

УСИЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ В ОПТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

А. А. Заболотский*

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 12 сентября 2001 г.

Динамика импульсов с длительностью, сравнимой с обратной частотой перехода, распространяющихся в оптической среде, изучается в рамках двух интегрируемых систем уравнений Максвелла–Блоха. Первая модель описывает взаимодействие поля с невырожденной средой с учетом постоянного дипольного момента и внешней постоянной накачки. Найдена общая формула для N -солитонного решения. На примере частных решений, исследуется влияние постоянного дипольного момента и накачки на динамику солитонов. Вторая модель описывает взаимодействие импульсов двухкомпонентного электрического поля с двухуровневой вырожденной средой в присутствии постоянной накачки верхнего уровня. Для случая разных начальных заселенностей магнитных подуровней на примере солитонных решений показано, что накачка приводит к изменению динамики поляризации. Двухсолитонное решение используется для анализа особенностей взаимодействия солитонов в двухуровневой среде при наличии внешней накачки.

PACS: 41.20.Jb, 42.65.Tg

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование процессов динамики и усиления фемтосекундных оптических импульсов привлекает постоянное внимание в связи с их практическими применениями в разных областях физики. Во многих случаях эти импульсы ассоциируются с солитонными решениями интегрируемых систем уравнений Максвелла–Блоха, см. например, обзоры [1, 2]. Применение интегрируемых моделей [3], как правило, требует наложения ряда физических ограничений, однако на практике в рамках этих моделей удается наиболее детально описать эволюцию ультракоротких импульсов в нелинейных средах. Хорошо изучена интегрируемая модель — система уравнений Максвелла–Блоха, описывающая динамику квазимонохроматических импульсов электрического поля в двухуровневой невырожденной и в некоторых двухуровневых вырожденных средах [4–6]. Следует отметить также родственные модели трехуровневых сред [7], [8]. При выводе этих уравнений использовано предположение о медленном по сравнению с $\pi\omega_0^{-1}$, где ω_0 — частота энергетического перехода

между электронными уровнями среды, изменении амплитуд и фаз компонент поля, а также приближение вращающей волны для недиагональных элементов матрицы плотности среды [1, 9].

Для уравнений Максвелла–Блоха, описывающих динамику квазимонохроматических полей, известны многосолитонные периодические решения, а также квазиавтомодельные решения, описывающие распад начального неустойчивого состояния среды [1, 2, 10, 11].

В последнее время наблюдается рост интереса к электромагнитным импульсам с характерной длительностью близкой к π/ω_0 . В литературе эти импульсы называют ультракороткими импульсами [12–14], «электромагнитными пузырями» или «сгустками», «видеоимпульсами» [16], а также предельно короткими импульсами [17, 18]. Область параметров таких импульсов ограничена условием отсутствия фотоионизации, т. е. амплитуда поля не более $\sim 10^8$ – 10^9 Вт/см, а нижний предел длительности солитона $\sim 10^{-15}$ – 10^{-16} с [15]. Однако характеристики световых импульсов с длительностью $\tau_p \sim \pi/\omega_0$ делают условия применимости двухуровневой модели среды для описания реальных процессов взаимодействия поля со средой

*E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

весьма жесткими. Уровни с энергией $\hbar\omega_k$, не принимающиеся во внимание при построении модели, должны находиться на расстоянии

$$|\omega_k - \omega_0| \gg \pi/\tau_p.$$

Таким образом, в качестве рабочего необходимо использовать изолированный энергетический переход с относительно малой частотой ω_0 и ограничить область значений параметров импульсов

$$\tau_p \gg \pi|\omega_k - \omega_0|^{-1}.$$

Условия применимости двухуровневой модели улучшаются в случае, если коэффициент нелинейной восприимчивости или дипольный момент, отвечающий выбранному рабочему переходу, существенно больше, чем аналогичные коэффициенты для близлежащих переходов [19]. Наблюдение эффектов, связанных с генерацией таких импульсов, находится в рамках возможностей современной лазерной техники. Генерация импульсов с длительностью, лишь в несколько раз большей полупериода осцилляций, описана, например, в работах [19–22].

При исследовании фемтосекундного диапазона приближение медленно меняющихся амплитуд и фаз световых полей в используемых для этой цели моделях неприменимо. Соответствующие уравнения Максвелла–Блоха оказываются слишком сложными для анализа. Поэтому во многих теоретических работах используется упрощающее задачу предположение о длительности импульсов $\tau_p \gg \pi/\omega_0$ [12–18, 23]. Для солитонных решений это приближение эквивалентно приближению сильного поля

$$\mu_{12}E/\hbar \gg \omega_0, \quad (1)$$

где μ_{12} , E — соответственно, дипольный момент перехода и амплитуда поля. При выполнении (1) некоторые уравнения Максвелла–Блоха для невырожденной двухуровневой среды могут быть сведены к уравнению синус-Гордон, солитонные и другие решения которого хорошо известны [3, 9]. В то же время известно, что при таком условии применение приближения двухуровневой модели для резонансной атомной или молекулярной среды в оптическом диапазоне не реалистично [16].

Условие (1) не использовалось при выводе редуцированных уравнений Максвелла–Блоха (РУМБ) в работе [24], в которой показана возможность применения аппарата метода обратной задачи рассеяния к решению РУМБ для невырожденной двухуровневой среды. При выводе РУМБ вместо приближения медленных огибающих используется приближение

малой плотности активной среды. В результате удается свести задачу к изучению однонаправленного распространения волн [24–29].

В работах [24–29] метод обратной задачи рассеяния был использован для нахождения солитонных решений РУМБ и изучения их свойств для невырожденной двухуровневой среды. В рамках этих интегрируемых моделей возможно изучение импульсов светового поля с длительностью порядка π/ω_0^{-1} , при которой условия применимости двухуровневой модели сохраняются. Целью настоящей работы является изучение динамики таких импульсов в средах с накачкой. Для этих импульсов, следуя работе [2], будем использовать термин предельно короткий импульс.

Известно, что в несимметричных средах наряду с дипольным моментом μ_{12} , где

$$\mu_{ij} \propto \int \psi_i^* z \psi_j dz,$$

$\psi_{1,2}$ — волновые функции состояний уровней 1 и 2, возможен ненулевой «постоянный дипольный момент» (ПДМ). Он определяется разностью

$$\Delta\mu_{12} = \mu_{11} - \mu_{22} \neq 0.$$

Ненулевой ПДМ возникает в полярных молекулах, в несимметричных полупроводниковых квантовых ямах и в других средах. Вклад ПДМ в нелинейное поглощение и дисперсию изучался, например, в [30–33], где обнаружено, что он может играть существенную роль в нелинейных многочастотных процессах. В [33] отмечено, что в случае квантовых ям, роль ПДМ в процессе генерации второй гармоники растет с ростом длины волны. В этой работе приводятся параметры полупроводниковой среды, для которой отношение $\Delta\mu_{ij}/\mu_{ij}$ меняется в диапазоне приблизительно 0.15–7.1 для разных частот переходов.

Исследование влияния ПДМ на форму и эволюцию импульсов с длительностью, сравнимой с периодом осцилляции, по-видимому, ограничивается недавней работой [34], в которой показано, что в случае невырожденного двухуровневого перехода интегрируемые РУМБ могут быть обобщены на случай ненулевого ПДМ. В этой работе преобразованием Бэклунда найдено общее выражение для многосолитонного решения, а одно- и двухсолитонные решения приводятся в явном виде.

При эволюции предельно короткого импульса с двумя компонентами поляризации в нелинейной среде возможен ряд новых нелинейных эффектов,

связанных с взаимным влиянием этих компонент. Впервые поляризационные эффекты в нелинейной среде в рамках интегрируемой модели были изучены в работе [35], в которой исследовалось двухкомпонентное нелинейное уравнение Шредингера. Результаты этой работы актуальны и активно используются вплоть до настоящего времени. В дипольной среде с вырожденным двухуровневым переходом поляризованное излучение может вызывать переходы с изменением магнитного момента на единицу. К таким системам относится, например, переход $J = 0 \leftrightarrow J = 1$, взаимодействующий со световым полем, имеющим две компоненты поляризации. В случае квазимонохроматических полей для интегрируемых уравнений Максвелла–Блоха эта схема исследовалась в работах [5, 6, 28], см., также обзор [1]. Математически эти уравнения эквивалентны системе уравнений, описывающей взаимодействие поля с трехуровневой средой с двумя разрешенными переходами [7], расположенными в виде Λ - или V -схем. Отметим, что солитонные решения для таких уравнений Максвелла–Блоха часто совпадают по форме и имеют ряд свойств, аналогичных свойствам солитонных решений двухкомпонентного нелинейного уравнения Шредингера.

В работе [17] изучалось вращение плоскости поляризации поля для предельно коротких импульсов, для которых справедливо неравенство (1). Однако, как отмечает сам автор, приближение предельно малой длины импульса и, соответственно, предельно большой мощности поля, которое он использует, имеет скорее методологическое значение, поскольку такая модель неприменима к реальной ситуации в оптическом диапазоне. В следующей работе [18] явление самоиндуцированной прозрачности для предельно короткого импульса исследуется с использованием приближенной модели многоуровневой среды с ограничениями на возможные переходы. В этих работах уравнения Максвелла–Блоха сводились к однокомпонентному уравнению синус-Гордон для мощных полей, а для слабых полей — к модифицированному нелинейному уравнению Шредингера.

