

ПРЕДБИФУРКАЦИОННОЕ УСИЛЕНИЕ ШУМА В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Ю. А. Кравцов^{a*}, С. Г. Бильчинская^b, О. Я. Бутковский^{c**},

И. А. Рычка^b, Е. Д. Суrowяткина^{b***}

^a *Институт космических исследований Российской академии наук
117810, Москва, Россия*

*Space Research Center, Polish Academy of Sciences
00716, Warsaw, Poland*

^b *Камчатский государственный технический университет
683003, Петропавловск-Камчатский, Россия*

^c *Владимирский государственный университет
600029, Владимир, Россия*

Поступила в редакцию 13 апреля 2001 г.

Исследовано явление предбифуркационного усиления шума в нелинейных системах при бифуркации удвоения периода. Рассмотрение проведено на примере бифуркации удвоения периода в дискретной системе (квадратичное отображение), но многие обнаруженные закономерности имеют общий характер. Получены оценки для дисперсии флуктуаций как в линейном режиме (вдали от порога бифуркации), так и в нелинейном режиме (вблизи порога бифуркации). Показано, что дисперсия вынужденных флуктуаций в сильнонелинейном режиме пропорциональна не дисперсии, как в линейном режиме, а среднеквадратичному значению шумовой силы. Отмечена возможность измерения шумов, действующих в нелинейных физических системах, на основе данных о коэффициенте предбифуркационного усиления шума.

PACS: 05.40.-a, 05.45.Gg, 05.45.Pq

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, при приближении к порогу генерации уровень шумов в системе существенно возрастает (явление предгенерационного усиления шума [1]). Подобных же явлений можно ожидать и в окрестности точек бифуркации. Как было показано в работах [2–4], при приближении к критическим значениям бифуркационного параметра может происходить усиление слабых сигналов, обусловленное уменьшением (вплоть до обращения в нуль в критической точке) декремента затухания. Очевидно, явление предбифуркационного усиления слабых сигналов должно сопровождаться и усилением слабых шумов. Это явление, которое естественно было

бы назвать предбифуркационным усилением шума, впервые было проанализировано в работе [5], посвященной анализу «шумовых предвестников» («noisy precursors») нелинейных неустойчивостей. Имея в виду глубокое сходство между фазовыми переходами, с одной стороны, и бифуркационными переходами в нелинейных системах, с другой [1], явление предбифуркационного усиления шума можно рассматривать как аналог усиления флуктуаций при приближении к точке фазового перехода.

Предбифуркационные шумы в линейном приближении были исследованы в работе [5] для трех видов бифуркаций: бифуркация появления седла-фокуса, бифуркация спонтанного нарушения симметрии и бифуркация удвоения периода. Однако развитая в [5] линейная теория игнорирует нелинейные эффекты и предсказывает неограниченный рост флуктуаций при приближении к точке бифуркации.

*E-mail: kravtsov@asp.iki.rssi.ru

**E-mail: olegb@vpti.vladimir.ru

***E-mail: elena@marine.kamchatka.su

Главная задача данной работы — провести нелинейный анализ предбифуркационного усиления шума и оценить дисперсию вынужденных флуктуаций непосредственно в точке бифуркации. Рассмотрение проведено на частном примере бифуркации удвоения периода в дискретной системе (квадратичное отображение), но выявленные черты явления характерны и для других типов бифуркаций. Материал статьи расположен в следующем порядке. После краткого изложения постановки проблемы (разд. 2) мы обратимся сначала к линейной (разд. 3), а затем к нелинейной (разд. 4) теориям. В разд. 5 мы оценим дисперсию постбифуркационных шумов, т. е. шумов, которые устанавливаются после прохождения точки бифуркации.

