

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНЫХ СТРУКТУР В СПИРАЛЬНЫХ ГАЛАКТИКАХ

*В. Л. Поляченко, Е. В. Поляченко**

*Институт астрономии Российской академии наук
109017, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 мая 2001 г.

Рассматривается резонансный механизм формирования галактических спиралей. Получены выражения для резонансных откликов дисков с круговыми и почти круговыми орбитами звезд. Показано, что спиральные отклики, возникающие под действием имеющихся во многих галактиках центральных овалоподобных структур (баров), обладают характерными свойствами наблюдаемых в этих галактиках спиралей. Для наиболее интересного случая квазистационарного состояния спиральные отклики обладают свойством подобия: толщина спиралей и их угол наклона пропорциональны среднему размеру эписпирали (аналогу ларморовского кружка в плазме).

PACS: 98.10.+z, 98.62.-g

1. ВВЕДЕНИЕ

Для исследования таких астрономических объектов, как галактики, используются модели в виде простейших фигур равновесия: плоского слоя, цилиндра, сферы, диска, эллипсоида. Из них первые две неограничены хотя бы в одном направлении. Эти модели имеют много общих черт с однородной плазмой. В частности, различным кинетическим эффектам в таких системах обычно легко найти соответствующие плазменные аналогии [1, 2]. С другой стороны, в моделях дисков, сферических или эллипсоидальных систем движение частиц финитно по всем направлениям. Кинетические эффекты в таких системах обязаны резонансам между волнами и орбитальным движением частиц. В физике плазмы подобные эффекты изучаются, например, в связи с проблемой неустойчивости плазмы в замкнутых магнитных ловушках: токамаках, магнитосфере Земли и т. п. (см. [3]).

Важнейшей характеристикой волны, резонансным взаимодействием которой со звездами галактики мы будем в дальнейшем интересоваться, является ее частота ω . Если гравитационный потенциал рассматриваемой системы допускает полное разделение переменных в методе Гамильтона–Якоби [4],

то движение звезд также характеризуется частотами

$$\Omega_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}, \quad (1)$$

где $i = 1, 2, 3$, $H(J_1, J_2, J_3)$ — гамильтониан звезды, выраженный через переменные действия J_1, J_2, J_3 . Тогда условие резонанса между волной и частицами (звездами) можно записать в виде

$$\omega = l_1 \Omega_1 + l_2 \Omega_2 + l_3 \Omega_3 \quad (2)$$

(l_1, l_2, l_3 — некоторые целые числа). Равенство (2) представляет собой частный вид общего условия резонанса

$$\omega_{outer} = \omega_{inner}, \quad (3)$$

где ω_{outer} — частота внешнего воздействия на частицы рассматриваемой системы (в представляющем для нас наибольший интерес частном случае ω_{outer} — это частота волны ω , тем или иным способом возбужденной в системе),

$$\omega_{inner} = l_1 \Omega_1 + l_2 \Omega_2 + l_3 \Omega_3$$

— одна из возможных внутренних частот орбитального движения частиц.

Если внешняя сила вызывается спутником, то аналогично (2)

$$\omega_{outer} = n_1 \Omega_1^s + n_2 \Omega_2^s + n_3 \Omega_3^s,$$

*E-mail: evgenii@orc.ru

где $\Omega_1^s, \Omega_2^s, \Omega_3^s$ — частоты колебаний спутника, а n_1, n_2, n_3 — своя система целых чисел. Связанные с такого рода резонансами структуры непосредственно наблюдаются, например, в кольцах Сатурна в виде так называемых «волновых поездов», представляющих собой затухающие при распространении от резонансов волны плотности (см. [5])¹⁾. В качестве еще одного примера, в котором встречается общий резонанс (3), упомянем столкновительный член типа Ландау [7] для систем с финитным движением частиц [8]. Такой столкновительный член, соответствующий парным взаимодействиям частиц (a и b), содержит частотные δ -функции,

$$\delta[(l_1^a \Omega_1^a + l_2^a \Omega_2^a + l_3^a \Omega_3^a) - (l_1^b \Omega_1^b + l_2^b \Omega_2^b + l_3^b \Omega_3^b)],$$

которые означают, что частица a взаимодействует только с теми частицами b , для которых выполнено условие резонанса. Можно сказать, что орбитальное движение частицы b создает флуктуирующее с частотами

$$\omega = l_1^b \Omega_1^b + l_2^b \Omega_2^b + l_3^b \Omega_3^b$$

гравитационное поле, в резонансе с которым должно находиться орбитальное движение частицы a :

$$l_1^a \Omega_1^a + l_2^a \Omega_2^a + l_3^a \Omega_3^a = \omega;$$

усредненный же эффект нерезонансного взаимодействия оказывается равным нулю.

Наиболее отчетливо и просто резонансы проявляются в дисковых системах с почти круговым движением частиц (спиральные галактики, кольца планет). Причина заключается в том, что в этом случае резонансы имеют определенную пространственную локализацию (вблизи резонансных окружностей), в то время как в общем случае условия резонансов определяют некоторые множества в фазовом пространстве, естественно более трудном для изучения, особенно наблюдательного.

Далее мы ограничимся рассмотрением спиральных галактик. С резонансами явно связаны многие наблюдаемые структуры в галактиках, в частности кольца и спирали. Они могут индуцировать

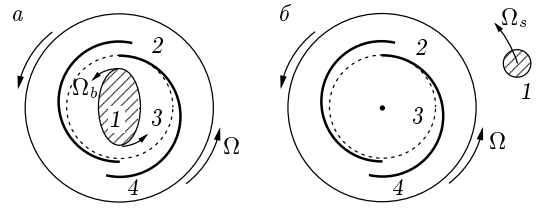


Рис. 1. Возможные способы возбуждения резонансных спиралей в галактиках: a — центральным баром (1 — бар, вращающийся с угловой скоростью Ω_b , 2 — диск галактики, 3 — резонансная окружность, 4 — спирали); b — спутником галактики (1 — спутник, вращающийся вокруг галактики (в ее плоскости) с угловой скоростью Ω_s , 2 — диск галактики, 3 — резонансная окружность, 4 — спирали). Диски вращаются с угловой скоростью $\Omega(r)$

ся, например, спутниками или центральными барами (рис. 1). Галактические спутники, в принципе, действуют так же, как и спутники планет. Однако роль спутников для галактик, по-видимому, значительно меньше, чем для планетных колец. Планетные кольца представляют собой гораздо более старые системы — если возраст измерять в единицах динамического времени, которым является время оборота типичной частицы по круговой орбите. Для планетных колец такой возраст около 10^{12} , в то время как для спиральных галактик он часто оказывается всего порядка нескольких десятков «галактических лет». В частности, по этой причине в кольцах планет успели достаточно четко проявиться даже резонансы очень высокого порядка (например, соответствующие отношению частот обращения спутника и пылевых частиц кольца, равному 34:35); времени жизни галактики явно не хватило бы для этого (подробнее о сравнении свойств различных астрофизических дисков см. [5]).