Для предельно короткого импульса длительностью $\sim \pi/\omega_0$ возможно аналогичное взаимодействие с вырожденным переходом, и для построения полной картины эволюции солитонов и иных решений в общем случае необходимо учитывать поляризационные эффекты. Ряд таких эффектов может быть связан, например, с изменением поляризации импульсов на малых расстояниях. Например, в работе [7] в рамках модели Максвелла–Блоха, описывающей динамику квазимонохроматических полей,

для трехуровневой среды показано, что различие начальных заселенностей уровней может приводить к эффективному комбинационному рассеянию солитонов. Аналогичный результат был получен для более сложной схемы взаимодействия в [8].

При распространении импульсов света в сверхдлинных оптических волноводах для компенсации потерь используется усиление импульсов на периодически расположенных по длине световода участках с имплантированными атомами эрбия. Эффективность усиления зависит от характеристик нелинейных процессов, происходящих внутри этого участка. В резонансной двухуровневой среде наиболее часто используются две схемы усиления. В первой схеме считается, что в начальный момент двухуровневая среда инвертирована и в процессе эволюции импульс поглощает запасенную энергию [9]. Во второй схеме усиление импульса происходит за счет постоянной накачки верхнего уровня [36, 37]. Система эволюционных уравнений Максвелла–Блоха с внешней накачкой используется для моделирования процессов в газовых средах, твердых телах и красителях [36, 37]. В таких лазерных средах часто используются трех-, четырехуровневые схемы переходов, которые при выполнении ряда условий могут быть сведены к эффективной системе уравнений Максвелла–Блоха двухуровневой среды с дополнительным членом в уравнениях Блоха для разности населенностей [36]. Отметим, что схема двухуровневого лазерного перехода с внешней накачкой [36] чаще применяется в нелинейной оптике для описания генерации в лазерах, чем описанная выше схема однопроходowego лазерного усилителя.

В волоконных световодах режим усиления происходит в неадиабатическом режиме [38]. Поэтому для его описания необходимо применять соответствующие модели, описывающие динамику нелинейной стадии вне рамок теории приближений. К таким моделям относятся интегрируемые уравнения Максвелла–Блоха двухуровневой среды с постоянной накачкой верхнего уровня, полученные при использовании приближения медленных огибающих. Эти уравнения принадлежат классу так называемых интегрируемых «деформаций» [39–42], т. е. уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния с переменным спектральным параметром.

Интегрируемость РУМБ, описывающих двухуровневый лазер с постоянной накачкой уровней в рамках метода обратной задачи рассеяния с переменным спектральным параметром, показана в работе [41]. Под действием накачки происходит засе-

ление верхнего уровня среды, и в случае возникновения инверсной заселенности начинается лазерная генерация. Для малых затравочных импульсов лазерная генерация асимптотически описывается (квази)радиационным решением, ассоциированным с непрерывным действительным спектром задачи Захарова–Шабата так же, как и в случае длинного лазерного усилителя [10]. В работах [44–46] показано, что это решение состоит из нелинейных осцилляций с монотонно растущей с расстоянием z амплитудой.

В то же время двухуровневая лазерная среда с накачкой может быть использована для усиления как квазимонохроматических солитонных импульсов с несущей частотой, близкой к частоте перехода, так и солитонов с длительностью порядка π/ω_0 . Частные солитонные и линейные решения интегрируемых уравнений Максвелла–Блоха для квазимонохроматических волн с учетом накачки получены в [39–44]. Динамика солитона, который ассоциируется с изолированным собственным значением спектральной проблемы задачи Захарова–Шабата с положительной мнимой частью, под действием накачки в работах [40, 41] сведена к изменению его параметров. В то же время в общем случае необходимо учитывать влияние радиационного решения, которое определяется действительным непрерывным спектром этой задачи, на динамику солитонов.

Изучение динамики и изменения формы оптических солитонов с длительностью $\sim \pi/\omega_0$ в процессе усиления представляет очевидный практический интерес. Однако, насколько нам известно, исследования особенностей динамики солитонов при наличии постоянной накачки в рамках интегрируемых РУМБ в невырожденных средах с учетом ПДМ и поляризационных эффектов в вырожденных двухуровневых средах не проводились.

В настоящей работе изучается усиление предельно короткого импульса в двухуровневой невырожденной среде с ПДМ и в вырожденной двухуровневой среде с накачкой в рамках интегрируемых деформаций РУМБ. Применение этих интегрируемых моделей позволяет отказаться от условия (1) и исследовать динамику усиления солитонов вне рамок теории возмущений и адиабатического приближения. В первом случае используется обобщение интегрируемой системы уравнений Максвелла–Блоха, учитывающей ПДМ, найденной авторами работы [34]. Здесь дополнительно учитывается накачка уровней и исследуется роль ПДМ в усилении солитона. Далее в работе для двух разных схем уровней конструируется эффективная интегрируемая система РУМБ для

среды с вырожденным по проекциям момента переходом. Эта система позволяет исследовать нелинейные поляризационные эффекты, связанные с различием заселенностей магнитных подуровней, взаимодействием и конверсией солитонов, и ряд других эффектов. На примере одно- и двухсолитонных решений исследуются особенности динамики солитонов в присутствии накачки. Отметим, что аналогичные исследования монохроматической системы Максвелла–Блоха для вырожденного перехода с учетом накачки, насколько нам известно, не проводились.

Статья построена следующим образом. В следующем разделе приводится обобщение интегрируемых РУМБ, учитывающих накачку и ПДМ, и найдены солитонные решения. В разд. 3 приводится вывод интегрируемых уравнений Максвелла–Блоха, описывающих взаимодействие двухкомпонентного светового поля с вырожденным переходом для двух схем взаимодействия. В разд. 4 найдены одно- и двухсолитонные решения этой модели и изучаются их свойства. В последнем разделе обсуждаются полученные результаты.

2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА–БЛОХА С УЧЕТОМ НАКАЧКИ

Накачка верхнего энергетического уровня лазерной среды феноменологически учитывается добавлением в правую часть уравнения Блоха для населенности этого уровня дополнительного члена (см., например, уравнения (9.106) в работе [36]). Эта эффективная двухуровневая схема может быть получена редукцией некоторых моделей трех- или четырехуровневой среды, взаимодействующей с монохроматическими полями, резонансными этим переходам [42]. В этих схемах предполагается, что существует некоторый механизм накачки, при котором происходит перенос электронов с основного уровня 0 на уровень 3, лежащий выше верхнего уровня 1 лазерного перехода. В случае ионного лазера такое заселение происходит вследствие пропускания сильного электрического тока через газ. Затем из-за быстрого переноса электронов с уровня 3 на уровень 1 происходит рост разности заселенностей уровня 1 и уровня 2, имеющего меньшую энергию. В такой системе можно получить инверсию заселенностей уровней 1 и 2 и генерацию поля с амплитудой E_{12} на этом переходе с частотой ω_{12} . Однако для наблюдения солитонной динамики предпочтительна ситуация, когда в начальный момент заселенность уровня 2 велика. В этом случае происходит подавление ге-

нерации несолитонной части решения, которая для интегрируемой модели ассоциируется с действительным непрерывным спектром соответствующей спектральной проблемы [43]. Поэтому трехуровневая схема, в которой уровень 2 и основной уровень 0 совпадают, более предпочтительна для наблюдения динамики солитонов.

Как отмечено выше, редуцированные уравнения Максвелла–Блоха для невырожденной двухуровневой среды выведены в работах [23, 24] в приближении малой эффективной плотности среды. В работе [34] они обобщены на случай ненулевого постоянного момента, т. е. для

$$\mu_{11} - \mu_{22} \neq 0.$$

В этом приближении групповая скорость импульса близка к скорости света в среде и редуцированные уравнения Максвелла приводятся к одному уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{\epsilon_\infty}} \frac{\partial}{\partial z} \right) E = i \frac{N_0 \omega \mu_{12}}{2 \epsilon_0 \epsilon_\infty} (\rho_{12} - \rho_{21}). \quad (2)$$

Здесь N_0 — плотность активных атомов, $\epsilon_0, \epsilon_\infty$ — диэлектрические проницаемости среды [34]. Недиagonальные значения дипольного момента приведены к действительному виду простым сдвигом фаз элементов матрицы плотности ρ_{12}, ρ_{21} , при этом $\mu_{12} = \mu_{21}$.

Уравнения Блоха для матрицы плотности с компонентами $\rho_{ij}, i, j = 1, 2$, двухуровневой невырожденной среды с ПДМ имеют вид [34]

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{12} = i \left(\frac{\Delta \mu_{12}}{\hbar} E - \omega \right) \rho_{12} - \\ - i (\rho_{11} - \rho_{22}) \frac{\mu_{12}}{\hbar} E + \frac{b}{2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\partial_t \rho_{11} = i \frac{\mu_{12}}{\hbar} E (\rho_{21} - \rho_{12}) + c_1, \quad (4)$$

$$\partial_t \rho_{22} = i \frac{\mu_{12}}{\hbar} E (\rho_{12} - \rho_{21}) + c_2. \quad (5)$$

Здесь

$$\Delta \mu_{12} = (\mu_{11} - \mu_{22}),$$

μ_{ij} — компоненты дипольного момента среды. В уравнениях (3)–(5) учтена накачка уровней ($\propto c_1, c_2$), а также постоянная внешняя сила ($\propto b/2$), создаваемая дополнительным полем или полями на этом переходе.

