной физике. При этом ширина огибающей на половине ее высоты равна  $\sigma\sqrt{8 \ln 2} \approx 2.4\sigma$ .

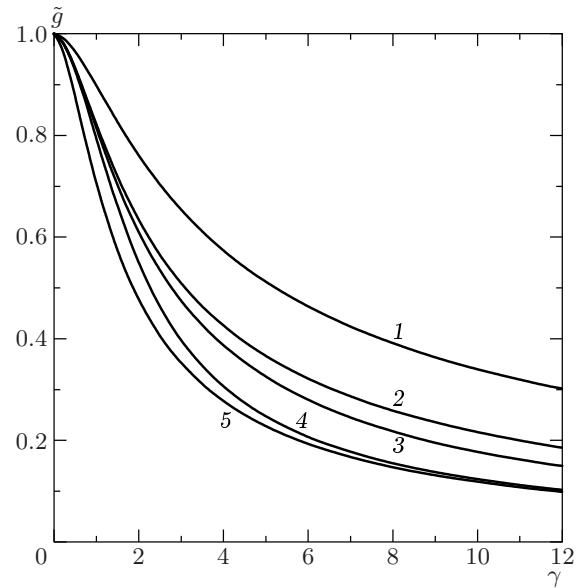


Рис. 5. Функция  $\tilde{g}(\gamma)$  для эффекта Швингера в зависимости от параметра адиабатичности  $\gamma$ . Кривые 1–5 относятся к полям следующего вида: 1 —  $\varphi(t) = \cos t$ ; 2 —  $\varphi(t) = \exp(-t^2)$ ; 3 —  $\varphi(t) = 1/\text{ch}^2 t$ ; 4 —  $\varphi(t) = 1/(1+t^2)$ ; 5 —  $\varphi(t) = (1+t^2)^{-2}$

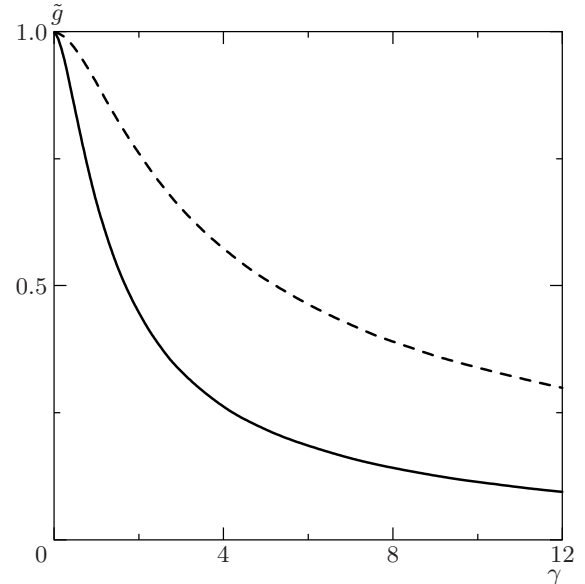
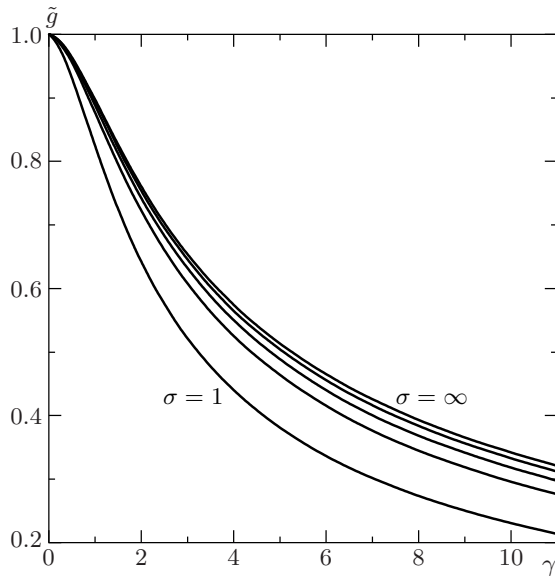


Рис. 6. То же, что на предыдущем рисунке, для импульса  $\varphi(t) = (1-t^2)/(1+t^2)^2$ , сплошная кривая. Для сравнения показана зависимость  $\tilde{g}$  от  $\gamma$  для монохроматического света (штриховая кривая)



**Рис. 7.** Зависимость функции  $\tilde{g}(\gamma)$  от параметра адиабатичности в случае модулированного светового импульса (15). Для кривых (снизу вверх) параметр  $\sigma = 1, 2, 3, 5$  и  $\infty$  (последний случай соответствует монохроматическому лазерному полю)

который (при подходящем выборе параметра  $\sigma$ ) может служить моделью ультракороткого лазерного импульса или электрического поля в стоячей световой волне. При этом функция  $\chi(u)$  определяется численно из уравнений

$$\chi = \frac{\exp(-\tau^2/2\sigma^2)}{\text{ch } \tau}, \quad u = \int_0^\tau \exp\left(\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \text{ch } t \, dt \quad (16)$$

(здесь  $\tau$  — параметр,  $0 < \tau < \infty$ ). С уменьшением  $\sigma$  импульс (15) укорачивается: его амплитуда уменьшается за один период лазерного поля на фактор  $\delta \approx \exp(-2\pi^2/\sigma^2)$ . Как видно из рис. 7, уменьшение стоящей в экспоненте функции  $\tilde{g}(\gamma)$  начинает сказываться при  $\sigma \sim 5$ , а при  $\sigma = 1$  оно уже весьма существенно. Что касается коэффициентов  $b_{1,2}(\gamma)$ , то их зависимостью от  $\sigma$  можно пренебречь при  $\sigma \geq 3$ , но для значений  $\sigma \lesssim 1$  импульсный спектр заметно расширяется (см. подробнее в [31]).