В разд. 6 выявлено новое качество пред- и постбифуркационных шумов, заключающееся в ослаблении дисперсии флуктуаций при быстром прохождении точки бифуркации. Одновременно в разд. 6 получены оценки дискретного времени n_{trans} установления стационарных флуктуаций, показывающие, что время установления обратно пропорционально среднеквадратичному значению флуктуационной силы. Оценки, полученные в разд. 3–6, проиллюстрированы в разд. 7 результатами численного моделирования. Наконец, в разд. 8 указаны возможности, которые предоставляет явление предбифуркационного усиления шума для измерения слабых шумов в нелинейных системах.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим квадратичное отображение

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad F(x_n) = \mu - x_n^2, \quad (1)$$

которое, как известно, допускает бифуркацию удвоения периода при критическом значении управляющего параметра $\mu_{c1} = 3/4$ [6]. При достижении критического значения $\mu = \mu_{c1}$ неподвижная точка

$$\bar{x}(\mu) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \mu} \quad (2)$$

отображения (1) теряет устойчивость. Потеря устойчивости в критической точке в конечном счете и является причиной предбифуркационного усиления шумов.

Введем в отображение (1) флуктуационное воздействие f_n и исследуем свойства зашумленного квадратичного отображения

$$x_{n+1} = \mu - x_n^2 + f_n. \quad (3)$$

Положим

$$\mu = \mu_{c1} - \lambda = \frac{3}{4} - \lambda, \quad (4)$$

$$x_n = \bar{x}(\mu) + \xi_n, \quad (5)$$

где $\lambda = \mu_{c1} - \mu$ — «запас устойчивости» вблизи порога бифуркации. Тогда в окрестности критического значения $\mu = \mu_{c1}$ неподвижную точку (2) можно представить в виде

$$\bar{x}(\mu) = -\frac{1}{2} + \sqrt{1 - \lambda} \approx \frac{1}{2}(1 - \lambda) + \frac{1}{8}\lambda^2 + \dots \quad (6)$$

Подставляя (4) и (5) в уравнение (2), получаем зашумленное отображение для возмущения $\xi_n = x_n - \bar{x}(\mu)$:

$$\xi_{n+1} = -2\bar{x}(\mu)\xi_n - \xi_n^2 + f_n. \quad (7)$$

Задача данной работы состоит в оценке дисперсии σ_ξ^2 и среднего квадрата флуктуации $\langle \xi_n^2 \rangle$ как на удалении (линейный режим), так и в непосредственной близости (нелинейный режим) к порогу бифуркаций.

3. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Пренебрегая в (7) квадратичным слагаемым ξ_n^2 , для возмущения $\xi_n = x_n - \bar{x}(\mu)$ получаем линейное уравнение

$$\xi_{n+1} = -\gamma\xi_n + f_n, \quad (8)$$

где величина

$$\gamma = 2\bar{x}(\mu) \approx 1 - \lambda + \lambda^2/4 + \dots \quad (9)$$

представляет собой мультипликатор отображения (1) в окрестности неподвижной точки $\bar{x}(\mu)$. Решение линейного разностного уравнения (8) с начальным значением $\xi_0 = 0$ может быть получено итерациями:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= f_0, \\ \xi_2 &= -\gamma\xi_1 + f_1 = -\gamma f_0 + f_1, \\ \xi_3 &= -\gamma\xi_2 + f_2 = f_2 - \gamma f_1 + (-\gamma)^2 f_0, \\ &\vdots \\ \xi_{n+1} &= f_n + (-\gamma)f_{n-1} + \\ &\quad + (-\gamma)^2 f_{n-2} + \dots + (-\gamma)^n f_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Последнюю формулу можно записать в виде

$$\xi_{n+1} = \sum_{k=0}^n (-\gamma)^{n-k} f_k. \quad (11)$$

Примем предположение о независимости флуктуаций f_j и f_k :

$$\langle f_j f_k \rangle = \sigma_f^2 \delta_{jk}, \quad (12)$$

где δ_{jk} — символ Кронекера, а $\sigma_f^2 = \langle f_k^2 \rangle$ — дисперсия флуктуационного воздействия. Тогда для среднего квадрата флуктуаций $\langle \xi_{n+1}^2 \rangle$ получим выражение

$$\begin{aligned} \langle \xi_{n+1}^2 \rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^n (-\gamma)^{n-k} f_k \right\rangle^2 = \\ &= \sum_{k=0}^n \gamma^{2(n-k)} \sigma_f^2 = \sigma_f^2 \frac{1 - \gamma^{2(n+1)}}{1 - \gamma^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