Перепишем систему (2)–(5) в виде

$$\begin{aligned} \partial_z E &= i R^-, \\ \partial_\tau R^- &= i (aE - \omega) R^+ - 2i N \mu E, \\ \partial_\tau R^+ &= i (aE - \omega) R^- + b, \\ \partial_\tau N &= -2i \mu E R^- + c, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} R^\pm &= \rho_{12} \pm \rho_{21}, \quad N = \rho_{11} - \rho_{22}, \\ a &= \Delta \mu_{12} / \hbar, \quad z = x \mu_{12} \omega N_0 (2c \epsilon_0 \sqrt{\epsilon_\infty})^{-1}, \\ \tau &= t - x \sqrt{\epsilon_\infty} c^{-1}, \quad c = c_1 - c_2, \quad \mu = \mu_{12} / \hbar. \end{aligned}$$

Представление Лакса системы (6) найдено для $b = c = 0$ в работе [34]. В наших обозначениях это представление имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi = \\ = \begin{bmatrix} -i\lambda & -a\omega D^{-1} + DE \\ a\omega D^{-1} - DE & i\lambda \end{bmatrix} \Psi \equiv \mathbf{L}_1 \Psi, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \Psi = \frac{D}{4(\lambda^2 D^2 - \mu^2 \omega^2)} \times \\ \times \begin{bmatrix} iD(2\mu\lambda N - a\lambda R^+) & 2A_{12} \\ 2A_{21} & -iD(2\mu\lambda N - a\lambda R^+) \end{bmatrix} \Psi \equiv \\ \equiv \mathbf{A}_1 \Psi, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь

$$\begin{aligned} D^2 &= 4\mu^2 + a^2, \\ A_{12} &= \mu a \omega N + 2\mu^2 \omega R^+ + \lambda D^2 R^-, \\ A_{21} &= -\mu a \omega N - 2\mu^2 \omega R^+ + \lambda D^2 R^-. \end{aligned}$$

Учет произвольных функций $c = c(z)$ и $b = -ac(z)/2\mu$ приводит к появлению зависимости спектрального параметра λ от переменной z . Эта зависимость описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial z} \lambda = \frac{1}{4} \frac{\lambda D^2}{\lambda^2 D^2 - \mu^2 \omega^2} [b(z)a - 2c(z)\mu]. \quad (9)$$

Отметим, что для $c = b = 0$ и больших амплитуд поля, при которых выполняется неравенство (1), система (2)–(5) после пренебрежения членом $i\omega\rho_{12}$ в уравнении (3) сводится к уравнению синус-Гордона:

$$\partial_T \partial_z \theta = \sin \theta, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} T = D\tau, \quad \partial_T \theta = E, \quad iR^- = \sin \theta, \\ 2\mu N - aR^+ = D \cos \theta. \end{aligned}$$

Оценка значений амплитуд поля показывает, что они находятся в пределах возможностей современной лазерной техники [22]. Решения уравнения синус-Гордон для разных начально-краевых условий хорошо изучены. В то же время, как отмечено выше, условия, при которых реальная среда может быть моделирована двухуровневой средой в видимом диапазоне, для таких значений полей слишком жесткие. Поэтому необходимо рассматривать более общую модель (6) для амплитуд полей, таких что

$$\Delta\mu_{ij}E\hbar^{-1}, \mu_{ij}E\hbar^{-1} \sim \omega.$$

Нетрудно показать, что система (6) при $c = b = 0$ имеет следующее постоянное, линейно устойчивое решение:

$$\begin{aligned} E_v^{(0)} &= a\omega D^{-2}, \quad R_v^{- (0)} = 0, \\ 2\mu R_v^{+ (0)} &= -aN_v. \end{aligned} \quad (11)$$

Это решение является обобщением известного «вакуумного» решения РУМБ для $a = 0$, отвечающего значению вектора Блоха

$$\mathbf{B} \equiv (R^+, iR^-, N) = (0, 0, -1)N_0,$$

где

$$(R^+)^2 + (iR^-)^2 + N^2 = N_0^2.$$

Для $a \neq 0$ вакуумному решению (11) отвечает вектор Блоха

$$\mathbf{B} = (a, 0, -2\mu)N_0/D.$$

Накачка приводит к зависимости вакуумного решения от переменных, которую необходимо учитывать при построении солитонных решений. Для $b, c \neq 0$ система (6) имеет следующее вакуумное решение:

$$E_v^{(1)} = \frac{\omega}{D^2} \left[a + 2\mu\tau \frac{2\mu b + ac}{DN_0 + \tau(ab - 2\mu c)} \right], \quad (12)$$

$$\begin{aligned} R_v^{- (1)} &= 0, \quad R_v^{+ (1)} = \frac{aN_0}{D} + b\tau, \\ N_v^{(1)} &= -\frac{2\mu N_0}{D} + c\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Вектор Блоха для этого решения имеет переменную длину.

При специальном подборе констант накачки, таких что

$$2\mu b = -ac, \quad (14)$$

вакуумное решение (12) для амплитуды поля не зависит от τ . При этом

$$E_v^{(1)} \equiv a\omega D^{-2}.$$

Физически это означает, что энергия накачки не поступает в радиационную часть решения для поля. В то же время, как будет показано ниже, при выполнении условия (14) амплитуда солитона может расти под действием накачки. Решение (12) для амплитуды поля $E_v^{(1)}$ при $ab - 2\mu c < 0$ сингулярно, т. е. обращается в бесконечность за конечное время в точке N_0/γ_s , если условие (14) не выполнено. Как легко показать, используя (9), при $ab - 2\mu c < 0$ происходит рост амплитуды солитона. В настоящей работе рассматриваются значения параметров и временные интервалы, для которых эту сингулярность можно не учитывать. С этой целью ограничимся условием (14) или значениями параметров, при которых

$$DN_0 \gg \tau(2\mu c - ab), 2\mu\tau(2\mu b + ac). \quad (15)$$

N -солитонные решения РУМБ (6) для $c = b = \Delta = 0$ найдены в работе [24]. Для того чтобы построить аналогичные решения для системы (6), необходимо фиксировать вакуумное решение, на фоне которого распространяются солитоны. В линейном приближении нетрудно показать, что при выполнении приближенного (15) или точного (14) условия в качестве вакуумного можно выбрать решение (12).

Для того чтобы построить N -солитонные решения модели (6), достаточно модифицировать соответствующие решения, найденные в [24]. Действительно, вид интегральных уравнений Марченко, которые используются для построения солитонных решений, определяется видом спектральной задачи и асимптотиками функций Йоста ($\tau \rightarrow \pm\infty$). Спектральная задача (7) и асимптотики функций Йоста для вакуумного решения (12) и условий (15) или (14) совпадают с соответствующей спектральной задачей и асимптотиками в работе [24]. Решение также определяется зависимостью данных рассеяния от переменной z , которая определяется с помощью системы (8) для $\tau \rightarrow \pm\infty$. Эта зависимость существенно упрощается, если функции, входящие в выражение для матрицы \mathbf{A}_1 , подчиняются уравнениям (12) и (14). При этом недиагональные элементы матрицы \mathbf{A}_1 обращаются в нуль и зависимость спектральных данных от z проявляется лишь в появлении экспоненциального множителя с показателем

$$-\int_0^z 2[\mathbf{A}_1]_{11}(z'; \lambda(z'))dz'.$$

При наличии накачки необходимо дополнительно учесть зависимость λ от z , которая дается уравнением (9). С учетом этого, повторяя построение со-

литонных решений, выполненное в работе [24], находим N -солитонное решение системы (6) с учетом ПДМ и накачки, которое имеет вид

$$\left| DE - \frac{a\omega}{D} \right|^2 = \frac{d^2}{d\tau^2} \ln \det \|\mathbf{I} + \mathbf{V}\mathbf{V}^*\|, \quad (16)$$

где \mathbf{I} — единичная ($N \times N$) матрица. Элементы матрицы \mathbf{V} следующие:

$$V_{nm} = \frac{\sqrt{\beta_n \beta_m}}{\zeta_n - \zeta_m^*} \exp \{i [\zeta_n(z) - \zeta_m^*(z)] \tau\}, \quad (17)$$

где $\zeta_n(z)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial z} \zeta_n = -\frac{i}{8\mu} \frac{\zeta_n D^4 c}{\zeta_n^2 D^2 - \mu^2 \omega^2} \quad (18)$$

с граничным условием

$$\zeta_n(0) = \lambda_n.$$

При выводе уравнения (18) использовано условие (14). Подчеркнем, что, поскольку в данной задаче β_n также зависят от τ , при формальном использовании формулы (16) следует помнить, что дифференцирование проводится только по τ , входящей в показатель экспоненты в правой части (17).