Однако в полной мере эти эффекты проявляются в области  $\gamma \gtrsim 1$ , а при  $\gamma \ll 1$  зависимость от параметра  $\gamma$  имеется только в членах порядка  $\gamma^2$ . Полагая вблизи максимума электрического поля

$$\varphi(t) = 1 - \frac{a_2}{2!}t^2 + \frac{a_4}{4!}t^4 - \dots, \quad a_2 > 0, \quad (17)$$

получаем адиабатические разложения

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\gamma) &= 1 - \frac{1}{8}a_2\gamma^2 + \frac{1}{192}(10a_2^2 - a_4)\gamma^4 + O(\gamma^6), \\ \tilde{b}_1(\gamma) &= \frac{1}{2}a_2\gamma^2 + \dots, \quad \tilde{b}_2(\gamma) = 1 - \frac{a_2}{4}\gamma^2 + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

В первом приближении по  $\gamma^2$  зависимость от формы лазерного импульса является универсальной:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{p}) &\approx \\ &\approx \exp\left\{-\left[\frac{\pi}{\epsilon}\left(1 - \frac{1}{8}\tilde{\gamma}^2\right) + \frac{1}{eF}\left(\tilde{\gamma}^2 p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2\right)\right]\right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\tilde{\gamma} = \sqrt{a_2}\gamma$  и  $a_2 = -\varphi''(0)$  — кривизна импульса вблизи его вершины. При этом  $p_{\perp} \sim \Delta p_{\perp} \sim \sqrt{eF} = m\sqrt{\epsilon} \ll m$ , а  $p_{\parallel} \sim \gamma^{-1}p_{\perp} \sim mK_0\epsilon^{3/2}$ . Таким образом, поперечный импульс  $e^{\pm}$  остается нерелятивистским (поскольку  $\epsilon \ll 1$ ), однако в продольном направлении  $p_{\parallel} \gtrsim m$ , если напряженность поля удовлетворяет условиям  $K_0^{-3/2} \ll \epsilon \ll 1$ , или  $\gamma \lesssim \sqrt{\epsilon}$ . Для оптических лазеров параметр многоквантовости  $K_0 \sim 10^6$ , поэтому эти условия выполняются с запасом. Можно найти и следующие поправки к (18), (19) — см. Приложение Б, где обсуждается также антиадиабатический случай  $\gamma \gg 1$ .

Как видно из (19), угловое распределение образующихся  $e^{\pm}$  в случае  $\gamma \ll 1$  является резко анизотропным и вытянуто вдоль направления электрического поля. С другой стороны, при  $\gamma \gg 1$  имеем  $p_{\parallel} \approx p_{\perp}$ , а импульсный спектр  $e^{\pm}$  приближается к изотропному (см. (Б.12) в Приложении Б).

Заметим теперь, что кривые на рис. 1–3 рассчитаны по формулам (5) и (10), справедливым для монохроматического поля ( $\sigma = \infty$ ). Однако они относятся к адиабатической области, поэтому из рис. 6 следует, что их изменением при уменьшении длительности лазерного импульса можно пренебречь вплоть до значений  $\sigma \sim 1$ . Например, для импульса (15) имеем  $a_2 = 1 + \sigma^{-2}$  и

$$\tilde{g}(\gamma) = 1 - \frac{1 + \sigma^2}{8\sigma^2}\gamma^2 + \frac{7 + 14\sigma^2 + 9\sigma^4}{192\sigma^4}\gamma^4 + \dots \quad (20)$$

С другой стороны, в пределе  $\gamma \rightarrow \infty$

$$\tilde{g}(\gamma) \approx \frac{4}{\pi\gamma} \begin{cases} \sigma\sqrt{2 \ln(2\gamma/\sigma^2)}, & \sigma < \infty, \\ \ln \gamma, & \sigma = \infty \end{cases} \quad (21)$$

(см. Приложение В). Введение в (15) обрезывающего множителя  $\exp(-t^2/2\sigma^2)$ , т. е. уменьшение длительности лазерного импульса, приводит к изменению асимптотики функции  $\tilde{g}(\gamma)$ : для монохроматического излучения  $\ln \gamma$  заменяется на  $\sigma\sqrt{\ln \gamma}$ ,



однако смена асимптотики происходит лишь при  $\gamma \gg \max(1, \sigma^2)$ . Таким образом, укорочение импульса уменьшает значения функции  $\tilde{g}(\gamma)$  и тем самым увеличивает вероятность  $W$  и облегчает экспериментальное наблюдение процесса Швингера.