Центральные бары (рис. 1а) встречаются примерно в половине всех спиральных галактик (этот тип галактик с баром принято обозначать SB, в отличие от «нормальных» спиралей SA). Находясь внутри галактического диска, бар оказывает своим неаксиально-симметричным гравитационным полем сильное влияние на движение звезд, особенно в ближайших к нему резонансных областях, приводя к формированию спиралей, колец и других структур.

Целью данной работы является построение линейной теории резонансных галактических структур. Большинство их связано с возмущениями плотности, возникающими из-за движений звезд в плоскости диска. Поэтому для соответствующих резонан-

¹⁾ Такая интерпретация наблюдаемых волновых поездов подкрепляется, в частности, правильным соответствием их локализации (дальше от планеты, чем положение резонанса) направлению групповой скорости волн плотности (от планеты), вытекающей из характеризующего их дисперсионного уравнения (см. уравнение (1) из [6]). Более трудные для наблюдений волны изгибов плоскости колец в резонансных областях также были обнаружены (подробнее см. в [5]); они располагаются ближе к планете (относительно положений резонансов), что также согласуется с направлением групповой скорости изгибных волн.

сов в общем выражении (2) для частоты ω_{inner} можно положить $l_3 = 0$ (если Ω_3 обозначает частоту вертикальных z -колебаний звезды; диск считаем расположенным в плоскости x, y). Тогда условие резонанса (2) можно переписать в виде

$$\omega = m\Omega_2 + l\Omega_1, \quad (4')$$

где использованы стандартные обозначения: m — для азимутального волнового числа (возмущение предполагается разложенным в ряд Фурье и рассматривается одна из гармоник, пропорциональная $\exp(im\varphi)$), l — для радиального индекса; Ω_1 и Ω_2 — соответственно, радиальная и азимутальная частоты. При фиксированном m резонансы будут нумероваться одним индексом l (положительным, отрицательным или нулем), и (4') удобно переписать (поделив обе стороны (4') на m) в виде

$$\Omega_p = \Omega_2 + l\Omega_1/m, \quad (4'')$$

где $\Omega_p = \omega/m$ — угловая скорость волны в инерциальной системе отсчета. Если, например, возмущения вызываются баром, который вращается с угловой скоростью Ω_b , то, очевидно, $\Omega_p = \Omega_b$.

В статье используется приближение бесконечно тонкого диска. Учет конечной толщины или, иначе говоря, движений частиц по третьей (z) координате, представляет отдельную задачу, которая может быть изучена лишь численными методами. Поскольку систематические исследования такого рода пока отсутствуют, мы не имеем возможности достаточно определенно предсказать, насколько соответствующие эффекты могут изменить результаты двумерного анализа. Отметим, однако, что в известных нам специально поставленных численных экспериментах (в рамках N -body-подхода) обычно оказывалось, что эволюции возмущений в трехмерных и двумерных дисках почти не различается. Можно сослаться, например, на работу [9], в которой рассматривается близкая нам задача формирования баров и сопутствующей им спиральной структуры.

Обратим также внимание на тот факт, что учет влияния конечной толщины, вообще говоря, имеет большее значение для газового диска, чем для звездного. Дело в том, что последний (в отличие от первого) является бесстолкновительным и потому может, в принципе, иметь сильно анизотропное давление. При этом, как свидетельствуют наблюдения, средняя тепловая скорость звезд по оси z (c_z) всегда меньше, чем в плоскости галактического диска (c_r). Для нашей Галактики

$$c_z^2/c_r^2 \approx 1/4,$$

но легко себе представить, что в огромном разнообразии спиральных галактик встречаются экземпляры и с существенно большими значениями анизотропии. По сути, единственным фундаментальным ограничителем здесь является шланговая неустойчивость, но она развивается только при очень сильной анизотропии. Теория показывает (см. обзор [10]), что одиночный звездный диск становится неустойчивым лишь при²⁾

$$c_z^2/c_r^2 \approx 1/10;$$

при учете стабилизирующей роли сфероидальных компонент галактики необходимая для неустойчивости анизотропия становится еще больше.

В следующем разделе мы покажем (разд. 2.2), как упрощается резонансное условие (4'') в случае дисков с почти круговыми орбитами. Там же приводятся равновесные функции распределения звезд в таких дисках (разд. 2.3) и выводятся (разд. 2.1) законы движения звезд в приближении, необходимым для их дальнейшего использования (разд. 3.1) при выводе выражений для резонансных откликов диска. В разделе 3.2 эти отклики подробно анализируются.

В Заключении обсуждаются некоторые принципиальные моменты, связанные с полученными в работе результатами.

2. РАВНОВЕСИЕ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ЗВЕЗДНЫХ ДИСКОВ

2.1. Почти круговые орбиты звезд в аксиально-симметричном гравитационном поле

Целью этого раздела является получение выражений для координат звезды $r(t), \varphi(t)$ на почти круговой орбите с точностью до квадратичных членов по малому отклонению $\delta r = r - r_0$ текущего радиуса звезды r от радиуса круговой орбиты r_0 , соответствующей угловому моменту L . Эти выражения

²⁾ Именно по этой причине шланговая неустойчивость долгое время считалась мало интересной для гравитирующих систем. Эта неустойчивость снова привлекла к себе внимание, после того как в работе [11] (см. также [1, 2]) было показано, что ею можно объяснить наблюдаемую максимальную сплюснутость эллиптических галактик. Эллиптические галактики представляют собой слабо вращающиеся системы, равновесие которых обеспечивается анизотропным давлением. Они более «горячие» в плоскости вращения (по сравнению со спиральными галактиками) и потому легче подвержены шланговой неустойчивости.

понадобятся нам в дальнейшем (в разд. 3) при исследовании откликов галактических дисков вблизи резонансных окружностей.

Записывая уравнения двумерного движения звезды в аксиально-симметричном потенциале $\Phi_0(r)$ в цилиндрических координатах r, φ и исключая φ с помощью закона сохранения углового момента

$$L = r^2 \dot{\varphi} = \text{const},$$

получим

$$\ddot{r} = -\frac{d\Phi_0}{dr} + \frac{L^2}{r^3} = -\frac{dW}{dr}, \quad (5)$$

где

$$W = \Phi_0 + L^2/2r^2$$

— эффективная потенциальная энергия.