В (17) λ_n либо чисто мнимые, либо входят парами в виде

$$\lambda_n = -\lambda_m^*,$$

и, учитывая (18), находим

$$\beta_n(\tau, z) = \beta_n(0, 0) \exp \left\{ i \frac{(2\mu N_0 - Dc\tau)}{Dc} [\zeta_n(z) - \lambda_n] \right\}.$$

В первом случае единственному собственному значению $\lambda_1 = i\eta_1$ и $\beta_1 = \beta_1^*$ отвечает солитонное решение

$$DE_s = \frac{a\omega}{D} + \frac{4\nu_1(z)}{\text{ch}[2\eta_1\tau - 2(\nu_1(z) - \eta_1)\mu N_0(Dc)^{-1} - \phi_1]}, \quad (19)$$

здесь

$$\text{Im } \zeta_1(z) = \nu_1(z), \quad \nu_1(0) = \eta_1, \quad \text{Re } \zeta_1(z) \equiv 0,$$

$$\phi_1 = \ln |\beta_1(0)[2\zeta_1(z)]^{-1}|.$$

Решение описывает рост амплитуды солитона пропорционально \sqrt{z} , $z \rightarrow \infty$. При этом росте длительность солитона не изменяется, что отличает это решение от аналогичного солитонного решения, найденного в работе [40] для уравнений Максвелла–Блоха с накачкой для квазимонохроматических

волн. Механизм роста амплитуды солитона, обусловленный накачкой, для $c > 0$, $b = 0$ известен (см. [39, 41]). В то же время из (9) следует, что для среды с ненулевым ПДМ и $ab < 0$, $c = 0$ также происходит усиление солитона. Заметим, что в реальных средах коэффициент a может быть как положительным, так и отрицательным [32]. Возможность механизма усиления солитонов, обусловленного наличием ПДМ, отмечается, по-видимому, впервые. В качестве накачки, пропорциональной b , могут использоваться квазимонохроматические поля с несущей частотой, совпадающей с частотой перехода.

Паре граничных ($z = 0$) собственных значений $\lambda_{2,3} = \pm\xi + i\eta$, $\beta_2 = \beta_3^*$ отвечает бризеро-подобное решение

$$DE_b = \frac{a\omega}{D} + 8 \text{Im } \zeta_2 \text{Re } \zeta_2 \times \frac{\text{Re } \zeta_2 \cos \theta_1 \text{ch } \theta_2 - \text{Im } \zeta_2 \sin \theta_1 \text{sh } \theta_2}{|\zeta_2|^2 - (\text{Im } \zeta_2)^2 \cos(2\theta_1) + (\text{Re } \zeta_2)^2 \text{ch}(2\theta_2)}, \quad (20)$$

где

$$\theta_1(z, \tau) = 2\xi\tau - 4\mu N_0 \frac{\text{Re } \zeta_2(z) - \xi}{Dc} + \arg \left[\frac{\beta(0)}{2\zeta_2(z)} \right],$$

$$\theta_2(z, \tau) = 2\eta\tau - 4\mu N_0 \times \frac{\text{Im } \zeta_2(z) - \eta}{Dc} + \ln \left[\frac{\text{Re } \zeta_2(z) |\beta(0)|}{2 \text{Im } \zeta_2 |\zeta_2(z)|} \right],$$

$$\zeta_2(0) = \lambda_2.$$

Численное решение уравнения (18), выполненное при условии

$$2\mu c(z) - b(z)a = \text{const} > 0,$$

показало, что с ростом z мнимая часть $\zeta_n(z)$ монотонно растет. Действительная часть может в зависимости от значений граничных значений вначале расти (при $|\zeta_2| < \omega|\mu|$), достигая максимума в области $\sim \omega\mu$ и затем асимптотически стремится к нулю для всех граничных значений. Фазовый сдвиг, т. е. последний член в выражении для θ_1 , также стремится к нулю с ростом z . Это означает, в частности, что бризер, отвечающий на границе ($z = 0$) паре собственных значений $\lambda_1 = -\lambda_2^*$, в процессе усиления трансформируется в пару солитон–антисолитон с растущими пропорционально $\text{Im } \zeta_1(z)$ амплитудами и с увеличивающимся между ними расстоянием. На рис. 1 показано решение (20) через равные интервалы «физического» времени t для скоростей накачки, таких что

$$(2c\mu - ba)D^2 = 1, \quad D \text{Im } \zeta(0) = D \text{Re } \zeta(0) = 1.$$

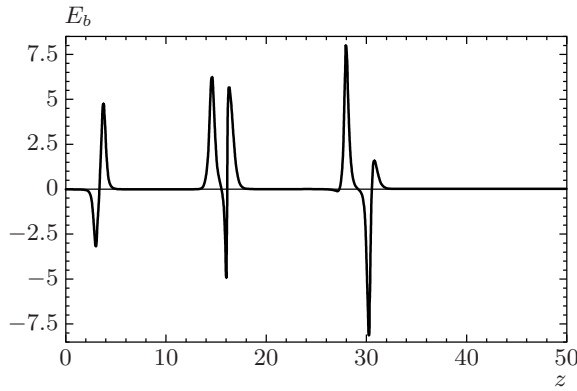


Рис. 1. Динамика усиливающегося бризера через равные интервалы времени t . Единицы произвольны

В этом разделе солитонные решения получены для специально подобранных значений констант (14). В то же время эти решения остаются приближенно справедливыми и при нарушении этого условия для конечного времени τ , при котором вклад накачки остается малым. Неравенства (15) означают, что число электронов, перенесенных на верхний уровень за все время процесса, мало по сравнению с их общим числом в активной среде. Это условие может быть выполнено, если нижний уровень двухуровневого перехода совпадает с основным. Как видно из полученного решения, рост амплитуды солитона может наблюдаться и при выполнении условий (15).

Отметим следующую особенность полученных солитонных решений. В них можно переходить к формальным пределам $a = 0$ или $\mu = 0$, при этом решения не теряют солитонных свойств. Это говорит о том, что оба механизма, первый, связанный с переносом электронов между уровнями (в уравнениях Блоха $\mu \neq 0$), и второй, связанный с модуляцией частоты ($a \neq 0$), независимо приводят к рождению солитонов или бризеров. В то же время совместное действие этих механизмов приводит к новым, не солитонным решениям вида (12) и к новым свойствам системы.

3. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА–БЛОХА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ПЕРЕХОДА С НАКАЧКОЙ

Рассмотрим Λ -схему, в которой верхнему уровню (обозначен 1 на рис. 2) отвечает магнитный момент

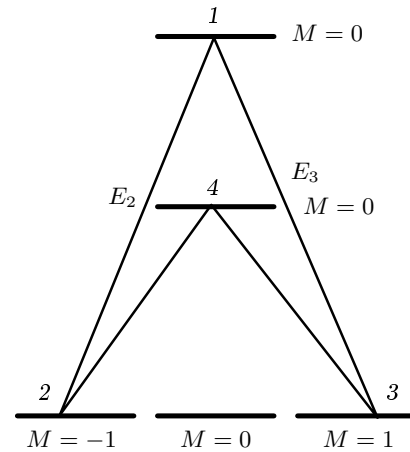


Рис. 2. Схема переходов с изменением проекции магнитного момента на единицу

$J = 0$ и нижнему уровню $J = 1$. Переходы $1 \leftrightarrow 2, 3$ происходят с изменением проекции магнитного момента на единицу $\Delta M = -1, 1$. Эти переходы взаимодействуют с ортогональными друг другу проекциями поляризации $E_{2,3}$ электрического поля, распространяющегося вдоль x . Уравнения Максвелла в приближении малой плотности активных молекул, аналогичному использованному выше, имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{\epsilon_\infty}} \frac{\partial}{\partial x}\right) E_j = i \frac{N_0 \omega_j}{2c\epsilon_\infty \epsilon_0} (\mu_{1j}^* \rho_{1j} - \mu_{1j} \rho_{j1}), \quad j = 2, 3. \quad (21)$$

Уравнения Блоха для матрицы плотности с компонентами ρ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, двухуровневой вырожденной среды, взаимодействующей с этим полем, имеют вид

$$\begin{aligned} -i\partial_t \hbar \rho_{12} &= \mu_{13} \rho_{32} E_3 + \Delta_2 E_2 \rho_{12} - (\rho_{11} - \rho_{22}) \mu_{12} E_2 - \hbar \omega_2 \rho_{12}, \\ -i\hbar \partial_t \rho_{13} &= \mu_{12} \rho_{23} E_2 + \Delta_3 E_3 \rho_{13} - (\rho_{11} - \rho_{33}) \mu_{13} E_3 - \hbar \omega_3 \rho_{13}, \\ -i\hbar \partial_t \rho_{23} &= (\mu_{21} \rho_{13} E_2 - \mu_{13} \rho_{21} E_3), \\ -i\hbar \partial_t \rho_{11} &= E_2 (\mu_{12} \rho_{21} - \mu_{21} \rho_{12}) + E_3 (\mu_{13} \rho_{31} - \mu_{31} \rho_{13}) + c, \\ -i\hbar \partial_t \rho_{kk} &= E_k (\mu_{k1} \rho_{1k} - \mu_{1k} \rho_{k1}) + c_k, \quad k = 2, 3. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $\Delta_j = (\mu_{11} - \mu_{jj})/\hbar$, μ_{ij} — элементы дипольного момента среды.