## 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Выше мы предполагали, что (1) представляет собой классическое поле с  $\hbar\omega \ll mc^2$ , обладающее когерентностью. Поэтому полученные результаты не относятся к случаю столкновения двух  $\gamma$ -пучков от ускорителей (когда также могут рождаться  $e^+e^-$ -пары, если  $\hbar(\omega_1 + \omega_2) > 2mc^2$ , но некогерентным образом).

2. Для существующих в настоящее время лазеров швингеровский механизм может осуществиться только в адиабатическом режиме, поэтому он происходит почти так же, как и в постоянном поле (см. Приложение А). При  $\gamma \gg 1$  вероятность рождения пар (при фиксированной амплитуде поля  $F$ ) резко возрастает, однако такой режим возможен только после создания  $\gamma$ -лазеров с энергией квантов в несколько десятков килоэлектронвольт.

3. Как видно из формулы (В.4), коэффициенты при  $\gamma^{2n}$  ( $n \geq 2$ ) в адиабатических разложениях (4') численно малы и убывают с ростом  $n$ . Вследствие этого область применимости этих разложений «затягивается» вплоть до значений  $\gamma \gtrsim 1$ , а при  $\gamma < 1$  процесс швингеровского рождения пар ближе к туннельному режиму, чем к многофотонному. При расчете вероятности  $W$  для существующих в настоящее время лазеров можно ограничиться несколькими членами разложений (4') для функций  $\tilde{g}(\gamma)$  и  $\tilde{b}_{1,2}(\gamma)$ .

4. Проведенные выше расчеты относятся к тому случаю, когда полное время действия периодического поля  $T$  охватывает много периодов и удовлетворяет условиям:

$$2\pi/\omega \ll T \ll 1/w. \quad (22)$$

При этом можно пренебречь процессами включения и выключения поля и, с другой стороны, полная вероятность перехода еще мала:  $wT \ll 1$ . В этих условиях (которые обычно выполняются в эксперименте, за исключением области сверхсильных полей) число пар  $N_{\mathbf{p}}(t)$  с импульсами  $\pm \mathbf{p}$  зависит от времени по линейному закону и имеет смысл вероятности  $w$  рождения пары в единицу времени. При  $\epsilon \ll 1$  вероятность  $w$  экспоненциально мала и условия (22) выполняются.

Если же  $wT \gtrsim 1$ , то линейная зависимость  $N_{\mathbf{p}}(t)$  уже не имеет места и необходимо более точное рассмотрение. Как впервые показали Нарожный и Никишов [6], в этом случае зависимость  $N_{\mathbf{p}}(t)$  становится нетривиальной: для скалярных бозонов функция  $N_{\mathbf{p}}(t)$  может либо периодически колебаться с ростом  $t$ , либо возрастать экспоненциально (в зависимости от того, в какой области — устойчивости или неустойчивости — лежит решение уравнения Матье). В то же время в случае фермионов  $N_{\mathbf{p}}(t)$  всегда зависит от времени  $t$  периодическим образом. Эти результаты впоследствии были подтверждены независимыми расчетами [4, 7].

В основе появления различных видов зависимости  $N_{\mathbf{p}}(t)$  для бозонов и фермионов лежит следующий теоретико-групповой факт: задача о рождении пар из вакуума под действием однородного электрического поля  $\mathcal{E}(t)$  обладает группой динамической симметрии  $SU(1,1)$  для скалярных и группой  $SU(2)$  для спинорных частиц [36]. Группа  $SU(1,1)$  содержит три однопараметрические подгруппы, такие что любая другая однопараметрическая подгруппа сопряжена ( $g' = S^{-1}gS$ ) с одной из них:

$$\begin{aligned} g_1 &= \begin{pmatrix} \text{ch}(\theta/2) & \text{sh}(\theta/2) \\ \text{sh}(\theta/2) & \text{ch}(\theta/2) \end{pmatrix}, \\ g_2 &= \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}, \\ g_3 &= \begin{pmatrix} 1 + i\theta/2 & \theta/2 \\ \theta/2 & 1 - i\theta/2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

( $\theta$  — вещественный параметр преобразования). Как известно [37], группа  $SU(1,1)$  изоморфна группе  $SL(2, R)$  вещественных матриц  $\tilde{g}$  второго порядка с детерминантом, равным единице:

$$\tilde{g}(\theta) = S^+ g(\theta) S, \quad S = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\sigma_x\right), \quad (24)$$

причем

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(\theta) &\equiv g_1(\theta), \\ \tilde{g}_2 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \\ \tilde{g}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

Отсюда непосредственно видно, что  $g_i(\theta_1)g_i(\theta_2) =$

$= g_i(\theta_1 + \theta_2)$  и потому  $[g_i(\theta)]^N = g_i(N\theta)$ . Соответственно, для этих трех классов матриц получаем

$$N_{\mathbf{p}}(t) \propto \begin{cases} \text{sh}^2(N\rho) \sim \exp(2N\rho) & \text{для } g_1, \\ [\sin(N\rho)/\sin\rho]^2 & \text{для } g_2, \\ N^2 & \text{для } g_3 \end{cases} \quad (26)$$

(последний случай лежит на границе между областями устойчивости и неустойчивости и практически вряд ли может быть реализован). Здесь  $N$  — число периодов поля и  $\rho = \ln \mu$ , а  $\mu$  — мультипликаторы, вычисление которых для конкретного периодического поля  $\mathcal{E}(t)$  представляет собой отдельную задачу (по теореме Флоке,  $\psi(t + 2\pi/\omega) = \mu\psi(t)$ ). Формулы (24) описывают три возможных типа зависимости числа пар  $N_{\mathbf{p}}(t)$  в случае бозонов.