В установившемся состоянии ($n \rightarrow \infty$) величиной $\gamma^{2(n+1)}$ в (13) можно пренебречь, так как $|\gamma| < 1$, и в результате средний квадрат флуктуаций $\langle \xi_{n+1}^2 \rangle$ оказывается равным

$$\langle \xi^2 \rangle = \langle \xi_{n+1}^2 \rangle_{n \rightarrow \infty} = \frac{\sigma_f^2}{1 - \gamma^2}. \quad (14)$$

Воспользовавшись разложением (9), средний квадрат флуктуаций $\langle \xi^2 \rangle$ вблизи бифуркационного порога $\gamma = \gamma_c = 1$ можно представить в виде

$$\langle \xi^2 \rangle = \frac{\sigma_f^2}{2\lambda}, \quad 2\lambda \approx 1 - \gamma^2. \quad (15)$$

Согласно (14) и (15), вдали от бифуркационного порога, скажем, при $\gamma \leq 1/2$, средний квадрат флуктуаций $\langle \xi^2 \rangle$ сравним с дисперсией внешнего шума σ_f^2 , но при приближении к порогу $\gamma = \gamma_c$ флуктуации в системе неограниченно возрастают.

4. ОЦЕНКИ УРОВНЯ ФЛУКТУАЦИЙ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ

Формулы (14) и (15), выведенные из линеаризованных уравнений (8), при приближении к бифуркационному порогу $\gamma \rightarrow 1$, или, что то же самое, при $\lambda \rightarrow 0$, разумеется, неприменимы. Однако они позволяют получить оценку флуктуаций непосредственно на пороге бифуркации ($\gamma = 1, \lambda = 0$) из следующих простых соображений. В «линейном» режиме флуктуации ξ_n представляют собой сумму большого числа независимых слагаемых (11). Поэтому в силу центральной предельной теоремы последовательность ξ_n приобретает качества, свойственные гауссовским величинам. Это позволяет оценить флуктуационную часть $\eta_n = \xi_n^2 - \langle \xi_n^2 \rangle$ нелинейного слагаемого ξ_n^2 в уравнении (7) при помощи гауссовской

статистики. В итоге среднеквадратичное отклонение $\sigma_\eta = \langle \eta^2 \rangle^{1/2}$ оценивается как

$$\sigma_\eta \approx \langle \xi^2 \rangle \sim \sigma_f^2 / 2\lambda. \quad (16)$$

Условие малости среднеквадратичного значения σ_η по сравнению с внешними флуктуациями, характеризующимися среднеквадратичным отклонением σ_f , можно представить в виде неравенства:

$$\sigma_\eta \sim \frac{\sigma_f^2}{2\lambda} \leq \sigma_f, \quad \text{или} \quad \lambda \geq \lambda_{min} \sim \frac{\sigma_f}{2}. \quad (17)$$

Подставляя в «линейную» формулу (15) нелинейную оценку $\lambda = \lambda_{min} = \sigma_f/2$, получаем желаемую оценку дисперсии флуктуаций σ_ξ^2 вблизи порога бифуркации:

$$\langle \xi^2 \rangle_{max} \sim \frac{\sigma_f^2}{2\lambda_{min}} \sim \sigma_f. \quad (18)$$

Отношение

$$K = \frac{\langle \xi^2 \rangle}{\sigma_f^2} \quad (19)$$

может служить естественной мерой предбифуркационного усиления флуктуаций. Согласно (18), максимальный «коэффициент усиления» флуктуаций $K_{max} = \langle \xi^2 \rangle_{max} / \sigma_f^2$ составляет

$$K_{max} \sim \frac{\langle \xi^2 \rangle_{max}}{\sigma_f^2} \sim \frac{1}{\sigma_f}. \quad (20)$$

Например, при $\sigma_f^2 = 10^{-8}$ «коэффициент усиления» K_{max} может достигнуть величины $K \approx 10^4$. Столь значительное предбифуркационное усиление флуктуаций может сделать реальным измерение слабых флуктуационных воздействий σ_f в различных физических системах (см. разд. 8).

Еще один эффект, связанный с предбифуркационным ростом флуктуаций, это смещение среднего значения $\langle \xi \rangle$ относительно нуля. Величину этого эффекта можно оценить из уравнения (7), подвергнутого усреднению:

$$\langle \xi \rangle = -\gamma \langle \xi \rangle - \langle \xi^2 \rangle.$$

Из этого уравнения следует, что среднее смещение неподвижной точки относительно невозмущенного значения $\bar{x}(\mu)$ в непосредственной окрестности точки бифуркации $\gamma = 1$ оценивается как

$$\langle \xi \rangle \sim \frac{1}{2} \langle \xi^2 \rangle \sim \frac{\sigma_f^2}{4\lambda}.$$

Это — смещение среднего значения $\langle \xi \rangle$ относительно нуля.