Для системы уравнений (21), (22) удается построить представление Лакса только в случае $\Delta_j = 0$,

$\mu_{12} = \mu_{13}$. Как и выше, простым сдвигом фазы недиагональных элементов матрицы плотности на постоянную величину можно привести коэффициенты μ_{1k} к действительному виду. Перейдем в лабораторную систему отсчета и к перенормированным переменным:

$$z = x\omega_2\mu_{12}^2 N_0 (2\hbar c \epsilon_\infty \epsilon_0)^{-1}, \quad \tau = t - \sqrt{\epsilon_\infty} x/c.$$

Обозначим

$$\mathcal{E}_j = E_j \mu_{1j} \hbar^{-1}, \quad R_j^\pm = \rho_{1j} \pm \rho_{j1}, \quad j = 2, 3,$$

$$R_1^\pm = \rho_{23} \pm \rho_{32}, \quad \omega_2 = \omega_3 = \omega$$

и перепишем уравнения Максвелла–Блоха для

$\Delta_j = 0, \mu_{12} = \mu_{13}$ в виде

$$\begin{aligned} \partial_\tau R_k^+ &= i(-1)^{k+1} \mathcal{E}_k R_1^- - i\omega R_k^-, \\ \partial_\tau R_k^- &= i(-1)^{k+1} \mathcal{E}_k R_1^+ - \\ &\quad - i\omega R_k^+ - 2i(\rho_{11} - \rho_{jj}) \mathcal{E}_k, \\ \partial_\tau R_1^+ &= iR_3^- \mathcal{E}_2 + iR_2^- \mathcal{E}_3, \\ \partial_\tau R_1^- &= iR_3^+ \mathcal{E}_2 - iR_2^+ \mathcal{E}_3, \\ \partial_\tau \rho_{11} &= -i\mathcal{E}_2 R_2^- - i\mathcal{E}_3 R_3^- + c, \\ \partial_\tau \rho_{kk} &= i\mathcal{E}_k R_k^- + c_1, \\ \partial_z \mathcal{E}_k &= iR_k^-, \end{aligned} \quad (23)$$

здесь $k = 2, 3$.

Представление Лакса системы (23) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Psi = \begin{bmatrix} -2i\lambda & \mathcal{E}_2 & \mathcal{E}_3 \\ -\mathcal{E}_2 & 0 & 0 \\ -\mathcal{E}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Psi \equiv \mathbf{L}_2 \Psi, \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Psi = \frac{1}{4\lambda^2 - \omega^2} \begin{bmatrix} 4i\lambda\rho_{11} & \omega R_2^+ + 2\lambda R_2^- & \omega R_3^+ + 2\lambda R_3^- \\ -\omega R_2^+ + 2\lambda R_2^- & 4i\lambda\rho_{22} & -2i\lambda R_1^+ + i\omega R_1^- \\ -\omega R_3^+ + 2\lambda R_3^- & -2i\lambda R_1^+ - i\omega R_1^- & 4i\lambda\rho_{33} \end{bmatrix} \Psi \equiv \mathbf{A}_2 \Psi. \quad (25)$$

В системе (23) учитывается накачка верхнего ($\propto c$) и нижнего ($\propto c_1$) уровней. В представлении Лакса с матрицей \mathbf{L}_2 , выбранной нами в виде (24), можно включить только накачку верхнего уровня. Это накачка учитывается дополнительной зависимостью спектрального параметра от переменной z :

$$\frac{\partial}{\partial z} \lambda = -\frac{2c(z)\lambda}{4\lambda^2 - \omega^2}. \quad (26)$$

Не составляет труда включить в это представление Лакса и накачку нижнего уровня $\propto c_1$. Для этого к матрице \mathbf{L}_2 следует добавить матрицу, пропорциональную единичной

$$-i\lambda \frac{2c_1}{c - c_1} \mathbf{I}.$$

Однако, поскольку это приводит к очевидным изменениям результатов, положим для простоты $c_1 = 0$.

Взаимодействие предельно короткого импульса, имеющего длительность меньшую, чем π/ω , с многоуровневой средой имеет качественные отличия от аналогичного взаимодействия квазимонохроматических волн. Нерезонансный характер взаимодействия предельно коротких импульсов проявляется в том,

что соответствующие эволюционные уравнения имеют более универсальное применение и более просты, чем в случае квазимонохроматических волн. В качестве физического примера, подтверждающего такую универсальность, рассмотрим случай четырехуровневой среды с двумя парами переходов (двойная Λ -схема), при которых магнитный момент меняется на единицу при переходе с уровня 1 или 4 на уровни 2 и 3 в процессе взаимодействия с двухкомпонентным электрическим полем, см. рис. 2.

Покажем, что редуцированные уравнения Максвелла–Блоха, описывающие такое взаимодействие, могут быть сведены к интегрируемой модели (23). Запишем уравнения для волновых функций ψ_k уровней $k = 1-4$ в следующем виде:

$$-i\hbar\partial_t \psi_1 = \mu_{12}\psi_2 E_2 + \mu_{13}\psi_3 E_3 + \hbar\omega_1 \psi_1, \quad (27)$$

$$-i\hbar\partial_t \psi_2 = \mu_{12}\psi_1 E_2 + \mu_{24}\psi_4 E_2 + \hbar\omega_2 \psi_2, \quad (28)$$

$$-i\hbar\partial_t \psi_3 = \mu_{13}\psi_1 E_3 + \mu_{34}\psi_4 E_3 + \hbar\omega_3 \psi_3, \quad (29)$$

$$-i\hbar\partial_t \psi_4 = \mu_{42}\psi_2 E_2 + \mu_{43}\psi_3 E_3 + \hbar\omega_4 \psi_4. \quad (30)$$

Уравнения Максвелла в том же приближении малой плотности среды, что и использованное выше, имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{\epsilon_\infty}} \frac{\partial}{\partial z}\right) E_j = i \frac{N_0 \omega_j}{2c\epsilon_\infty \epsilon_0} \times \\ \times [(\mu_{1j}\psi_1 + \mu_{4j}\psi_4)\psi_j^* - (\mu_{1j}\psi_1 + \mu_{4j}\psi_4)^* \psi_j], \quad (31)$$

где $j = 2, 3$. Считая, что $\omega_2 = \omega_3$, $\mu_{12} = \mu_{13}$, $\mu_{42} = \mu_{43}$ и эти коэффициенты действительны, перепишем систему (27)–(31) в виде

$$-i\partial_t \phi = \mu \hbar^{-1} (\psi_2 E_2 + \psi_3 E_3) + \omega_+ \psi + \omega_- \times \\ \times \frac{\mu_{12}\psi_1 - \mu_{24}\psi_4}{\mu}, \quad (32)$$

$$-i\partial_t \psi_k = \mu \hbar^{-1} E_k \phi + \omega_2 \psi_k, \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{\epsilon_\infty}} \frac{\partial}{\partial z}\right) E_j = i \frac{\mu N_0 \omega_j}{2c\epsilon_\infty \epsilon_0} (\phi \psi_j^* - \phi^* \psi_j), \quad (34) \\ j = 1, 2.$$

где

$$\omega_\pm = \frac{\omega_1 \pm \omega_4}{2}, \quad \phi = \frac{\mu_{12}\psi_1 + \mu_{42}\psi_4}{\mu}, \\ \mu = (\mu_{12}^2 + \mu_{42}^2)^{1/2}.$$

Для того чтобы эта система была эквивалентна системе (23), необходимо устранить последний член в правой части уравнения (32). Это можно сделать приближенно, полагая, что $\omega_+ \gg \omega_-$. С другой стороны, система (32)–(34) имеет решение

$$\mu_{12}\psi_1 \equiv \mu_{42}\psi_4, \quad \forall x, t,$$

которое также сводит эту систему к интегрируемой системе (23) для всех ω_\pm .

4. ДИНАМИКА ПОЛЯРИЗАЦИИ СОЛИТОНОВ В ВЫРОЖДЕННОЙ СРЕДЕ С НАКАЧКОЙ

Для построения солитонных решений (23) необходимо, как отмечено выше, фиксировать устойчивое вакуумное решение модели. Считаем, что заселенность подуровней нижнего уровня больше заселенности верхнего уровня в течение всего процесса. Заселенности магнитных подуровней нижнего уровня в начальный момент не равны. Для простоты полагаем, что начальные заселенности уровней

$$N_k = \rho_{kk}(z, 0), \quad k = 1, 2, 3,$$

не зависят от z . Отметим, что в реальной системе заселенность верхнего уровня может быть вызвана тепловым механизмом.

Вакуумное решение, на фоне которого распространяются солитоны, выберем в виде

$$E_{2,3}(z, \tau) = 0, \quad R_{2,3}^\pm(z, \tau) = 0, \\ \rho_{11}(z, \tau) = N_1 + c\tau, \quad \rho_{kk}(z, \tau) = N_k, \quad (35) \\ k = 2, 3.$$

Ограничимся временным интервалом

$$c\tau \ll N_0 - N_1, \quad N_0 = \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33}.$$

При этом решение (35) неизменно до и после прохождения солитона. При $c\tau \geq N_0 - N_1$ происходит генерация радиационного решения, состоящего из пакета нелинейных пульсаций, осциллирующих вокруг среднего значения, которое растет пропорционально \sqrt{cz} , $z \rightarrow \infty$.