С другой стороны, всякий элемент (компактной) группы  $SU(2)$  может быть приведен поворотом к каноническому виду  $g_2(\theta)$ , поэтому в задаче о рождении пар дираковских частиц возможен только осцилляторный режим<sup>7)</sup>. Отметим аналогию этого случая с переходами в двухуровневом атоме под действием периодического возмущения, близкого к резонансу (см. [39, § 40]).

Подчеркнем, что решения типа (24) относятся к случаю  $wT \gtrsim 1$ , который реально может осуществиться только в области сверхсильных полей, когда  $F \gtrsim F_{cr}$ . Возможность достижения такого режима в эксперименте в настоящее время не очевидна.

**5.** В теории твердого тела и, в частности, для полупроводников используется закон дисперсии [15, 40]

$$\varepsilon(p) = \Delta \sqrt{1 + p^2/m_*\Delta}, \quad (27)$$

где  $m_*$  — эффективная масса, а  $\Delta$  — ширина запрещенной зоны, отделяющей валентную зону от зоны проводимости. Формально (27) имеет тот же вид, что и для свободной частицы в релятивистской механике:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{m^2 + p^2},$$

поэтому результаты данной работы после очевидных преобразований могут быть использованы в теории многофотонной ионизации полупроводников лазерным импульсом (для случая монохроматического светового поля это было уже сделано в работе [15]). Здесь роль  $F_{cr}$  играют поля порядка  $10^5$  В/см, в силу чего соответствующие эффекты гораздо легче исследовать в эксперименте.

<sup>7)</sup> Теоретико-групповой аспект задачи о рождении пар из вакуума для частиц произвольного спина  $s$  рассмотрен в [38].

**6.** В настоящее время КЭД находится в замечательном согласии с экспериментом. В рекордном случае аномальных магнитных моментов  $e^-$  и  $\mu^-$  точность достигает  $10^{-12}$ , что подтверждает вычисления высших порядков теории возмущений в КЭД вплоть до  $(\alpha/\pi)^4$ , см., например, [41]. Поэтому может возникнуть вопрос: нужно ли вообще ставить опыты по проверке швингеровского механизма рождения  $e^+e^-$ -пар? В этой связи можно заметить, что наблюдение данного процесса означало бы проверку уравнения Дирака и КЭД в области сверхсильных внешних полей, притом вне рамок теории возмущений. Действительно, экспоненциальное обращение в нуль вероятности (4) при  $\epsilon \rightarrow 0$  непосредственно связано с факториальным ростом высших порядков теории возмущений и расходимостью ряда теории возмущений в КЭД (так называемый феномен Дайсона [42]). Этот непертурбативный эффект не может быть получен в результате суммирования любого конечного числа членов ряда теории возмущений, поэтому его наблюдение представляет принципиальный интерес для КЭД и для квантовой теории поля вообще.

Эффект Швингера для других (помимо  $e^\pm$ ) заряженных частиц вряд ли когда-либо будет наблюдаться в эксперименте: критическое поле  $F_{cr} \propto m^2$ , и даже в случае  $\pi^\pm$  имеет уже фантастическое значение  $F_{cr} \sim 10^{21}$  В/см.

**7.** В последние годы происходит быстрое развитие лазерной техники как в сторону уменьшения длины волны<sup>8)</sup>  $\lambda$ , так и увеличения интенсивности  $J$ : уже достигнуты значения  $J \gtrsim 10^{21}$  Вт/см<sup>2</sup> для излучения петаваттных лазеров [28], что соответствует электрическим полям  $F \sim 10^{12}$  В/см, на два порядка превышающим атомные.

Как заметил Рингвальд [10], в том случае, если будут созданы рентгеновские лазеры ( $\hbar\omega \gtrsim 1$  кэВ), а их излучение удастся сфокусировать в объеме порядка  $\lambda^3$ , то минимальные мощности лазеров  $P_{min}$ , необходимые для наблюдения эффекта Швингера, существенно уменьшатся, поскольку  $F \propto \sqrt{P}/\lambda$ . Так, при  $\lambda = 0.1$  нм и длительности импульса  $T = 0.1$  пс для образования одной  $e^+e^-$ -пары требуется  $P_{min} \approx 4 \cdot 10^{16}$  Вт. Такие мощности давно уже достигнуты в оптическом диапазоне, но возможности создания подобных устройств и фокусировки пучка в рентгеновской оптике пока еще не ясны и от-

<sup>8)</sup> Рекордом является создание лазера на свободных электронах с  $\lambda = 109$  нм, лежащей в вакуумном ультрафиолете [35]. Сообщается также [29] о регистрации лазерного излучения с  $\lambda = 80$  нм ( $\hbar\omega \approx 15$  эВ). Конечно, мощности этих лазеров пока еще слишком малы.