Максимальное смещение $\langle \xi \rangle_{max}$ достигается при $\lambda \sim \lambda_{min} \sim \sigma_f/2$:

$$\langle \xi \rangle_{max} \sim \sigma_f/2. \quad (21)$$

Хотя смещение среднего значения обычно имеет малую величину, скажем, около $0.5 \cdot 10^{-3}$ при $\sigma_f = 10^{-3}$, оно тоже может служить индикатором предбифуркационного роста флуктуаций. В силу малости $\langle \xi \rangle^2$ по сравнению с $\langle \xi^2 \rangle$, дисперсия σ_ξ^2 практически не отличается от $\langle \xi^2 \rangle$:

$$\sigma_\xi^2 = \langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle \approx \langle \xi^2 \rangle,$$

что будет использоваться во всех последующих оценках.

5. ФЛУКТУАЦИИ ПОСЛЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ

При $\mu > \mu_{c1} = 0.75$ в системе (1) происходит бифуркация удвоения периода. Стационарные колебания с периодом 2 описываются (в отсутствие шумов) системой двух уравнений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mu - x_n^2, \\ x_{n+2} &= \mu - x_{n+1}^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Исключив из (22) x_{n+1} и потребовав, чтобы x_{n+2} равнялось x_n (это отвечает периодичности с периодом $T = 2$), для неподвижной точки $\hat{x}(\mu)$ режима с периодом 2 получаем уравнение

$$\hat{x} = \mu - (\mu - \hat{x}^2)^2. \quad (23)$$

Обозначим через

$$\delta = \hat{x} - \bar{x}(\mu) \quad (24)$$

отклонение \hat{x} от неподвижной точки $\bar{x}(\mu)$ (2) (при $\mu > \mu_{c1}$ последняя становится неустойчивой), а через

$$\nu = \mu - \mu_{c1} > 0 \quad (25)$$

— надкритичность, т. е. превышение μ над бифуркационным порогом μ_{c1} . При использовании переменных δ и ν уравнение (23) принимает вид

$$\delta^2 = (\nu - \delta - \delta^2)^2 \quad (26)$$

и допускает двузначное решение

$$\delta = \pm \sqrt{\nu}, \quad (27)$$

имеющее вид типичной бифуркационной вилки. В исходных переменных это соотношение примет вид

$$\hat{x}^\pm = \bar{x} \pm \sqrt{\mu - \mu_{c1}}. \quad (28)$$

Используя соотношение (27), оценим протяженность области сильных флуктуаций справа от бифуркационной точки μ_{c1} . Для этого воспользуемся следующими соображениями. Как мы уже установили в разд. 4, среднееквадратичное значение флуктуаций вблизи точки бифуркации составляет $\sigma_\xi \sim \sqrt{\sigma_f}$. Очевидно, при $\sigma_\xi \geq \delta$ внешние флуктуации f_n способны перебрасывать точки с одной ветви бифуркационной диаграммы (27) на другую, скажем, с \hat{x}^+ на \hat{x}^- и обратно, так что вертикальный размер флуктуационной области ограничен значением

$$\delta \sim \sigma_\xi \sim \sqrt{\sigma_f}. \quad (29)$$

Размер же области ν_{min} по горизонтали в силу (27) оценивается как

$$\nu_{min} \sim \delta^2 \sim \sigma_f. \quad (30)$$

Оценки (29) и (30) вполне согласуются с предыдущей оценкой (18) для $(\sigma_\xi^2)_{max}$ и оценкой (17) для λ_{min} .

С ростом надкритичности $\nu = \mu - \mu_{c1}$ дисперсия флуктуаций убывает по закону

$$\sigma_\xi^2 = \frac{\sigma_f^2}{2\nu}, \quad (31)$$

аналогичному (15). Этот закон убывания дисперсии постбифуркационных шумов можно вывести при помощи линейной теории подобно тому, как это было сделано в разд. 3 для предбифуркационных шумов.