Аналитический аппарат для изучаемой модели в основном аналогичен аппарату, развитому Манакковым для двухкомпонентного нелинейного уравнения Шредингера [10]. Результаты этой работы после некоторой модификации, связанной с эволюцией данных рассеяния и зависимостью λ от z , могут быть применены для исследуемой модели.

Задача (24), (25) имеет два набора решений — функции Йоста $\varphi_i(\tau, z; \lambda)$ и $\Psi_i(\tau, z, \lambda)$ с асимптотиками

$$(\varphi_i)_k = \delta_{ik} \exp[-2I_k \lambda(z)\tau], \quad \tau \rightarrow -\infty,$$

$$(\Psi_i)_k = \delta_{ik} \exp[-2I_k \lambda(z)\tau],$$

$$\tau \rightarrow \infty, \quad I_1 = i, \quad I_m = 0, \quad m = 2, 3.$$

Матрица рассеяния $\mathbf{S} = \{\alpha_{ij}\}$ определяется соотношением

$$\varphi_i(\tau, z; \lambda) = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}(z; \lambda) \Psi_j(\tau, z; \lambda).$$

Данные рассеяния включают непрерывный спектр для действительного λ :

$$R_m(z; \lambda) = \alpha_{1m}(z; \lambda) (\alpha_{11}(z; \lambda))^{-1}, \quad \text{Im } \lambda = 0, \quad (36)$$

и связанные состояния, состоящие из нулей ζ_k в области $\text{Im } \lambda > 0$. Каждому такому нулю отвечают коэффициенты

$$C_m(z; \zeta_k(z)) = \frac{\alpha_{1m}(z; \zeta_k(z))}{\alpha'_{11}(z; \zeta_k(z))}, \quad m = 2, 3. \quad (37)$$

Здесь

$$\alpha'_{11} = \frac{d\alpha_{11}}{d\zeta}, \quad \zeta = \zeta_k.$$

Зависимость этих данных рассеяния от z находим по формуле

$$\partial_z \mathbf{S} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \mathbf{A}_2 \mathbf{S} - \mathbf{S} \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \mathbf{A}_2. \quad (38)$$

Формула (38) справедлива для асимптотик, определяемых вакуумным решением (35), поскольку выбраны условия, при которых накачка и инжектированные импульсы не изменяют этих асимптотик. Для этого решения (35) при условии выполнения (14) матрица \mathbf{A}_2 при $\tau \rightarrow \pm\infty$ диагональна. В этом случае зависимость $C_m(z; \zeta_k)$ от z , которую находим из (38), имеет простой вид

$$C_m(z; \zeta_k) = C_m(0; \zeta_k) \times \exp \left\{ \int_0^z \frac{4i\zeta_k(z) [\rho_{11}(z, 0) - \rho_{mm}(z, 0)]}{4\zeta_k^2(z) - \omega^2} dz \right\}. \quad (39)$$

Аналогичное выражение для зависимости $R_m(z; \lambda)$ мы здесь не приводим, поскольку в этой работе вкладом непрерывного спектра пренебрегаем.

Для функций

$$\chi(\tau, z) = [\Psi_1(\tau, z) \exp(2i\zeta(z)\tau), \Psi_2(\tau, z), \Psi_3(\tau, z)]^T$$

имеет место «треугольное представление»:

$$\chi_1(\tau, z; \xi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \times \int_{\mathcal{C}} \sum_m \frac{R_m(z; \zeta) \chi_m(\tau, z; \zeta) \exp(2i\zeta(z)\tau)}{\zeta(z) - \xi(z)} d\zeta, \quad (40)$$

$$\chi_m(\tau, z; \xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{m2} \\ \delta_{m3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{R_m^*(z; \zeta) \chi_1(\tau, z; \zeta) \exp(-2i\zeta(z)\tau)}{\zeta(z) - \xi(z)} d\zeta. \quad (41)$$

Здесь δ_{mk} — дельта-функция, $m = 2, 3$. Интегрирование проводится по контуру \mathcal{C} , который включает действительную ось и проходит выше всех полюсов

в верхней полуплоскости и по зеркальному отражению этого контура $\tilde{\mathcal{C}}$.

Для солитонного спектра, состоящего из N полюсов ζ_k , таких что либо ζ_k чисто мнимые, либо входят парами $\zeta_n = -\zeta_n^*$, уравнения (40), (41) приводятся к алгебраической системе

$$\chi_1(\tau, z; \xi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{n=1}^N \sum_{m=2,3} \frac{C_{mn}(z; \zeta_n) \chi_m(\tau, z; \zeta_n) \exp(2i\zeta_n \tau)}{\zeta_n(z) - \zeta(z)}, \quad (42)$$

$$\chi_m(\tau, z; \xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{m2} \\ \delta_{m3} \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^N \frac{C_{mn}^*(z; \zeta_n^*) \chi_1(\tau, z; \zeta_n^*) \exp(-2i\zeta_n^* \tau)}{\zeta_n^*(z) - \zeta(z)}. \quad (43)$$

Потенциал $\mathcal{E}_m(z, \tau)$ восстанавливается с помощью формулы

$$\mathcal{E}_m(z, \tau) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} 2i\zeta \chi_m(\tau, z)(1, 0, 0). \quad (44)$$

В случае одного полюса $\lambda_1 = \zeta_1(0) = i\eta$, решая алгебраическую систему уравнений (42), (43), находим, что односолитонное решение описывается проектором

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{m_i m_j^*}{\sum_{k=1}^3 |m_k|^2}. \quad (45)$$

Здесь m_k — векторы, которые находим с учетом решения уравнения (26) для $\lambda = i\eta$, $c(z) = \text{const}$ и $\rho_{kk}(z) = N_k = \text{const}$:

$$m_1 = \alpha_1 \exp \left\{ 2\eta(0)\tau + N_1 \frac{2}{c} [\eta(z) - \eta(0)] \right\}, \quad (46)$$

$$m_k = \alpha_k \exp \left\{ N_k \frac{2}{c} [\eta(z) - \eta(0)] \right\}, \quad k = 2, 3.$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha_k^*$ и $\eta(z)$ — решение уравнения (26).

Компоненты поля \mathcal{E}_k определяются проектором

$$\mathcal{E}_k = -i(\lambda - \lambda^*) \mathcal{P}_{1k}. \quad (47)$$

Окончательно для односолитонного решения (47) получаем

$$\mathcal{E}_2 = \frac{2\eta(z)}{\text{ch} \left[\tilde{\theta}_2 + \phi_2 \right] + |\alpha_3^2/\alpha_1\alpha_2| \exp \left[-\tilde{\theta}_2 + 2\xi(N_3 - N_2) \right]}, \quad (48)$$

$$\mathcal{E}_3 = \frac{2\eta(z)}{\text{ch} \left[\tilde{\theta}_3 + \phi_3 \right] + |\alpha_2^2/\alpha_1\alpha_3| \exp \left[-\tilde{\theta}_3 - 2\xi(N_3 - N_2) \right]}, \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_2 &= 2\eta(0)\tau + (N_1 - N_2)\xi, \\ \tilde{\theta}_3 &= 2\eta(0)\tau + (N_1 - N_3)\xi, \\ \xi &= \frac{2}{c} [\eta(z) - \eta(0)], \quad \phi_k = \ln \left| \frac{\alpha_1}{\alpha_k} \right|, \quad k = 2, 3. \end{aligned}$$

Исследуем асимптотики решений (48), (49). Пусть $\xi(N_3 - N_2) > 0$, тогда

$$\mathcal{E}_3 \rightarrow 2\eta(z)\text{sech} \left[\tilde{\theta}_3 + \phi_3 \right], \quad \mathcal{E}_2 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty.$$

Полученное решение (48), (49) описывает преобразование пары солитонов $\mathcal{E}_{2,3}(z=0)$ в солитон $\mathcal{E}_3(z \rightarrow \infty)$. Процесс переноса энергии происходит на расстояниях

$$z_0 \sim c(N_2 - N_3)^{-2}$$

для больших z . Оценка справедлива для $z_0c \gg \gg \eta(0), \omega$. Этот эффект аналогичен комбинационному преобразованию солитонов, обнаруженному в [7], [8] в рамках модели взаимодействия квазимонохроматических волн с трехуровневой средой. Однако в отличие от результатов этих работ, здесь процесс конверсии определяется константой скорости накачки c . Обнаружено, что с ростом c эффективность процесса конверсии уменьшается. Это связано, как это видно из солитонного решения, с тем, что в процессе усиления происходит относительное выравнивание групповых скоростей и амплитуд солитонов. Можно показать, что в обратном пределе $c \rightarrow 0$ расстояние, на котором происходит полная конверсия солитонов, пропорционально $|N_3 - N_2|\eta^{-1}(0)$.

Исследуем динамику решения, отвечающего двум собственным значениям λ_j . Для этого упростим задачу, положив $N_2 = N_3$. Приведем формальное общее решение алгебраической системы (42), (43) для двух произвольных собственных значений $\lambda_{1,2}$. Однако в общем случае это решение для амплитуд полей комплексное. Поэтому, для того чтобы получить решения модели (23), следует ввести ограничения на вид λ_k и коэффициенты, чтобы обеспечить действительность потенциала $\mathcal{E}_{2,3}$. Напомним, что для данной задачи $\lambda_{1,2}$ должны быть либо чисто мнимыми, либо входить в виде $\lambda_1 = -\lambda_2^*$.