Будем искать решение уравнения (5) в виде разложения по степеням $\delta r = r - r_0$ малого отклонения текущего радиуса звезды r от радиуса круговой орбиты r_0 :

$$r(t) = r_0 + r_1(t) + r_2(t) + \dots, \quad (6)$$

где

$$\frac{L^2}{r_0^3} = \frac{d\Phi_0(r_0)}{dr_0}; \quad (7)$$

последнее уравнение выражает равенство гравитационной и центробежной сил. После нахождения радиуса звезды $r(t)$ ее азимут $\varphi(t)$ определяется решением уравнения

$$\dot{\varphi} = L/r^2.$$

Вместо азимутальной скорости $v_\varphi(t)$ в инерциальной системе отсчета более естественно оперировать «остаточной» скоростью

$$\tilde{v}_\varphi = v_\varphi(t) - r(t)\Omega[r(t)], \quad (8)$$

представляющей собой отклонение скорости $v_\varphi(t)$ от локальной (в текущей точке $r(t)$) круговой скорости: тогда скорости \tilde{v}_φ и v_r будут одного порядка величины; функция

$$\Omega(r) = L/r^2$$

обозначает угловую скорость звезды на круговой орбите радиуса r . Для получения искомым уравнений траекторий нужно выразить все встречающиеся при решении уравнений движения константы через начальные значения координат и скоростей. Оставляя для последних обозначения

$$r = r(t=0), \quad \varphi = \varphi(t=0),$$

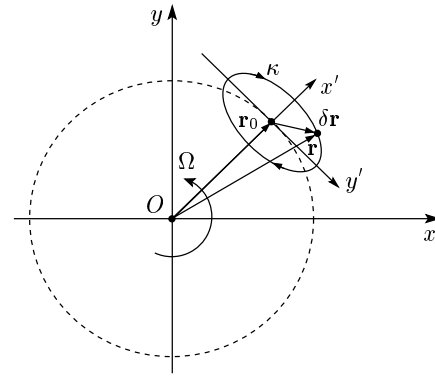


Рис. 2. Схематическое представление эпициклического движения в диске с почти круговыми движениями частиц. Угловая скорость диска $\Omega(r)$. Текущий радиус-вектор частицы $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}$, где вектор \mathbf{r}_0 вращается равномерно с угловой скоростью $\Omega_0 = \Omega(r_0)$. Конеч вектора $\delta\mathbf{r}$ в системе координат, вращающейся со скоростью Ω_0 , описывает малый эллипс (эпицикл) с эпициклической частотой κ в направлении, противоположном вращению диска

$$v_r = v_r(t=0), \quad \tilde{v}_\varphi = \tilde{v}_\varphi(t=0),$$

запишем траектории (пока в первом порядке по δr) в виде

$$r(t) = r + \sin(\kappa_0 t) \frac{v_r}{\kappa_0} + (1 - \cos(\kappa_0 t)) \times \left(\frac{2\Omega_0}{\kappa_0} \right) \frac{\tilde{v}_\varphi}{\kappa_0}, \quad (9)$$

$$\varphi(t) = \varphi + \Omega_0 t - \frac{2\Omega_0}{r_0 \kappa_0} (1 - \cos(\kappa_0 t)) \frac{v_r}{\kappa_0} + \sin(\kappa_0 t) \frac{4\Omega_0^2}{\kappa_0^2 r_0} \frac{\tilde{v}_\varphi}{\kappa_0}, \quad (10)$$

где

$$\kappa_0^2 = \kappa^2(r_0), \quad \kappa^2(r) = \Phi_0''(r) + 3L^2/r^4, \quad \Omega_0 = \Omega(r_0).$$

Описанное выше линейное по δr приближение часто называют (по историческим причинам, восходящим еще к Птолемею!) эпициклическим. Дело в том, что, как можно показать из уравнений (9) и (10), во вращающейся со скоростью Ω_0 системе отсчета движение звезд происходит по малым эллипсам, вытянутым по азимуту (рис. 2); аналогичные эллипсы, появляющиеся при описании почти круговых движений планет Солнечной системы, и были названы эпициклами. Вектор

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

имеет координаты

$$\delta \mathbf{r}(r_1 \cos \phi - r_0(\delta\varphi) \sin \phi, r_1 \sin \phi + r_0(\delta\varphi) \cos \phi),$$

где $\phi \equiv \varphi_0 + \Omega t$, так что текущие координаты звезды в локально-декартовой системе координат (x', y') (см. рис. 2) есть

$$x' = \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}, \quad y' = \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}, \quad (11)$$

где $\mathbf{k} = (\sin \phi, -\cos \phi)$ и $\mathbf{n} = (\cos \phi, \sin \phi)$ — соответствующие единичные векторы. Вычисление дает ($\alpha = \text{const}$ — постоянная фаза)

$$x' = -r_0 \delta\varphi = \frac{2\Omega_0}{\kappa_0} \sin(\kappa_0 t + \alpha), \quad (12)$$

$$y' = r_1 = a \cos(\kappa_0 t + \alpha),$$

т. е. вращение по эллипсу ($x'^2/b^2 + y'^2/a^2 = 1$) с отношением полуосей

$$b/a = 2\Omega_0/\kappa_0$$

в направлении, противоположном основному вращению звезд в диске, с эпициклической частотой κ_0 . Исходное выражение для квадрата эпициклической частоты легко преобразовать к виду

$$\kappa^2 = 4\Omega^2 + r(\Omega^2)', \quad (13)$$

где

$$(\Omega^2)' \equiv \frac{d\Omega^2}{dr}.$$

Из (13) следует, что при $\Omega' < 0$ (а это условие всегда выполняется) отношение

$$b/a = 2\Omega_0/\kappa_0 > 1,$$

т. е. действительно эпицикл вытянут по азимуту.

Как мы уже отмечали, для вычисления откликов (в разд. 3) потребуются уравнения траекторий звезды не в эпициклическом (линейном по δr), а в следующем за ним постэпициклическом приближении, в котором учитываются также и члены, квадратичные по δr . Опуская выкладки (которые, естественно, более громоздки, чем при выводе эпициклических формул (9), (10)), приводим сразу искомые уравнения для $r(t)$ и $\varphi(t)$:

$$r(t) = r + \delta r, \quad (14)$$

$$\delta r = \sin \kappa_0 t \frac{v_r}{\kappa_0} + (1 - \cos(\kappa_0 t)) \frac{1}{\kappa_0} \left(\frac{2\Omega_0 \tilde{v}_\varphi}{\kappa_0} \right) +$$

$$+ (1 - \cos(\kappa t)) \frac{2\Omega\alpha}{\kappa^4} \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^2 +$$

$$+ (1 - \cos(\kappa t)) \frac{2\Omega\beta}{\kappa^4} v_r^2, \quad (15)$$

$$\varphi(t) - \varphi = (\Omega_0 + \delta\Omega)t + \delta\varphi, \quad (16)$$

$$\delta\varphi = -\frac{2\Omega_0}{r_0\kappa_0^2} (1 - \cos(\kappa_0 t)) v_r +$$

$$+ \frac{2\Omega_0}{r_0\kappa_0^2} \sin(\kappa_0 t) \frac{2\Omega_0 \tilde{v}_\varphi}{\kappa_0} +$$

$$+ \sin(\kappa t) \frac{4\Omega^2\alpha}{\kappa^5 r} \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^2 - \sin(\kappa t) \frac{4\Omega^2\beta}{\kappa^5 r} v_r^2, \quad (17)$$