Заметим еще, что дисперсии флуктуаций σ_+^2 и σ_-^2 возле состояний \hat{x}^+ и \hat{x}^- будут отличаться друг от друга. Обозначим через Π^\pm значения производной отображающей функции $f(x) = \mu - x^2$ в точках \hat{x}^\pm :

$$\Pi^\pm = \frac{df}{dx} = -2\hat{x}^\pm.$$

Учитывая, что значение Π^\pm характеризует наклоны касательных к отображению $f(x)$ в точках \hat{x}^+ и \hat{x}^- , при достаточно малых флуктуациях получаем

$$\sigma_- = \Pi^+ \sigma_+, \quad \sigma_+ = \Pi^- \sigma_-.$$

В результате приходим к оценке

$$\frac{\sigma_+^2}{\sigma_-^2} = \left| \frac{\Pi^-}{\Pi^+} \right| = \frac{\hat{x}^-}{\hat{x}^+} \approx 1 - 2 \frac{\sqrt{\mu - \mu_{c1}}}{\bar{x}(\mu)}, \quad (32)$$

которая показывает, что флуктуации возле верхней ветви \hat{x}^+ всегда меньше, чем возле нижней ветви.

6. ОСЛАБЛЕНИЕ ЭФФЕКТА УСИЛЕНИЯ ПРИ БЫСТРОМ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ БИФУРКАЦИИ. ВРЕМЯ УСТАНОВЛЕНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ

При быстром прохождении через точку бифуркации эффект усиления флуктуаций должен снизиться, поскольку в этом случае не происходит накопления флуктуаций. Чтобы убедиться в этом, в формуле (13) под n следует понимать время, в течение которого происходит изменение управляющего параметра. При $n = 1$ из (13) следует, что

$$\sigma_{\xi}^2 = \sigma_f^2, \quad (33)$$

тогда как при $n = 2$

$$\sigma_{\xi}^2 = \sigma_f^2 \frac{1 - \gamma^4}{1 - \gamma^2} = \sigma_f^2 (1 + \gamma^2) \approx 2\sigma_f^2. \quad (34)$$

Согласно (33), при предельно быстром (всего лишь за один шаг) прохождении точки бифуркации усиление флуктуаций вообще не наблюдается. Увеличение числа шагов до $n = 2$ дает усиление флуктуаций в два раза, т. е. дисперсия σ_{ξ}^2 вдвое превышает дисперсию шумового воздействия σ_f^2 .

Для того чтобы оценить время n_{trans} установления флуктуаций, обратимся к формуле (13), характеризующей средний квадрат флуктуаций после n итераций. Согласно (13), флуктуации устанавливаются при выполнении неравенства $\gamma^{2(n+1)} \ll 1$. Если приближенно (при малых λ) заменить γ величиной $1 - \lambda \approx \exp(-\lambda)$, то неравенству $\gamma^{2(n+1)} \ll 1$ можно придать вид $\exp[-2\lambda(n+1)] \ll 1$, откуда следует оценка

$$n_{trans} \geq \frac{1}{2\lambda}. \quad (35)$$

Вдали от бифуркационного порога ($\mu = \mu_{c1}$), когда величина λ сравнима с единицей, время n_{trans} установления флуктуаций составляет единицы шагов. В непосредственной же близости к μ_{c1} величина 2λ сопоставима с $2\lambda_{min} \sim \sigma_f$, и в результате нижний предел времени установления флуктуаций оценивается как

$$n_{trans} \geq \frac{1}{2\lambda} \sim \frac{1}{\sigma_f}. \quad (36)$$

Например, при $\sigma_f = 10^{-3}$ для оценки установившейся дисперсии флуктуаций σ_{ξ}^2 требуется взять выборку длительностью не менее тысячи итераций, а при $\sigma_f = 10^{-5}$ — не менее 10^5 итераций.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Описанная выше система подвергалась численному анализу при начальном значении управляющего параметра $\mu_0 = 0.2$ и конечном значении $\mu_f = 0.9$ с шагом $\Delta\mu = 0.001$. Выбор указанного диапазона изменения μ обусловлен положением бифуркационных точек квадратичного отображения: первая бифуркация удвоения периода происходит при $\mu = \mu_{c1} = 0.75$, а вторая — при $\mu = \mu_{c2} = 1.25$. Поэтому начальное значение μ_0 было выбрано ниже μ_{c1} , а конечное значение μ_f — выше μ_{c1} , но ниже μ_{c2} .