Пусть $\lambda_k = i\nu_k$, ν_k — произвольные комплексные числа, тогда общее, двухсолитонное решение имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} e^{\theta_1} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{\theta_2} + \right. \\ &+ \begin{pmatrix} d_1 \\ g_1 \end{pmatrix} e^{\theta_1 + \theta_1^* + \theta_2} + \\ &\left. + \begin{pmatrix} d_2 \\ g_2 \end{pmatrix} e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_2^*} \right] D^{-1}, \quad (50) \end{aligned}$$

где

$$D = 1 + p_1 e^{\theta_1 + \theta_1^*} + p_2 e^{\theta_1 + \theta_2^*} + p_2^* e^{\theta_2 + \theta_1^*} + p_3 e^{\theta_2 + \theta_2^*} + p_4 e^{\theta_1 + \theta_1^* + \theta_2 + \theta_2^*},$$

$$p_1 = \frac{q_{11}}{\nu_1 + \nu_1^*}, \quad p_2 = \frac{q_{12}}{\nu_1 + \nu_2^*}, \quad p_3 = \frac{q_{22}}{\nu_2 + \nu_2^*},$$

$$d_1 = \frac{(\nu_1 - \nu_2)(a_1 q_{21} - a_2 q_{11})}{(\nu_1 + \nu_1^*)(\nu_2 + \nu_1^*)},$$

$$d_2 = \frac{(\nu_2 - \nu_1)(a_2 q_{12} - a_1 q_{22})}{(\nu_2 + \nu_2^*)(\nu_1 + \nu_2^*)},$$

$$g_1 = \frac{(\nu_1 - \nu_2)(b_1 q_{21} - b_2 q_{11})}{(\nu_1 + \nu_1^*)(\nu_2 + \nu_1^*)},$$

$$g_2 = \frac{(\nu_2 - \nu_1)(b_2 q_{12} - b_1 q_{22})}{(\nu_2 + \nu_2^*)(\nu_1 + \nu_2^*)},$$

$$p_4 = \frac{|\nu_1 - \nu_2|^2 (q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21})}{(\nu_1 + \nu_1^*)(\nu_2 + \nu_2^*)|\nu_2^* + \nu_1|^2},$$

$$q_{ij} = \frac{a_i a_j^* + b_i b_j^*}{\nu_i + \nu_j^*}.$$

Двухсолитонное решение (23) отвечает двум действительным значениям $\nu_{1,2}$. Бризеро-подобное решение определяется соотношениями $\nu_{1,2} = \eta \mp i\xi$, $\eta > 0$. Показатели экспонент для вакуумного решения (35) следующие:

$$\theta_{2,3} = 2\nu_{2,3}(0)\tau + \frac{2N_{12}}{c} [\nu_{2,3}(z) - \nu_{2,3}(0)].$$

Численно обнаружено, что качественно форма бризерного решения для одной компоненты такая же, как изображенная на рис. 1.

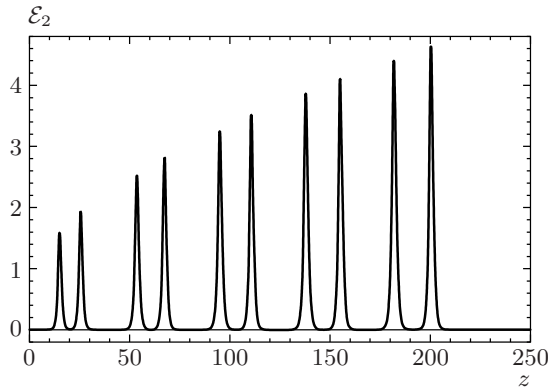


Рис. 3. Динамика солитонной пары для одной компоненты поля \mathcal{E}_2 через равные интервалы времени t . Единицы произвольны

Исследуем асимптотики решения (50) для двухсолитонного решения, для которого $\nu_{1,2}(0) = \eta_{1,2}$. Пусть $\eta_3 > \eta_2$ и накачка отсутствует ($c = 0$), тогда решение (50) при больших z разбивается на два солитона, причем солитон поля \mathcal{E}_2 с меньшей амплитудой имеет большую скорость. С ростом z расстояние между солитонами линейно растет. Накачка приводит к изменению динамики пары солитонов. Вначале ограничимся одной компонентой поляризации и выберем условие

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 1.1, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0.$$

Поскольку начальные заселенности магнитных подуровней нижнего уровня равны, вращения поляризации не происходит. Из рис. 3 видно, что асимптотически амплитуды усиливающихся солитонов выравниваются, а расстояние между ними растет значительно медленнее, чем в отсутствие накачки.

Присутствие второй компоненты поляризации приводит к изменению структуры солитонной пары. На рис. 4а, б показаны, соответственно, компоненты поля \mathcal{E}_2 и \mathcal{E}_3 в присутствии однородной накачки $c(z) = \text{const}$. Граничные и начальные значения параметров для компоненты \mathcal{E}_2 такие же, как и в случае, отвечающем изображенному на рис. 3, кроме $b_1 = 0.5, b_2 = 2$. Из этого рисунка видно, что динамика солитонных пар при наличии усиления существенно отличается от динамики пары в отсутствие накачки. В первом случае возникает подобие квазисвязанного состояния солитонов. Однако это состояние не сопровождается уменьшением энергии и обусловлено лишь асимптотическим выравниванием скоростей солитонов для произвольных начальных данных.

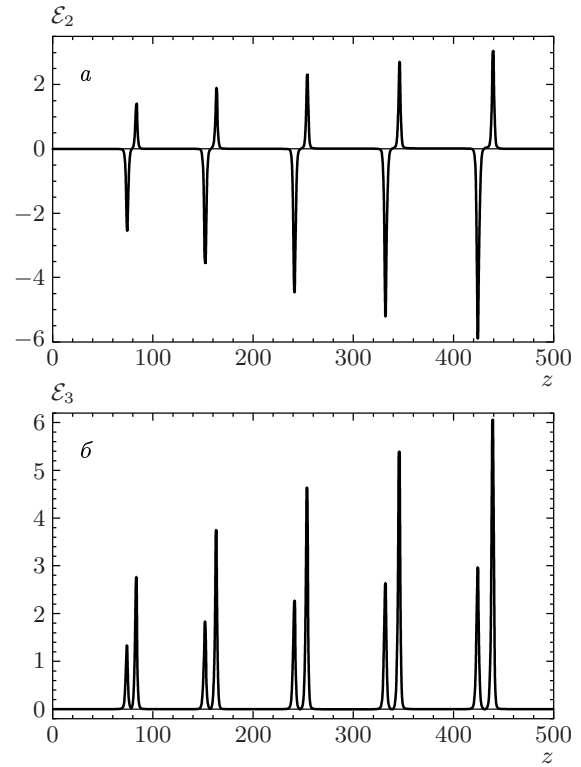


Рис. 4. Двухсолитонное решение системы (23) для однородной накачки через равные интервалы t . Амплитуды поля \mathcal{E}_2 (а) и \mathcal{E}_3 (б). Единицы произвольны

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалась динамика импульсов с длительностью, близкой к периоду осцилляций в двухуровневой среде, с учетом накачки. Солитонные решения были использованы для изучения особенностей динамики предельно коротких импульсов. В частности, на примере солитонных решений РУМБ, полученных в разд. 2, показаны новые возможности усиления солитонов в средах с ПДМ. Из этих решений следует, что в двухуровневой среде солитоны могут генерироваться практически без переброса электронов между уровнями 1 и 2, в отличие от обычного механизма рождения 2π -импульсов [9]. Формально это соответствует обращению в нуль дипольного момента среды в уравнениях Блоха (3)–(5). При этом плотность среды должна быть достаточно велика. Эти условия отвечают пределу

$$\mu \rightarrow 0, \quad N_0\mu \sim \mathcal{O}(1). \quad (51)$$

Если при этом ПДМ вносит вклад порядка единицы, то это приближение приводит к упрощенной интегрируемой системе уравнений (6). В этом пределе

ле также существуют солитонные решения, ассоциируемые с явлением самоиндуцированной прозрачности. В связи с этим отметим, что возможен вывод интегрируемых РУМБ на основе не приближения малой плотности, а приближения предельно малого дипольного момента μ_{12} .

Существование солитонов самоиндуцированной прозрачности, связанных только с ПДМ, возможно лишь вне рамок квазимонохроматического приближения, во временном диапазоне, когда поляризация среды мгновенно отслеживает изменение состояния уровней. Можно показать, используя представление Лакса (7), (8) после перехода к пределу (51), что необходимым начальным условием для генерации движущихся солитонов является частичная, но не полная инверсия среды, т. е. $R^+(0, z) \neq 0$. Ультракороткий импульс поля с длительностью порядка π/ω , приводит к возникновению когерентной связи между уровнями. В то же время электрическое поле вызывает нелинейные осцилляции электронов, находящихся на верхнем уровне, что и приводит к генерации устойчивых солитонов.