носятся к области проектов (см. в этой связи [10]). Результаты изложенных выше расчетов показывают, что эффект Швингера<sup>9)</sup> можно будет наблюдать экспериментально, скорее всего, путем дальнейшего повышения мощности лазеров инфракрасного или оптического диапазона.

Я хотел бы выразить искреннюю благодарность Л. Б. Окуно, обратившему мое внимание на статью [10], за обсуждение полученных выше результатов и полезные замечания, М. И. Высоцкому, В. Д. Муру, В. А. Новикову и С. В. Попруженко за плодотворные дискуссии на начальной стадии этой работы, С. В. Буланову, И. М. Дремину, О. В. Канчели, Н. Б. Нарожному, В. И. Ритусу и Е. Л. Фейнбергу за обсуждение результатов работы, С. Г. Позднякову за постоянную помощь в проведении численных расчетов и, наконец, В. А. Гани и М. Н. Маркиной за помощь при оформлении рукописи.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 01-02-16850).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Приведем в общем виде связь между статической ( $w_{st}$ ) и адиабатической ( $w_a$ ) вероятностями туннелирования. Пусть в постоянном электрическом поле<sup>10)</sup>  $F$

$$w_{st}(F) = A\epsilon^\lambda \exp(-B\epsilon^{-\mu}), \quad \epsilon = F/F_0 \rightarrow 0 \quad (\text{A.1})$$

(эта формула, так же как (A.3)–(A.5), является асимптотически точной в пределе слабого поля). Тогда в случае периодического поля, для которого  $F(t+T) = -F(t+T/2) = F(t)$ ,  $\omega \ll \omega_t$ , и вблизи максимума поля выполняется разложение (15), ве-

роятность перехода в единицу времени получается усреднением (A.1) по периоду:

$$w_a(F) = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} w_{st}(F(t')) dt' \approx \frac{2A}{\omega T} \epsilon^\lambda \exp(-B\epsilon^{-\mu}) \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-B \frac{\mu a_2}{2 \epsilon^\mu} t^2\right) dt \quad (\text{A.2})$$

( $t = \omega t'$ ), откуда

$$w_a(F) = \sqrt{\frac{2}{\pi \mu a_2 B}} \epsilon^{\mu/2} w_{st}(F), \quad \epsilon \ll 1. \quad (\text{A.3})$$

Рассмотрим два примера.

1) В случае ионизации атомов и ионов электрическим полем ( $B = 2/3$ ,  $\mu = 1$ ,  $F_0 \equiv F_a = m^2 e^5 / \hbar^4$ , см. [39]) и в соответствии с работой [44] имеем

$$w_a(F) = \sqrt{3F/\pi F_0} w_{st}(F) \quad (\text{A.4})$$

(параметры  $A$  и  $\lambda$  в (A.1) зависят от квантовых чисел состояния; например,  $\lambda = -1$ ,  $A = 4$  для основного уровня атома водорода,  $\lambda = -(2n_2 + |m| + 1)$  для состояния с параболическими квантовыми числами  $|n_1, n_2, m\rangle$ ,  $\lambda = 1$  для трехмерного  $\delta$ -потенциала, и т. д.).

2) Для эффекта Швингера  $B = \pi$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1$  и  $F_0 = F_{cr}$ , в силу чего

$$w_a(F) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2F}{F_{cr}}} w_{st}(F). \quad (\text{A.5})$$

Поскольку [1] коэффициент  $A = m^4/4\pi^3$ , отсюда сразу следует правильный предэкспоненциальный множитель в (4). Во всех случаях, когда  $\mu = 1$  и  $w_{st} \propto \exp(-\text{const}/F)$  при  $F \rightarrow 0$ , адиабатическая вероятность туннелирования содержит, по сравнению с  $w_{st}$ , дополнительный малый множитель, пропорциональный  $\sqrt{\epsilon}$ , который не переходит в единицу при сколь угодно малой частоте  $\omega$ .

До сих пор мы считали, что поляризация волны является линейной, т. е. поле  $\mathbf{F}(t)$  сохраняет свое направление в пространстве. В случае эллиптической поляризации соотношение между вероятностями  $w_a$  и  $w_{st}$  имеет более сложный вид и было приведено в работе [44]; его вывод недавно опубликован [45].

Отметим, что в случае низкочастотного поля вероятность  $w_a(F, \xi)$  может быть получена [45] с помощью операции усреднения выражения (A.2) также и для сильных полей (при любой эллиптичности света  $\xi$ ), когда асимптотика (A.1) уже не имеет места, но

<sup>9)</sup> В заключение приходится сказать, что использованные в данной статье (как и в [31]) термины «эффект Швингера», «швингеровский механизм рождения пар», по-видимому, не вполне оправданы. Действительно, всюду выше мы предполагали что (в соответствии с экспериментальной ситуацией) электрическое поле  $F$  мало по сравнению с  $F_{cr}$  и, тем более,  $\exp(-\pi F_{cr}/F) \ll 1$ . В этом случае формула Швингера [1] сводится к экспоненциальной точностью к первому члену ряда, полученному еще Гейзенбергом и Эйлером [43]. Автор благодарен В. И. Ритусу за это замечание.