Генератор случайных чисел производил значения f_n , равномерно распределенные в интервале $[-\beta, +\beta]$:

$$w(f_n) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta}, & |f_n| \leq \beta, \\ 0, & |f_n| > \beta, \end{cases} \quad (37)$$

и некоррелированные между собой (см. (12)). Дисперсия шума σ_f^2 при равномерной функции распределения вероятности (35) связана с параметром β соотношением $\sigma_f^2 = \beta^2/3$. Использование иных генераторов случайных чисел, производящих, например, нормально распределенные величины, дали качественно подобные результаты.

В качестве начального значения x_0 всегда выбиралась неподвижная точка отображения $\bar{x}(\mu)$. Для каждого значения μ проводилось не менее $1/\sigma_f$ итераций отображения (3) (см. разд. 6). Для лучшей достоверности в численных экспериментах число итераций устанавливалось $100/\sigma_f$, в результате чего дисперсия флуктуаций σ_{ξ}^2 определялась с относительной погрешностью $(100/\sigma_f)^{-1/2}$. Например, при $\sigma_f = 10^{-2}$ относительная погрешность составляла 1%, а при $\sigma_f = 10^{-4}$ она снижалась до 0.1%.

На рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма для квадратичного отображения (3) при действии шума со среднеквадратичным значением $\sigma_f = 5.7 \cdot 10^{-3}$. Серым цветом на этой диаграмме выделена область сосредоточения флуктуаций возмущенных значений для $\bar{x}(\mu)$ и $\hat{x}^{\pm}(\mu)$. Штриховые линии отвечают среднеквадратичному отклонению σ_{ξ} от невозмущенных значений. Рисунок 1 демонстрирует все характерные особенности задачи, описанные выше. Вдали от бифуркационной точки $\mu = \mu_{c1}$ дисперсия флуктуаций σ_{ξ}^2 сопоставима с дисперсией внешнего воздействия σ_f^2 . По мере приближения к критической точке дисперсия флуктуаций σ_{ξ}^2 сна-

Рис. 1. Область сосредоточения флуктуаций (обозначена серым) на бифуркационной диаграмме при действии шума со среднеквадратичным значением $\sigma_f = 5.7 \cdot 10^{-3}$. Штриховые линии отвечают среднеквадратичному отклонению σ_ξ . Предбифуркационное усиление шума наблюдается в окрестности точки бифуркации μ_{c1}

чала увеличивается по закону (14), (15), а непосредственно при $\mu = \mu_{c1}$ принимает ограниченное значение (20). В данном случае максимальный коэффициент усиления флуктуаций,

$$K_{max} \sim \frac{(\sigma_\xi^2)_{max}}{\sigma_f^2},$$

составляет примерно 84, что по порядку величины приближается к оценке (20). Нелинейные эффекты играют определяющую роль в интервале $|\mu - \mu_{c1}| \leq \sigma_f \approx 0.005$.

На рис. 2 представлены зависимости дисперсии флуктуаций σ_ξ^2 от управляющего параметра μ при двух значениях дисперсии шума $\sigma_f^2 = 3.3 \cdot 10^{-5}$ (рис. 2а) и $\sigma_f^2 = 3.3 \cdot 10^{-9}$ (рис. 2б). Не вполне плавная форма кривых на графиках связана с ко-

нечностью выборки, по которой определялось значение σ_ξ^2 : на рис. 2а значение σ_ξ^2 вычислялось по 10^4 итерациям, а на рис. 2б — по 10^6 итерациям. Вблизи критической точки μ_{c1} величина σ_ξ^2 резко возрастает по сравнению со значением σ_f^2 . При $\sigma_f^2 = 3.3 \cdot 10^{-5}$ коэффициент усиления составляет $K_{max} \sim 10^2$, тогда как при $\sigma_f^2 = 3.3 \cdot 10^{-9}$ для K_{max} имеем оценку 10^4 . В первом случае σ_ξ^2 достигает значения $(\sigma_\xi^2)_{max} \approx 2.8 \cdot 10^{-3}$, т. е. отличается от теоретической оценки $(\sigma_\xi^2)_{max} \sim \sigma_f$ множителем 0.49, а во втором случае максимальная дисперсия $(\sigma_\xi^2)_{max} \approx 2.7 \cdot 10^{-5}$ отличается от оценки $\sigma_f = 10^{-4}$ множителем 0.47.