Наличие ПДМ также позволяет использовать новый, по сравнению с известными, механизм усиления солитонов. В рассмотренном в разд. 2 примере дополнительное поле, которое приводит к появлению члена, пропорционального b , в уравнении для недиагональной части матрицы плотности (3), в зависимости от знака, может приводить как к росту, так и к уменьшению амплитуды солитона. Данное свойство может быть использовано для модуляции пакета импульсов. Представляет интерес использование этого механизма усиления предельно короткого импульса для компенсации потерь световых импульсов, распространяющихся в длинных волоконных световодах.

Значения ПДМ варьируются в широких пределах для разных сред. Квантовый конфайнмент носителей в полупроводниках приводит к образованию дискретных зон с очень большими силами осцилляторов, связанных с межзонными переходами. В асимметричных квантовых ямах возможен ненулевой ПДМ. В работе [33] приводятся значения дипольных моментов для GaAs/Al_{0.14}Ga_{0.86} с Al_{0.3}Ga_{0.3}As-барьерами между ямами. Дипольные моменты в трехзонной схеме следующие:

$$\mu_{12} = 17.6\mu_0, \quad \mu_{13} = 11.1\mu_0, \quad \mu_{23} = 33.4\mu_0,$$

а соответствующие постоянные дипольные моменты следующие:

$$\Delta\mu_{12} = -77.8\mu_0, \quad \Delta\mu_{13} = -72.9\mu_0, \quad \Delta\mu_{23} = 4.9\mu_0,$$

где $\mu_0 = 1.6 \cdot 10^{-29}$ Кл·м. Отмечено, что существующие технологии позволяют увеличивать величину ПДМ по отношению к дипольному моменту перехода.

В настоящей работе не рассматривался вклад непрерывного действительного спектра задачи (7) в радиационное решение. В то же время развитый в работе аппарат позволяет изучать явления, связанные с генерацией соответствующих полей в рамках РУМБ. В общем случае, например, когда нижний уровень среды не совпадает с основным и его начальная заселенность мала, необходимо учитывать вклад радиационного решения. Это решение для некоторых начально-краевых условий сводится к трансценденту Пенлеве V [44].

В то же время здесь использовались условия, при которых вкладом радиационного решения можно пренебречь. Физически эти условия отвечают случаю, когда число электронов, перенесенных на верхний уровень вследствие накачки, много меньше общего числа электронов. Отметим, что некоторые виды слабых нелинейностей приводят к относительному подавлению радиационной части решения. Их можно учитывать в рамках теории возмущений, развитой автором для почти интегрируемых систем уравнений, к которым применим метод обратной задачи рассеяния с переменным спектральным параметром [42]. В экспериментальной лазерной физике известно, что во многих схемах существует порог по скорости накачки, ниже которого генерация не наблюдается [36]. В рамках исследованных выше моделей эта генерация отвечает радиационному решению.

Как показано в работе, в случае вырожденно-го перехода система уравнений Максвелла–Блоха с накачкой также интегрируема в рамках метода обратной задачи рассеяния и имеет многосолитонные решения. Причем поляризационные эффекты в двухуровневом усилителе могут приводить к качественному изменению динамики и формы импульсов в нелинейном режиме. В условиях накачки также изменяются скорость и взаимодействие солитонов, отвечающих разным компонентам поляризации. Найденные решения демонстрируют эффективное преобразование солитонных компонент поляризации при наличии различной начальной заселенности магнитных подуровней. Различие населенностей может быть вызвано действием магнитного поля, которое приводит к перераспределению электронов по магнитным подуровням. Таким образом, возникает солитонный аналог эффекта Фарадея, который можно изучать в рамках системы уравнений Максвелл-

ла-Блоха. В работе [17] этот эффект исследовался для солитонов в низкочастотном приближении, которое позволило свести задачу к дифференцированному нелинейному уравнению Шредингера. Однако при такой редукции системы уравнений теряется часть существенной информации, связанной со средой. Использование РУМБ позволяет исследовать влияние начального состояния среды на эволюцию предельно короткого импульса в среде. Как показывают полученные в настоящей работе результаты, это влияние может быть существенным.

Уравнения (6) не допускают прямого интегрируемого обобщения вида (23) на случай вырожденного перехода для ненулевого ПДМ. С другой стороны, в предельном случае очень малых μ , но для ненулевой поляризации среды на переходах $1 \leftrightarrow 2, 3$, система (22) разбивается на две независимые системы, интегрируемые по отдельности. Каждая из них допускает солитонные решения.

В заключение заметим, что некоторые из уравнений Максвелла-Блоха, рассмотренные в настоящей работе, могут быть использованы и для анализа динамики предельно короткого импульса с длительностью $\gg \pi/\omega_0$, однако ряд эффектов, предсказанных выше, возможен лишь для длительностей импульсов $\gtrsim \pi/\omega_0$. К таким эффектам относится явление самоиндуцированной прозрачности, обусловленное ненулевым ПДМ, описанное выше.

Автор выражает благодарность С. В. Манакову за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
2. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).
3. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
4. А. И. Маймистов, КЭ **11**, 567 (1984).
5. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, ЖЭТФ **87**, 1594 (1984).
6. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, ЖЭТФ **94**, 61 (1988).
7. Л. А. Большов, Н. Н. Елкин, В. В. Лиханский, М. И. Персианцев, ЖЭТФ **88**, 47 (1985).
8. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **92**, 46 (1987).
9. G. L. Lamb, *Rev. Mod. Phys.* **43**, 99 (1971).
10. С. В. Манаков, ЖЭТФ **83**, 68 (1982).
11. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **115**, 1168 (1999).
12. Е. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин, А. Н. Ораевский, А. В. Усков, *Письма в ЖЭТФ* **47**, 523 (1988).
13. Е. М. Беленов, А. В. Назаркин, *Письма в ЖЭТФ* **51**, 288 (1990).
14. Е. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущиповский, ЖЭТФ **100**, 762 (1991).
15. A. E. Kaplan and P. L. Schkolnikov, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2316 (1995).
16. S. V. Sazonov and E. V. Trifonov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, L7 (1994).
17. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **107**, 20 (1995).
18. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **114**, 1393 (1998).
19. M. Wittmann, A. Nazarkin, and G. Korn, *Optics Lett.* **26**, 5 (2001).
20. B. I. Greene, J. F. Federici, D. R. Dykaar, R. R. Jones, and P. H. Bucksbaum, *Appl. Phys. Lett.* **59**, 893 (1991).
21. D. You, D. R. Dykaar, and P. H. Bucksbaum, *Optics Lett.* **18**, 290 (1993).
22. A. Nazarkin and B. Korn, *Phys. Rev. A* **58**, R61 (1998).
23. R. K. Bullough and F. Akhmad, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 330 (1971).
24. J. D. Gibbon, P. J. Coudrey, J. K. Eilbeck, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math. Gen.* **6**, 1237 (1973).
25. P. J. Coudrey, J. K. Eilbeck, J. D. Gibbon, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math. Gen.* **6**, L53 (1973).
26. J. K. Eilbeck, P. J. Coudrey, J. D. Gibbon, and R. K. Bullough, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 237 (1973).
27. P. J. Coudrey, J. K. Eilbeck, J. D. Gibbon, and R. K. Bullough, *Let. Nuovo Cimento.* **8**, 775 (1973).
28. А. И. Маймистов, С. О. Елютин, *Опт. и спектр.* **70**, 101 (1991).
29. A. I. Maimistov and S. O. Elyutin, *Chaos, Solitons & Fractals* **80**, 369 (1997).
30. R. Bavli and Y. B. Band, *Phys. Rev. A* **43**, 5039 (1991).

31. J. P. Lavoine, C. Hoerner, and A. A. Villaeys, *Phys. Rev. A* **44**, 5947 (1991).
32. G. B. Hadjichristov, M. D. Stamova, and P. P. Kircheva, *J. Phys. B: Mol. Opt.* **28**, 3441 (1995).
33. S. Kócinac, Z. Ikoníć, and V. Milanović, *Optics Commun.* **140**, 89 (1997).
34. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, *Physica D* **138** 134 (2000).
35. С. В. Манаков, *ЖЭТФ* **65**, 505 (1973).
36. О. Звелто, *Физика лазеров*, Мир, Москва (1979).
37. A. A. Apolonsky, A. A. Zabolotskii, V. P. Drachev, and E. I. Zinin, *Proc. SPIE* **2041**, 385 (1993).
38. A. Hasegawa and Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications*, Oxford: O.U.P. (1995).
39. С. П. Бурцев, А. В. Михайлов, В. Е. Захаров, *ТМФ* **70**, 323 (1987).
40. A. V. Rybin, *J. Phys. A* **24**, 5235 (1991).
41. S. P. Burtsev and I. R. Gabitov, *Phys. Rev. A.* **49**, 2065 (1994).
42. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **120**, 740 (2001).
43. S. P. Burtsev, I. R. Gabitov, and V. E. Zakharov, *Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, World Scientific, Singapour, (1988), p. 897.
44. *Painlevé Transcendents. Their Asymptotics and Physical Applications*, NATO ASI Series B: Physics **278**, ed. by P. Winternitz and D. Levi, Plenum, New York (1992).
45. S. P. Burtsev, *Phys. Lett. A.* **177**, 341 (1993).
46. A. V. Kitaev, A. V. Rybin, and J. Timonen, *J. Phys. A* **26**, 3583 (1993).