<sup>10)</sup> Здесь  $A, B, \lambda, \mu$  — некоторые константы, см., например, [32, 39].

значения  $w_{st}(F)$  можно взять из численных расчетов [46]. При этом оказывается, что в надбарьерной области  $0.25 \lesssim F \lesssim 1.5$  зависимости вероятностей ионизации  $w_a$  и  $w_{st}$  от поля  $F$  удивительно близки к линейной (что не выполняется ни в области слабого поля, в которой [39]  $w(F) \propto \exp(-2/3F)$ , ни в пределе  $F \rightarrow \infty$ , где [47, 48] для штарковских резонансов  $\text{Im } E(F) \propto (F \ln F)^{2/3}$ ). Следуя [49], такой режим можно назвать промежуточной асимптотикой:  $w(F) \approx k(F - F_0)$ , причем параметры  $k$  и  $F_0$  зависят от квантовых чисел состояния и могут быть найдены при численной подгонке.

Качественное объяснение существования такой асимптотики для задачи об эффекте Штарка в сильном поле получено [50] с помощью  $1/n$ -разложения. Недавно выполненные численные расчеты (для основного состояния атома гелия в постоянном электрическом поле [51] и для иона  $\text{H}^-$  в поле циркулярно поляризованной волны [52]) подтверждают наличие участка линейной зависимости  $w$  от  $F$  в надбарьерной области полей вплоть до  $F \sim F_a$ .

**ПРИЛОЖЕНИЕ В**

Согласно [2, 3, 15], для монохроматического поля  $\varphi(t) = \cos t$

$$\tilde{g}(\gamma) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-u^2}{1+\gamma^2 u^2}} du = \frac{4v}{\pi\gamma} \mathbf{D}(v), \quad (\text{Б.1})$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1(\gamma) &= \frac{1}{2} v^2 \tilde{g}(\gamma), \\ \tilde{b}_2(\gamma) &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1+\gamma^2 u^2)}} = \frac{2v}{\pi\gamma} \mathbf{K}(v), \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

где  $\gamma$  — параметр адиабатичности, а  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{D}$  — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода [33, 53] с модулем  $v$ ,

$$v = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} = \begin{cases} \gamma - \frac{1}{2}\gamma^3 + \dots, & \gamma \ll 1, \\ 1 - \frac{1}{2\gamma^2} + \dots, & \gamma \gg 1. \end{cases}$$

Приведем разложения при малых и больших  $\gamma$ . В первом случае, разлагая  $(1 + \gamma^2 u^2)^{-1/2}$  в ряд Тейлора, получаем из (Б.1)

$$\tilde{g}(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n \gamma^{2n}, \quad |\gamma| \leq 1, \quad (\text{Б.3})$$

$$g_n = \frac{\Gamma^2(n+1/2)}{n!(n+1)! \pi} = \frac{1}{(n+1)} \left[ \frac{(2n-1)!!}{n! 2^n} \right]^2, \quad (\text{Б.4})$$

т. е.  $g_1 = 1/8, g_2 = 3/64, g_3 = 25/1024$  и  $g_n \approx 1/\pi n^2$  при  $n \rightarrow \infty$ . Можно показать, что

$$\tilde{b}_1(\gamma) = -\gamma \tilde{b}'_2(\gamma), \quad \tilde{b}_2(\gamma) = \frac{1}{2\gamma} \frac{d}{d\gamma} [\gamma^2 \tilde{g}(\gamma)], \quad (\text{Б.5})$$

откуда

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1(\gamma) &= 4(g_1 \gamma^2 - 3g_2 \gamma^4 + \dots), \\ \tilde{b}_2(\gamma) &= 1 - 2g_1 \gamma^2 + 3g_2 \gamma^4 + \dots \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Таким образом, ряды для коэффициентов импульсного спектра  $\tilde{b}_{1,2}$  выражаются через те же коэффициенты  $g_n$ , что и в (Б.3).

Угловое распределение  $e^{\pm}$  в случае  $\gamma \ll 1$  является резко анизотропным: поперечный импульс остается нерелятивистским,  $p_{\perp} \sim m\sqrt{\epsilon} \ll m$ , в то время как характерный продольный импульс значительно больше:  $p_{\parallel} \sim \gamma^{-1} p_{\perp}$ , что связано с возможностью разгона электрона и позитрона вдоль медленно меняющегося электрического поля  $F\varphi(t)$ . При этом  $p_{\parallel} \gtrsim m$ , если  $\epsilon \gg K_0^{-2/3}$ . Для оптических лазеров параметр многоквантовости  $K_0 \gtrsim 10^6$  (см. табл. 1), поэтому это условие всегда выполняется. Интегрируя (2) по  $d^3p/(2\pi)^3$  и суммируя вероятности  $n$ -фотонного поглощения  $w_n$  (с учетом того, что спектр  $n\omega$  в этом случае практически непрерывный), приходим к формуле (4) для полной вероятности  $W$ . Заметим, что она может быть получена также усреднением статической вероятности  $w_{st}$  [1] по периоду внешнего поля, см. (А.5).