При переходе через критическое значение μ_{c1} дисперсия флуктуаций σ_ξ^2 становится двузначной функцией: при $\mu > \mu_{c1}$ сплошная линия на рис. 2

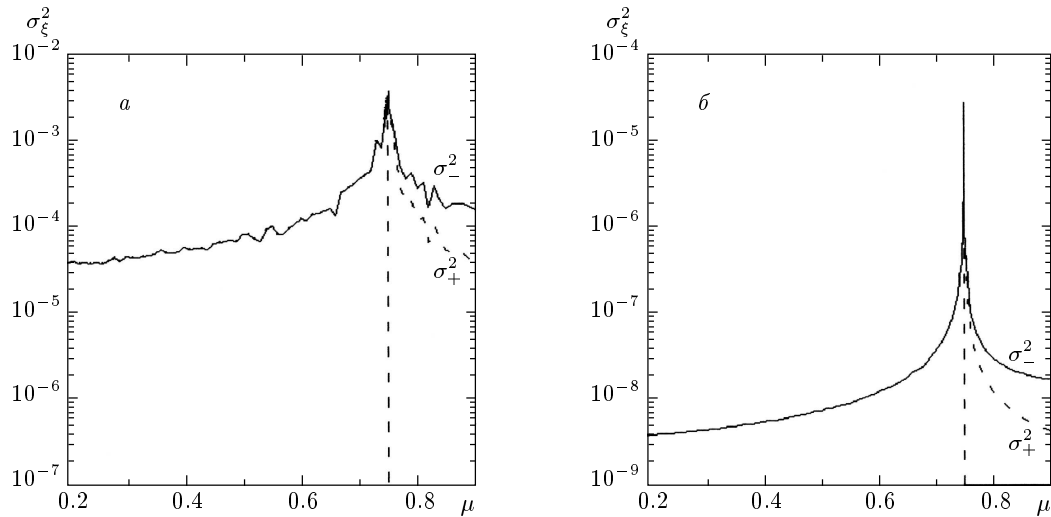


Рис. 2. Зависимость дисперсии флуктуаций σ_ξ^2 от управляющего параметра μ в окрестности критической точки μ_{c1} при интенсивностях шума $\sigma_f^2 = 3.3 \cdot 10^{-5}$ (а) и $\sigma_f^2 = 3.3 \cdot 10^{-9}$ (б). Сплошные (штриховые) линии справа от критической точки отвечают флуктуациям в окрестности нижней (верхней) ветви бифуркационной диаграммы

отвечает нижней ветви бифуркационной диаграммы (дисперсия флуктуаций здесь равна σ_-^2), а штриховая — верхней ветви (соответственно дисперсия равна σ_+^2). Как и ожидалось в согласии с оценкой (32), флуктуации σ_+^2 вблизи верхней ветви \hat{x}^+ всегда меньше, чем вблизи нижней ветви \hat{x}^- .

На рис. 3 показана зависимость максимальной дисперсии флуктуаций вблизи порога бифуркации $(\sigma_\xi^2)_{max}$ от среднеквадратичного флуктуационного воздействия σ_f . Точки на этой кривой аппроксимируются зависимостью

$$(\sigma_\xi^2)_{max} \approx 0.5\sigma_f, \tag{38}$$

что хорошо согласуется с теоретической оценкой (18) (последней на рис. 3 отвечает штриховая линия). Проведенные нами численные расчеты показали, что зависимость (38) пригодна не только для равномерного, но и для нормального закона распределения флуктуационной силы f_n .

При значительных шумовых воздействиях, когда среднеквадратичное значение σ_f приближается к единице, коэффициент усиления флуктуаций K тоже сравнивается с единицей, после чего нелинейные механизмы ограничения дисперсии шума уступают место зависимости $\sigma_\xi^2 \sim \sigma_f^2$, характерной для линейных систем.