где мы несколько изменили смысл величины δr и обозначили

$$\alpha = \frac{\mu}{6\Omega} + \frac{1}{2}(r\Omega'' + 2\Omega') - \frac{\Omega}{r}, \quad (18)$$

$$\beta = \frac{\mu}{3\Omega}, \quad \mu = -\frac{1}{2} \left[(\kappa^2)' - \frac{3\kappa^2}{r} \right], \quad (19)$$

$$\delta\Omega = \left(\frac{3}{2r^2} - \frac{\mu}{r\kappa^2} \right) \frac{\Omega}{\kappa^2} \left[v_r^2 + \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{\kappa'}{\kappa} \frac{\Omega}{r\kappa^2} \left[v_r^2 + \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^2 \right]. \quad (20)$$

Отметим, что в выражении для $\varphi(t) - \varphi$ выделен появляющийся здесь линейно растущий со временем член $(\delta\Omega)t$, где $\delta\Omega$ обозначает нелинейную поправку к азимутальной частоте звезды на почти круговой орбите:

$$\Omega_2 = \Omega + \delta\Omega.$$

Как и должно быть, $\delta\Omega = 0$ для твердотельно вращающегося диска, в котором $\Omega' = \kappa' = 0$. Твердотельное вращение обеспечивается квадратичным потенциалом

$$\Phi_0 = \Omega^2 r^2 / 2 + \text{const},$$

в котором, как известно (см., например, [4]), орбита общего вида представляет собой эллипс с центром в $r = 0$. Звезда за время полного оборота по такому эллипсу совершает, очевидно, два полных радиальных колебания (независимо от его амплитуды), т. е. в данном случае радиальная частота Ω_1 равна удвоенной азимутальной частоте Ω_2 :

$$\Omega_1 = 2\Omega_2.$$

Для почти круговых орбит это равенство получается из (13) при $\Omega' = 0$ в виде $\kappa = 2\Omega$. В противоположном предельном случае кулоновского потенциала Φ_0 из (20) получается поправка к частоте $\delta\Omega$, которую можно также вывести из третьего закона Кеплера:

$$\delta\Omega = -3a^2\Omega_0/2r_0^2.$$

2.2. Характерные частоты колебаний звезд на почти круговых орбитах

Получим выражения для частот колебаний звезд на почти круговых орбитах в круговом диске, Ω_1 и Ω_2 , исходя из их определения (1). Действия J_1 и J_2 , согласно [4], определяются формулами

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \sqrt{2E - 2\Phi_0(r) - L^2/r^2}, \quad (21)$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = L, \quad (22)$$

где $p_r = \sqrt{2E - 2\Phi_0(r) - L^2/r^2}$ и $p_\varphi = L$ — соответствующие обобщенные импульсы; E, L — энергия и угловой момент звезды (ее масса считается равной единице); минимальный (r_{\min}) и максимальный (r_{\max}) радиусы орбиты есть корни уравнения

$$p_r^2 = 2E - 2\Phi_0(r) - L^2/r^2 = 0.$$

Уравнения (21), (22) неявным образом определяют функцию $E(J_1, J_2)$. Дифференцируя (21) по J_1 и J_2 , получим искомые частоты в виде

$$\Omega_1 = \frac{\partial E}{\partial J_1} = \frac{\pi}{I_1}, \quad \Omega_2 = \frac{\partial E}{\partial J_2} = \frac{I_2}{I_1}, \quad (23)$$

где введены обозначения для интегралов

$$I_1 = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{2[E - W(r)]}}, \quad (24)$$

$$I_2 = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2[E - W(r)]}}, \quad (25)$$

$$W(r) = \Phi_0(r) + L^2/2r^2$$

— эффективная потенциальная энергия.

Радиус круговой орбиты r_0 приходится, очевидно, на минимум функции $W(r)$: $W'(r_0) = 0$, т. е. $\Phi'_0 = L^2/r_0^3$ (это — условие (7) равенства центробежной и гравитационной сил). Представляя $W(r)$ вблизи $r = r_0$ параболой и вычисляя затем интегралы (24), (25), найдем

$$I_1 \approx \pi / \sqrt{\Phi''_0(r_0) + 3L^2/r_0^4}, \quad (26)$$

$$I_2 \approx L\pi / \left(r_0^2 \sqrt{\Phi''_0(r_0) + 3L^2/r_0^4} \right),$$

так что

$$\Omega_1 \approx \sqrt{\Phi''_0(r_0) + 3L^2/r_0^4} = \kappa_0, \quad (27)$$

$$\Omega_2 \approx L/r_0^2 = \Omega_0, \quad (28)$$

где использованы уже введенные ранее обозначения для эпициклической частоты κ и угловой скорости звезды на круговой орбите Ω . Отметим, что такие предельные значения (27), (28) для характерных частот колебаний звезды в диске можно было бы установить и из эпициклических формул (9), (10) предыдущего раздела, если учесть, что по смыслу формул (23)

$$\Omega_1 = 2\pi/T_r, \quad \Omega_2 = 2\pi/T_\varphi,$$

где T_r — время, за которое r меняется от r_{\max} до r_{\min} и затем до r_{\max} , а T_φ — время, за которое радиус-вектор поворачивается на угол 2π (интеграл I_2 равен углу $\Delta\varphi$, на который радиус-вектор поворачивается за время $T_r/2 = I_1$).

Резонансное условие (4'') для случая почти круговых орбит переписывается, соответственно, в виде

$$\Omega(r) - \Omega_p = -\kappa(r)/m. \quad (29)$$

Главными в спиральных галактиках являются следующие три резонанса, которые имеют специальные названия: $l = 0$ соответствует резонанс коротации (CR), на котором $\Omega = \Omega_p$; резонансы, соответствующие $|l| = 1$, называются линдбладовскими. Если двигаться от коротационного резонанса к центру галактики, локальная угловая скорость будет увеличиваться, и в конце концов можно встретить (но не всегда) круг, на котором Ω превышает Ω_p на величину $\kappa/|m|$. Этот резонанс называется внутренним линдбладовским резонансом (ILR); для него $l = -1$ при $m > 0$. Другой резонанс $|l| = 1$ находится в галактике снаружи от круга коротации (внешний линдбладовский резонанс, OLR). Перечисленные резонансы имеют место там, где частота, с которой звезда пересекает горбы и впадины потенциала волны, $|\omega - m\Omega|$, либо равна нулю (т. е. звезда все время находится в фазе с волной), либо равна частоте колебаний звезды (κ) около круговой орбиты. Резонансы более высокого порядка (по сравнению с перечисленными) динамически менее важны. Кроме того, внешние резонансы часто лежат за пределами галактик, а внутренние — близко к ядру галактик; поэтому те и другие не играют роли в формировании основной спиральной структуры.

Для $|m| = 2$ внутренний и внешний линдбладовские резонансы в Галактике разделены как раз примерно размером диска; для $|m| \geq 3$ они все приближаются к коротации.