В противоположном случае  $\gamma \gg 1$  (или  $\omega \gg \omega_t$ , быстропеременное поле), используя для эллиптических функций формулы (8.112.5), (8.113.3) и (8.114.3) из справочника [53], имеем

$$\tilde{g}(\gamma) = \frac{4}{\pi\gamma} \left[ A(q) \ln \left( \frac{4}{q} \right) - B(q) \right], \quad (\text{Б.7})$$

$$\tilde{b}_i(\gamma) = \frac{2}{\pi\gamma} \left[ A_i \ln \left( \frac{4}{q} \right) - B_i \right], \quad i = 1, 2, \quad (\text{Б.8})$$

где  $q = \sqrt{1-v^2} = 1/\sqrt{1+\gamma^2} \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + \frac{1}{4}q^2 + \frac{13}{64}q^4 + \dots, \\ B(q) &= 1 + \frac{1}{2}q^2 + \dots, \\ A_1 &= 1 - \frac{3}{4}q^2 - \frac{3}{64}q^4 + \dots, \\ B_1 &= 1 - \frac{1}{2}q^2 + \dots, \\ A_2 &= 1 - \frac{1}{4}q^2 - \frac{7}{64}q^4 + \dots, \\ B_2 &= \frac{1}{4}q^2 + \dots, \end{aligned} \tag{B.9}$$

и окончательно находим<sup>11)</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\gamma) &= \frac{4}{\pi\gamma} \times \\ &\times \left\{ \left( 1 + \frac{1}{4\gamma^2} - \frac{3}{64\gamma^4} \right) \ln(4\gamma) - 1 + O(\gamma^{-4}) \right\}, \end{aligned} \tag{B.10}$$

а также

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= \frac{2}{\pi\gamma} \left[ \left( 1 - \frac{3}{4\gamma^2} \right) \ln(4\gamma) - 1 + \dots \right], \\ \tilde{b}_2 &= \frac{2}{\pi\gamma} \left[ \left( 1 - \frac{1}{4\gamma^2} \right) \ln(4\gamma) + \dots \right], \end{aligned} \tag{B.11}$$

где опущены члены порядка  $1/\gamma^2$  и меньше. В пределе  $\gamma \rightarrow \infty$  импульсное распределение  $e^\pm$  приближается (с логарифмической точностью) к изотропному:

$$w(\mathbf{p}) \propto \exp\{-K_0 \ln(4\gamma)p^2/m^2\}, \tag{B.12}$$

а вылетающие электроны и позитроны являются нерелятивистскими:

$$p_{\parallel} \sim p_{\perp} \sim \sqrt{\frac{m\omega}{\ln(4\gamma)}} \sim \frac{m}{\sqrt{K_0 \ln(4\gamma)}} \ll m.$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ В

Опишем здесь получение асимптотики (21). При  $\tau \rightarrow \infty$  уравнения для функции  $\chi(u)$  принимают вид

$$\begin{aligned} \chi &= 2 \exp \left\{ - \left( \frac{\tau^2}{2\sigma^2} + \tau \right) \right\}, \\ u &= \frac{\sigma^2}{2\tau} \exp \left( \frac{\tau^2}{2\sigma^2} + \tau \right). \end{aligned} \tag{B.1}$$

<sup>11)</sup> Эти разложения имеют хорошую точность даже при небольших  $\gamma$ : так, погрешность  $\delta$  приближения (B.10) составляет  $\delta = 1, 0.2$  и  $0.03\%$  соответственно при  $\gamma = 1.5, 2$  и  $3$ .

Решая второе из этих уравнений методом итераций, находим

$$\tau = \sigma \sqrt{2 \ln \left( \frac{2u}{\sigma^2} \right)} \left[ 1 + O \left( \frac{\sigma}{\sqrt{\ln u}} \right) \right], \tag{B.2}$$

что позволяет, исключая из (B.1) параметр  $\tau$ , получить

$$\chi(u) \approx \frac{\sigma}{u \sqrt{2 \ln(2u/\sigma^2)}}, \quad u \rightarrow \infty \tag{B.3}$$

Записывая (11) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\gamma) &= \frac{4}{\pi\gamma} \int_0^\gamma \chi(u) \sqrt{1 - \frac{u^2}{\gamma^2}} du = \\ &= \frac{4}{\pi\gamma} \int_0^\gamma \chi(u) du + \dots, \quad \gamma \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{B.4}$$

приходим к выражению (21) для функции  $\tilde{g}(\gamma)$ .

С другой стороны, в пределе  $\sigma = \infty$  (строго монохроматическое излучение)

$$\chi(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \approx \frac{1}{u},$$

и соответственно меняется вид асимптотики  $\tilde{g}(\gamma)$ . Действительно, как вытекает из (B.4),

$$\begin{aligned} \chi(u) &\sim \frac{c}{u(\ln u)^\beta} \rightarrow \tilde{g}(\gamma) \sim \\ &\sin \frac{4c}{\pi\gamma} \begin{cases} (\ln \gamma)^{1-\beta}/(1-\beta), & \beta < 1, \\ \ln \ln \gamma, & \beta = 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{B.5}$$

Таким образом, функция  $\tilde{g}(\gamma)$  убывает при  $\gamma \rightarrow \infty$  медленнее, чем  $1/\gamma$ , если показатель  $\beta \leq 1$ . Рассмотренные выше случаи соответствуют  $\beta = 0$  и  $\beta = 1/2$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
2. E. Brezin and C. Itzykson, Phys. Rev. D **2**, 1191 (1970).
3. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **13**, 261 (1971); ЖЭТФ **61**, 1334 (1971).
4. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **18**, 435 (1973); ЯФ **19**, 1140 (1974).
5. В. С. Попов, М. С. Маринов, ЯФ **16**, 809 (1972).
6. Н. Б. Нарожный, А. И. Никишов, ЖЭТФ **65**, 862 (1973).