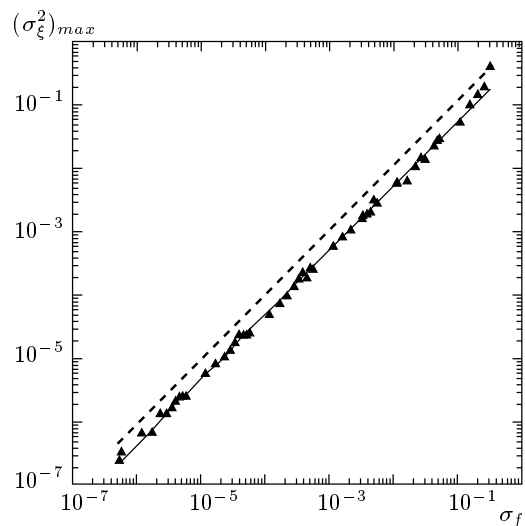


Рис. 3. Зависимость максимальной дисперсии флуктуаций $(\sigma_\xi^2)_{max}$ от среднеквадратичного значения шумового воздействия σ_f . Штриховая линия отвечает оценке (18)

8. О ВОЗМОЖНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ СЛАБЫХ ШУМОВ

Заметное усиление дисперсии флуктуаций σ_ξ^2 вблизи порога бифуркации может быть положено в основу метода измерения слабых шумов в исследуемой системе. В отличие от предгенерационного шума с высокой степенью неустойчивости за счет

спорадических срывов системы в состояние генерации, предбифуркационный шум обладает гораздо большим постоянством и обеспечивает большую надежность измерений. Сказанное относится не только к бифуркациям удвоения периода, но и ко многим другим типам бифуркаций, исключая сильный рост колебаний при переходе через критическую точку, как это имеет место для бифуркаций типа Ландау–Хопфа. Предлагаемый подход подразумевает сравнение величины $(\sigma_\xi^2)_{max} \sim \sigma_f$, относящейся непосредственно к точке бифуркационного перехода, с величиной $\sigma_\xi^2 \approx \sigma_f^2$ вдали от точки бифуркации. Оценка дисперсии шума σ_f^2 по данным о среднем смещении $\langle \xi \rangle$, возникающем за счет своего рода детектирования флуктуаций на нелинейности системы, представляется менее надежной. Обсуждаемая здесь возможность измерения слабых шумов путем измерения $(\sigma_\xi^2)_{max}$ ограничена требованием (36) к длительности измерений. Согласно (36), длительность выборки не должна быть меньше времени установления $n_{trans} \sim 1/\sigma_f$.

Для полноты картины отметим, что прохождение нелинейной системы через бифуркацию удвоения периода предоставляет еще одну возможность оценки внутренних шумов — по величине шумозависимой гистерезисной петли, возникающей при быстром пересечении критической точки в прямом и обратном направлениях [7].

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе на примере бифуркации удвоения периода изучены основные особенности явления предбифуркационного усиления флуктуаций, которое по своей природе аналогично росту флуктуаций

вблизи точек фазового перехода. Получены аналитические оценки предбифуркационного усиления шума как вдали от критической точки, так и в непосредственной близости к ней. Аналитические оценки удовлетворительно согласуются с результатами численного моделирования. На основе изученного эффекта предложен метод измерения дисперсии слабых шумов в нелинейных системах. Возможности этого метода лимитируются требованием проводить достаточно длительные наблюдения.

Авторы признательны РФФИ за частичную поддержку этой работы в рамках проектов 99-02-16625 и 00-02-17741, а также Федеральной целевой программе «Интеграция» за поддержку в рамках проекта А-0030.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику*, Наука, Москва (1981).
2. К. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **32**, 1744 (1985).
3. К. Wiesenfeld and N. F. Pedersen, Phys. Rev. A **36**, 1440 (1987).
4. К. Wiesenfeld and B. McNamara, Phys. Rev. A **33**, 629 (1986).
5. К. Wiesenfeld, J. Stat. Phys. **38**, 1071 (1985).
6. Г. Шустер, *Детерминированный хаос. Введение*, Мир, Москва (1988).
7. О. Я. Бутковский, Ю. А. Кравцов, Е. Д. Суровяткина, ЖТФ **67**, 128 (1997).