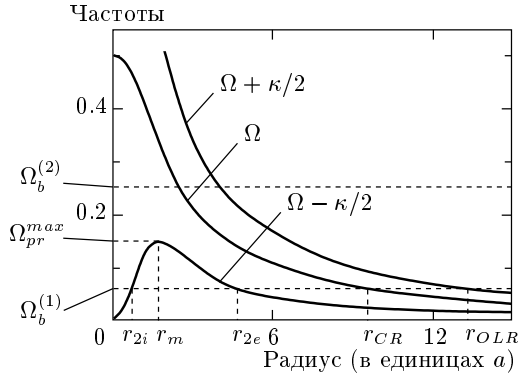


Рис. 3. Основные характерные частоты звездных орбит: $\Omega(r)$ — угловая скорость вращения; $\Omega - \kappa/2 = \Omega_{pr}$ — скорость прецессии почти круговых орбит; r_{CR} — коротация; r_{2i} и r_{2e} — внутренние линдбладовские резонансы; r_{OLR} — внешний линдбладовский резонанс; $\Omega_b^{(1)} < \Omega_{pr}^{max}$ — угловая скорость медленного бара; $\Omega_b^{(2)} > \Omega_{pr}^{max}$ — скорость быстрого бара

Для наиболее интересных с точки зрения наблюдений двурукавных структур ($m = 2$) и для реалистических кривых вращения $\Omega = \Omega(r)$ (рис. 3) имеется всегда лишь одна коротация и один внешний линдбладовский резонанс, на котором

$$\omega_*(r_{OLR}) \equiv \omega - m\Omega(r_{OLR}) = \kappa(r_{OLR}),$$

т. е.

$$\Omega_p = \Omega(r_{OLR}) + \kappa(r_{OLR})/2.$$

Внутренние линдбладовские резонансы, где $\omega_*(r_{ILR}) = -\kappa(r_{ILR})$, соответствуют на рис. 3 пересечениям прямой $\Omega = \Omega_p$ с кривой $\Omega = \Omega_{pr} \equiv \Omega(r) - \kappa(r)/2$. Как видно из рисунка, имеется несколько возможностей: а) если $\Omega_p > \Omega_{pr}^{max}$, то внутренних линдбладовских резонансов нет вообще; б) если $\Omega_p < \Omega_{pr}^{max}$, то возникают два резонанса: внутренний ILR (r_{2i}) и внешний ILR (r_{2e}).

В заключение этого раздела заметим, что условие линдбладовского резонанса может быть также интерпретировано как условие равенства частоты волны Ω_p и угловой скорости прецессии орбиты; при $m = 2$ $\Omega_{pr} = \Omega_2 - \Omega_2/2$ или $\Omega_{pr}^+ = \Omega_2 + \Omega_2/2$ ($= \Omega \pm \kappa/2$ в эпициклическом приближении); скорость прецессии равна угловой скорости вращающейся системы отсчета, в которой орбита является замкнутой (представляя собой эллипсоподобный овал). Напомним, что, например, теория устойчивости низкочастотных возмущений в гравитирующих системах наиболее естественно формулируется [12]

как раз на языке скоростей прецессии орбит (а не скоростей частиц).

2.3. Равновесные функции распределения звезд в круговом диске в эпициклическом и постэпициклическом приближениях

Функция распределения диска с круговыми орбитами частиц (который будем также называть «холодным») есть

$$f_0 \propto \delta(v_r)\delta(\tilde{v}_\varphi).$$

Соответственно, функцию распределения звездной системы с орбитами, близкими к круговым, можно представить в виде формального ряда по δ -функциям от v_r , \tilde{v}_φ и их производным [1, 2, 13]:

$$f_0 = a_1\delta(v_r)\delta(\tilde{v}_\varphi) + b_1\delta'(v_r)\delta(\tilde{v}_\varphi) + b_2\delta(v_r)\delta'(\tilde{v}_\varphi) + c_1\delta''(v_r)\delta(\tilde{v}_\varphi) + c_2\delta'(v_r)\delta'(\tilde{v}_\varphi) + c_3\delta(v_r)\delta''(\tilde{v}_\varphi). \quad (30)$$

Подставляя разложение (30) в равновесное кинетическое уравнение

$$v_r \frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \frac{\partial f_0}{\partial v_r} + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial f_0}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial f_0}{\partial v_\varphi} = 0 \quad (31)$$

и приравнявая нулю коэффициенты при различных комбинациях производных δ -функций, получим равенства:

$$c_2 = 0 \quad (\text{т. е. } \overline{v_r \tilde{v}_\varphi} = 0);$$

$b_1 = 0$ (т. е. отсутствие радиального потока, $\bar{v}_r = 0$);

$$c_3 = c_1 \kappa^2 / 4\Omega^2,$$

что соответствует определенной связи между радиальной (c_r) и азимутальной (c_φ) дисперсиями скоростей звезд: $c_\varphi = c_r \kappa / 2\Omega$, а также следующее общее выражение для азимутального потока звезд:

$$b_2 = \Pi_\varphi = \frac{1}{2\Omega r} \left[(r\sigma_0 c_r^2)' - \frac{\kappa^2 \sigma_0}{4\Omega^2} c_r^2 \right]. \quad (32)$$

Соответственно, вместо (30) мы имеем общее выражение для равновесной функции распределения звезд с почти круговыми орбитами в виде

$$f_0 = \sigma_0(r) \left\{ \delta(v_r)\delta(\tilde{v}_\varphi) - \frac{1}{2\Omega r \sigma_0} \times \left[(r\sigma_0 c_r^2)' - \frac{\kappa^2 \sigma_0}{4\Omega^2} c_r^2 \right] \delta(v_r)\delta'(\tilde{v}_\varphi) + \frac{1}{2} c_r^2(r) \times \delta''(v_r)\delta(\tilde{v}_\varphi) + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{4\Omega^2} c_r^2(r) \delta(v_r)\delta''(\tilde{v}_\varphi) \right\}. \quad (33)$$

Вообще говоря, произвольно можно задавать поверхностную плотность системы $\sigma_0(r)$ и дисперсию радиальных скоростей $c_r(r)$ (которая должна быть малой). Функция $\Omega(r)$ вычисляется из условия равновесия звезды на круговой орбите:

$$\Omega^2 r = d\Phi_0/dr,$$

где потенциал $\Phi_0(r)$ определяется распределением всех масс в галактике, одну из компонент которой (наиболее плоскую, дисковую) мы рассматриваем.