7. В. М. Мостепаненко, В. М. Фролов, ЯФ **19**, 885(1974).
8. V. S. Marinov and V. S. Popov, Fortsch. Phys. **25**, 373 (1977).
9. А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*, Энергоатомиздат, Москва (1988).
10. A. Ringwald, preprint DESY 01-024 (2001); Phys. Lett. B **510**, 107 (2001).
11. S. W. Hawking, Comm. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
12. K. M. Parikh and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **85**, 5042 (2000).
13. L. Parker, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969); Phys. Rev. D **3**, 346 (1971).
14. Я. Б. Зельдович, А. А. Старобинский, ЖЭТФ **61**, 2161 (1971).
15. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
16. I. Pomeranchuk and Ya. Smorodinsky, J. Phys. USSR **9**, 97 (1945).
17. Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, УФН **105**, 403 (1971).
18. В. С. Попов, ЖЭТФ **59**, 965 (1970); **65**, 35 (1973).
19. B. Müller, J. Rafelski, and W. Greiner, Z. Phys. **257**, 62 (1972).
20. J. Rafelski and B. Müller, Phys. Lett. B **65**, 205 (1976).
21. V. I. Lisin, M. S. Marinov, and V. S. Popov, Phys. Lett. B **69**, 141 (1977); **B91**, 20 (1980).
22. W. Greiner, B. Müller, and J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer-Verlag, Berlin (1985).
23. W. Greiner and J. Reinhardt, *Quantum Aspects of Beam Physics*, ed. by P. Chen, World Scientific, Singapore (1998), p. 438.
24. В. С. Попов, ЯФ **64**, 421 (2001).
25. Ф. В. Бункин, И. И. Тугов, ДАН СССР **187**, 541 (1969).
26. G. J. Troup and H. S. Perlman, Phys. Rev. D **6**, 2299 (1972).
27. G. A. Mourou, C. P. J. Barty, and M. D. Perry, Phys. Today, 22 (January 1998).
28. S. V. Bulanov, F. Califano, G. I. Dudnikova et al., Rev. Plasma Physics **22**, 227 (2001).
29. CERN Courier **40** (6), 26 (2000); **41** (5), 20 (2001).
30. R. Alkofer, M. B. Hecht, C. D. Roberts, S. M. Schmidt, and D. V. Vinnik, Phys. Rev. Lett. **87**, 139902 (2001).
31. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **74**, 151 (2001); Препринт ИТЭФ 35-01 (2001).
32. V. S. Popov, Laser Phys. **10**, 1033 (2000); Препринт ИТЭФ 39-00 (2000).
33. *Справочник по специальным функциям*, ред. М. Абрамовиц, И. Стиган, Наука, Москва (1979).
34. O. Svelto, *Principles of Lasers*, Plenum Press, New York (1982); перевод: О. Звелто, *Принципы лазеров*, Мир, Москва (1984).
35. J. Andruskow, B. Aune, V. Ayvazyan et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 3825 (2000).
36. В. С. Попов, ЖЭТФ **62**, 1248 (1972).
37. S. Lang, *SL(2, R)*, Addison-Wesley, Reading (1975); перевод: С. Ленг, *SL(2, R)*, Мир, Москва (1977).
38. А. М. Переломов, Phys. Lett. A **39**, 165 (1972).
39. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Наука, Москва (1974).
40. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **33**, 994 (1957).
41. V. W. Hughes and T. Kinoshita, Rev. Mod. Phys. **71**, S133 (1999).
42. F. J. Dyson, Phys. Rev. **85**, 631 (1952).
43. W. Heisenberg and H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936).
44. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393 (1966).
45. В. С. Попов, ЖЭТФ **118**, 56 (2000).
46. V. S. Popov, V. D. Mur, A. V. Sergeev et al., Phys. Lett. A **124**, 77 (1987); **149**, 418 (1990).
47. L. Benassi, V. Grecchi, E. Harrell, and B. Simon, Phys. Rev. Lett. **42**, 704, 1430 (1979).
48. L. Benassi and V. Grecchi, J. Phys. B **13**, 911 (1980).
49. Я. Б. Зельдович, В. В. Соколов, УФН **146**, 493 (1985).
50. V. S. Popov, preprint ИТЭФ 58-92, Moscow (1992); Phys. Lett. A **173**, 63 (1993).
51. A. Scrinzi, M. Geissler, and T. Brabec, Phys. Rev. Lett. **83**, 706 (1999).
52. M. V. Frolov, N. L. Manakov, B. Vorica, and A. F. Starace, J. Phys. B **34**, L579 (2001).
53. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).