Найдем соответствующую (33) «размазанную» функцию распределения вида

$$f_0(E, L) = F_0(r_0, \mathcal{E}), \quad (34)$$

где E и L — соответственно, энергия и угловой момент звезды (в расчете на единицу массы):

$$E = \frac{1}{2}(v_r^2 + v_\varphi^2) + \Phi_0(r),$$

$L = rv_\varphi$, r_0 и \mathcal{E} — «эпициклические» интегралы, которые определяются как функции E и L из уравнений [14]:

$$r_0^2 \Omega(r_0) = L, \quad \mathcal{E} = E - E_c(r_0), \quad (35)$$

$$E_c(r_0) = \frac{1}{2} r_0^2 \Omega^2(r_0) + \Phi_0(r_0),$$

$$r_0 \Omega^2(r_0) = \frac{d\Phi_0}{dr_0}. \quad (36)$$

Мы будем считать отклонения от круговых движений малыми, т. е.

$$|\mathcal{E}| \ll |E_c|, \quad |r - r_0| \ll r_0.$$

Примером функции распределения вида (34) является обобщенная шварцшильдовская функция распределения

$$F_0 = P(r_0) \exp \left[-\frac{\mathcal{E}}{c_0^2(r_0)} \right], \quad (37)$$

которая была введена в рассмотрение Шу [14], где функции $P(r_0)$ и $c_0(r_0)$ следует выразить через поверхностную плотность и дисперсию радиальных скоростей. С необходимой для дальнейшего исполь-

зования точностью функция распределения вида (37) может быть в переменных $r, v_r, \tilde{v}_\varphi$ записана как

$$F_0(r, v_r, \tilde{v}_\varphi) = \frac{2\Omega}{\kappa} \frac{\sigma_0}{2\pi c_0^2} \exp \left[-\frac{v_r^2 + \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^2}{2c_0^2} \right] \times \\ \times \left\{ 1 + \left(\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} + \frac{\Omega'}{\Omega} - \frac{\kappa'}{\kappa} \right) \frac{1}{\kappa} \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\Omega'}{\Omega} - \frac{2\kappa'}{3\kappa} \right) \frac{1}{2\kappa c_0^2} \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^3 \right\}, \quad (38)$$

где

$$\tilde{v}_\varphi = \frac{r_0^2 \Omega(r_0)}{r} - r\Omega(r) \quad (39)$$

обозначает остаточную азимутальную скорость. В (38) принято, что $c_r = c_0 \neq c_0(r)$; это несколько упрощает выкладки, но принципиального значения не имеет.

Легко убедиться в том, что функция распределения (38) действительно принадлежит типу (37) с

$$P(r_0) = \frac{2\Omega(r_0)}{\kappa(r_0)} \frac{\sigma_0(r_0)}{2\pi c_0^2}.$$

Для этого нужно прежде всего, раскладывая правую часть равенства (39) по степеням малой разности $r_0 - r$, найти связь между $r_0 - r$ и \tilde{v}_φ :

$$r_0 - r \approx \frac{1}{\kappa} \frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} - \frac{2\Omega}{\kappa^4} \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^2. \quad (40)$$

Раскладывая затем по степеням $r_0 - r$ правую часть равенства

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} v_r^2 + \frac{r_0^4 \Omega^2(r_0)}{2r^2} - \frac{1}{2} r_0^2 \Omega^2(r_0) + \Phi_0(r) - \Phi_0(r_0) \quad (41)$$

и подставляя затем в получившееся выражение $r_0 - r$ из (40), после некоторых преобразований найдем

$$\mathcal{E} \approx \frac{v_r^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^3 \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\Omega'}{\Omega} - \frac{2\kappa'}{3\kappa} \right). \quad (42)$$

Наконец, записывая с помощью (40)

$$P(r_0) \approx P(r) [1 + (r_0 - r)P'(r)] \approx \\ \approx \frac{2\Omega}{\kappa} \frac{\sigma_0}{2\pi c_0^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} + \frac{\Omega'}{\Omega} - \frac{\kappa'}{\kappa} \right) \frac{1}{\kappa} \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right) \right\}$$

и представляя экспоненту из (37) в виде

$$\exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{c_0^2}\right) \approx \exp\left[-\frac{v_r^2 + \left(\frac{2\Omega\tilde{v}_\varphi}{\kappa}\right)^2}{2c_0^2}\right] \times \left\{1 - \left(\frac{\Omega'}{\Omega} - \frac{2\kappa'}{3\kappa}\right) \frac{1}{2\kappa c_0^2} \left(\frac{2\Omega\tilde{v}_\varphi}{\kappa}\right)^3\right\},$$

приходим к (38).

Вычисляя азимутальный поток

$$\Pi_\varphi = \int \tilde{v}_\varphi F_0 dv_r d\tilde{v}_\varphi,$$

получим для него выражение, согласующееся с (33) (при $c_0 = \text{const}$).

Функция распределения в эпициклическом приближении получается из (38), если из всего выражения в фигурных скобках оставить только единицу:

$$f_0 = \frac{2\Omega(r)}{\kappa(r)} \frac{\sigma_0(r)}{2\pi c_0^2} \exp\left(-\frac{v_r^2}{2c_r^2} - \frac{\tilde{v}_\varphi^2}{2c_\varphi^2}\right), \quad (43)$$

где

$$c_\varphi^2 = c_r \kappa^2 / 4\Omega^2.$$

Именно эта функция распределения — она называется шварцшильдской — чаще всего используется как в теоретических работах (например, в теории устойчивости гравитирующих дисков [15–17]), так и при обработке наблюдательных данных и сравнении их с теорией. Шварцшильдская функция распределения есть, очевидно, анизотропная функция распределения Максвелла, но с определенной анизотропией температур:

$$\frac{T_r}{T_\varphi} = \frac{c_r^2}{c_\varphi^2} = \left(\frac{2\Omega}{\kappa}\right)^2.$$

Для наших целей, однако, чистого шварцшильдского распределения недостаточно, и необходимо будет использовать функцию распределения более общего вида (38).

3. ОТКЛИКИ ГРАВИТИРУЮЩИХ ДИСКОВ С КОНЕЧНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ СКОРОСТЕЙ ЗВЕЗД

3.1. Вывод выражений для резонансных откликов

Линеаризованное кинетическое уравнение записывается в виде (см., например, [1, 2, 18])

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}, \quad (44)$$

где d/dt — временная производная по невозмущенной траектории звезды в фазовом пространстве, f_1 и Φ_1 — возмущения функции распределения и потенциала.

Для функции распределения вида (34) правая часть (44) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{E}} \frac{d\Phi_1}{dt} + i\omega_*(r_0) \frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{E}} \Phi_1 + \frac{2im\Omega(r_0)}{r_0 \kappa^2(r_0)} \frac{\partial F_0}{\partial r_0} \Phi_1. \quad (45)$$

Записывая решение $f_1(r, v_r, v_\varphi) \exp(-i\omega t + im\varphi)$ (ω — частота) уравнения (44) с правой частью (45) в виде «интеграла по траекториям» (см., например, [1, 2]) и интегрируя затем f_1 по скоростям, получим возмущение поверхностной плотности $\sigma_1(r) \exp(-i\omega t + im\varphi)$:

$$\begin{aligned} \sigma_1(r) = & \int dv_r d\tilde{v}_\varphi f_1 = -\frac{1}{c_0^2} \int dv_r d\tilde{v}_\varphi \times \\ & \times F_0 \left\{ \Phi_1(r) + i\omega_*(r_0) \int_{-\infty}^0 \Phi_1[r(t)] \times \right. \\ & \times \exp[-i\omega t + im[\varphi(t) - \varphi]] dt \left. \right\} + \\ & + \int dv_r d\tilde{v}_\varphi \frac{2im\Omega(r_0)}{r_0 \kappa^2(r_0)} \frac{\partial F_0}{\partial r_0} \times \\ & \times \int_{-\infty}^0 \Phi_1[r(t)] \exp[-i\omega t + im[\varphi(t) - \varphi]] dt, \quad (46) \end{aligned}$$

где обозначено

$$\omega_*(r_0) = \omega - m\Omega(r_0);$$

считается, что функции $r(t)$ и $\varphi(t)$ представляют невозмущенную траекторию звезды, которая в момент $t = 0$ имеет координаты (r, φ) и скорости (v_r, v_φ) , и предположено, что равновесная функция распределения имеет обобщенно-шварцшильдскую форму (37) при $c_0 = \text{const}$. Отсюда очевидно, что для правильного перехода к предельному случаю холодного диска ($c_0 \rightarrow 0$) необходимы выражения для $r(t)$ и $(\varphi(t) - \varphi)$, вычисленные в постэпициклическом приближении. Ниже мы также будем осуществлять этот переход, но не раскладывая при этом резонансные знаменатели.

Заметим, что постэпициклическое приближение для радиуса $r(t) = r + \delta r$ ранее использовалось Шу [14] в его теории туго закрученной спираль

ных волн плотности, обобщающей теорию Лина и Шу [16, 17]; однако в представленных в цитированной работе Шу формулах для δr и связи между r_0 и r имеются ошибки.

Разложим входящую в интеграл по траекториям функцию $\Phi_1[r(t)]$ в ряд Тэйлора по степеням $\delta r = r(t) - r$ с точностью до членов $\sim (\delta r)^2$:

$$\Phi_1[r(t)] \approx \Phi_1(r) + \delta r \Phi_1'(r) + \frac{1}{2}(\delta r)^2 \Phi_1''(r); \quad (47)$$

соответственно разложим по степеням

$$\delta \varphi = \varphi(t) - \varphi - (\Omega_0 + \delta \Omega)t$$

и экспоненту:

$$\exp[-i\omega t + im[\varphi(t) - \varphi]] = \exp[-i[\omega_*(r_0) - m\delta\Omega]t] \times \quad \text{где}$$

$$\times \exp[im\delta\varphi] \approx \exp[-i[\omega_*(r_0) - m\delta\Omega]t] \times \left\{ 1 + im\delta\varphi - \frac{m^2}{2}(\delta\varphi)^2 \right\}. \quad (48)$$

Ясно, что использование этих разложений допустимо в том случае, если возмущающий потенциал $\Phi_1(r, \varphi)$ мало меняется на длине эллипса. Этому условию удовлетворяют оба упоминавшихся нами способа возбуждения резонансных откликов (баром или спутником).

Получающееся после некоторых вычислений выражение для возмущения поверхностной плотности удобно представить в виде

$$\sigma_1 = \Sigma_1 \Phi_1''(r) + \Sigma_2 \Phi_1'(r) + \Sigma_3 \Phi_1(r), \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & -\frac{1}{c_0^2} \int dv_r d\tilde{v}_\varphi F_0 \cdot \frac{1}{2} \omega_*(r) \int_{-\infty}^0 dt \exp(-i\omega_*(r)t) \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2\kappa t) \frac{v_r^2}{\kappa^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(3 - 4 \cos \kappa t + \cos 2\kappa t) \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = & -\frac{1}{c_0^2} \int dv_r d\tilde{v}_\varphi F_0 \cdot i\omega_*(r_0) \int_{-\infty}^0 dt \exp(-i\omega_*(r_0)t) \left[(1 - \cos \kappa_0 t) \frac{1}{\kappa_0} \left(\frac{2\Omega_0 \tilde{v}_\varphi}{\kappa_0} \right) + \right. \\ & \left. + \sin(\kappa_0 t) \frac{v_r}{\kappa_0} + \frac{2\Omega\alpha}{\kappa^4} \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^2 (1 - \cos \kappa t) + \frac{2\Omega\beta}{\kappa^4} v_r^2 (1 - \cos \kappa t) \right] \times \\ & \times \left\{ 1 + im \left[\sin(\kappa_0 t) \frac{2\Omega_0}{\kappa_0^2 r_0} \frac{2\Omega_0 \tilde{v}_\varphi}{\kappa_0} - (1 - \cos \kappa_0 t) \frac{2\Omega_0}{\kappa_0^2 r_0} v_r \right] \right\}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_3 = & -\frac{1}{c_0^2} \int dv_r d\tilde{v}_\varphi F_0 \cdot i\omega_*(r_0) \int_{-\infty}^0 dt \exp(-i\omega_*(r_0)t) \left\{ im \left[\sin(\kappa_0 t) \frac{2\Omega_0}{\kappa_0^2 r_0} \left(\frac{2\Omega_0 \tilde{v}_\varphi}{\kappa_0} \right) - \right. \right. \\ & - \frac{2\Omega_0 v_r}{\kappa_0^2 r_0} (1 - \cos \kappa_0 t) + \sin(\kappa t) \left(\frac{4\Omega^2}{\kappa^2} \right) \frac{\alpha}{\kappa^3 r} \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^2 - \sin(\kappa t) \left(\frac{4\Omega^2}{\kappa^2} \right) \frac{\beta}{\kappa^3 r} v_r^2 \left. \right] - \\ & - \frac{m^2 \Omega^2}{\kappa^4 r^2} \left[(1 - \cos 2\kappa t) \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^2 + (3 - 4 \cos \kappa t + \cos 2\kappa t) v_r^2 \right] \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{c_0^2} \int dv_r d\tilde{v}_\varphi F_0 \frac{m\delta\Omega}{\omega_*(r_0)} + \frac{2im\Omega}{r\kappa^2} \int dv_r d\tilde{v}_\varphi \left. \frac{\partial F_0}{\partial r_0} \right|_{r_0=r} \int_{-\infty}^0 dt \exp(-i\omega_*(r)t). \end{aligned} \quad (52)$$

Интегралы по t в (50)–(52) вычисляются согласно формулам

$$\int_{-\infty}^0 dt \exp(-i\omega_*(r_0)t) = \frac{1}{-i\omega_*(r_0)},$$

$$\int_{-\infty}^0 \exp(-i\omega_*(r_0)t) \sin(\kappa_0 t) dt = \frac{\kappa_0}{\omega_*^2(r_0) - \kappa_0^2},$$

$$\int_{-\infty}^0 \exp(-i\omega_*(r_0)t) \cos(\kappa_0 t) dt = -\frac{\omega_*(r_0)}{i(\omega_*^2(r_0) - \kappa_0^2)}.$$

При интегрировании по скоростям нужно прежде всего иметь в виду, что равновесная функция распределения диска с почти круговыми орбитами удовлетворяет условиям

$$\int v_r F_0 dv_r d\tilde{v}_\varphi = 0, \quad \int v_r \tilde{v}_\varphi F_0 dv_r d\tilde{v}_\varphi = 0, \quad (53)$$

$$\int v_r^2 F_0 dv_r d\tilde{v}_\varphi = \int \left(\frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa} \right)^2 F_0 dv_r d\tilde{v}_\varphi. \quad (54)$$

Важно также учитывать и тот факт, что азимутальный поток

$$\Pi_\varphi = \int \tilde{v}_\varphi F_0 dv_r d\tilde{v}_\varphi \approx \sigma_0 \frac{c_0^2}{\Omega r} \neq 0. \quad (55)$$

Свойства (53)–(55), как и конкретное выражение для потока Π_φ , были выведены в предыдущем разделе.

Если сделать напрашивающуюся симметризирующую замену

$$v_r \rightarrow x = \frac{v_r}{c_0}, \quad \tilde{v}_\varphi \rightarrow y = \frac{2\Omega \tilde{v}_\varphi}{\kappa c_0}, \quad (56)$$

получим

$$F_0(v_r, \tilde{v}_\varphi) dv_r d\tilde{v}_\varphi = f_0(r, x, y) dx dy, \quad (57)$$

$$f_0(r, x, y) = \frac{\sigma_0}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \times \left\{ 1 + \rho y \left(\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} + \frac{\Omega'}{\Omega} - \frac{\kappa'}{\kappa} \right) - \frac{1}{2} \rho y^3 \left(\frac{\Omega'}{\Omega} - \frac{2\kappa'}{3\kappa} \right) \right\}, \quad (58)$$

где $\rho = c_0/\kappa$ — характерный размер эписцикла. Простые вычисления позволяют свести выражения (50)–(52) для $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ к виду

$$\Sigma_1 = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{y^2 e^{-y^2/2}}{\omega_*^2(r_0) - \kappa^2(r_0)}, \quad (59)$$

$$\Sigma_2 = C^{(1)} + C^{(2)}, \quad (60)$$

$$C^{(1)} = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}\rho} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2/2}}{\omega_*^2(r_0) - \kappa^2(r_0)} \times \left[y + y^2 \rho \left(\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} + \frac{2\Omega'}{\Omega} - \frac{\kappa'}{\kappa} \right) - \frac{1}{2} y^4 \rho \left(\frac{\Omega'}{\Omega} - \frac{2\kappa'}{3\kappa} \right) \right], \quad (61)$$

$$C^{(2)} = -\frac{2\Omega}{\kappa^2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2/2}}{\omega_*^2(r_0) - \kappa^2(r_0)} (\alpha y^2 + \beta), \quad (62)$$

$$\Sigma_3 = A + D^{(1)} + D^{(2)}, \quad (63)$$

$$A = -\frac{2m\Omega}{r\kappa^2} \left(\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} + \frac{\Omega'}{\Omega} \right) \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2/2}}{\omega_*(r_0)} + \frac{m\Omega}{r\kappa^2} \frac{\kappa'}{\kappa} \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2/2} (3 + y^2)}{\omega_*(r_0)}, \quad (64)$$

$$D^{(1)} = \frac{2m\Omega\omega_*}{\kappa^2 r} \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}\rho} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2/2}}{\omega_*^2(r_0) - \kappa^2(r_0)} \times \left[y + y^2 \rho \left(\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} + \frac{3\Omega'}{\Omega} - \frac{m\Omega'}{\omega_*} - \frac{3\kappa'}{\kappa} - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} y^4 \rho \left(\frac{\Omega'}{\Omega} - \frac{2\kappa'}{3\kappa} \right) \right], \quad (65)$$

$$D^{(2)} = \frac{4\Omega^2}{\kappa^2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2/2}}{\omega_*^2(r_0) - \kappa^2(r_0)} \times \left[(\alpha y^2 + \beta) \frac{m\omega_*}{r\kappa^2} + \frac{m^2}{r^2} \right]. \quad (66)$$

Предполагается, что все функции, стоящие в (59)–(66) коэффициентами перед интегралами, вычисляются в положении резонанса $r = r_c$. Во всех этих формулах нужно считать, что

$$r_0 \approx r + \rho y, \quad (67)$$

а, например, вблизи коротации

$$\omega_*(r_0) \approx m|\Omega'(r_c)|[(r - r_c) + \rho y + i\delta], \quad (68)$$

$\delta = \gamma/m|\Omega'(r_c)|$, γ — мнимая часть частоты: $\omega = m\Omega_p + i\gamma$, Ω_p — угловая скорость волны.

Чтобы перейти к пределу холодного диска, нужно в (59) — (66) разложить резонансные знаменатели:

$$\frac{1}{\omega_*(r_0)} \rightarrow \frac{1}{\omega_*(r)} + \left(\frac{1}{\omega_*(r)} \right)' \rho y,$$

$\frac{1}{\omega_*^2(r_0) - \kappa^2} \rightarrow \frac{1}{\omega_*^2(r) - \kappa^2} + \left(\frac{1}{\omega_*^2(r) - \kappa^2}\right)' \rho y,$
 учсть, что

$$\alpha + \beta = \frac{\kappa^2(1 - r\Omega'/2\Omega)}{2\Omega r},$$

и вычислить возникающие интегралы по y . Легко убедиться в том, что в результате предельного перехода получается следующее выражение для $\sigma_1(r)$:

$$\sigma_1(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r\varepsilon \frac{d\Phi_1}{dr} \right) + \frac{4}{r^2} \varepsilon \Phi_1 + \frac{4}{r\omega_*} \Phi_1 \frac{d}{dr} (\varepsilon\Omega). \quad (69)$$

Здесь

$$\varepsilon(r) = \frac{\sigma_0(r)}{\omega_*^2 - \kappa^2}$$

— гравитационный аналог диэлектрической проницаемости.

Для удобства сравнения выражение (69) полезно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & -\Phi_1'' \frac{\sigma_0}{\omega_*^2 - \kappa^2} - \frac{\Phi_1'}{r} \times \\ & \times \left\{ \frac{\sigma_0}{\omega_*^2 - \kappa^2} + \frac{r\sigma_0'}{\omega_*^2 - \kappa^2} + \sigma_0 r \left(\frac{1}{\omega_*^2 - \kappa^2} \right)' \right\} + \\ & + \Phi_1 \left\{ \frac{2m\Omega\sigma_0'}{r\kappa^2} \left(\frac{\omega_*}{\omega_*^2 - \kappa^2} - \frac{1}{\omega_*} \right) + \frac{m^2}{r^2} \frac{\sigma_0}{\omega_*^2 - \kappa^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2m\Omega'\sigma_0}{r\kappa^2} \left(\frac{\omega_*}{\omega_*^2 - \kappa^2} - \frac{1}{\omega_*} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{2m\Omega\sigma_0}{r\kappa^2} \frac{\omega_* (\omega_*^2 - \kappa^2)'}{(\omega_*^2 - \kappa^2)^2} - \frac{4m^2\Omega\sigma_0}{r^2\kappa^2} \frac{r\Omega'}{\omega_*^2 - \kappa^2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{4m\Omega\sigma_0}{r(\omega_*^2 - \kappa^2)\omega_*} \frac{\kappa'}{\kappa} \right\}. \quad (70) \end{aligned}$$

Как видно из (69), в приближении холодного диска проявляются только главные галактические резонансы: коротационный ($\omega_* = 0$) и линдбладовские ($\omega_*^2 = \kappa^2$).

Отметим, что выражение (69) можно получить непосредственно из гидродинамических уравнений с нулевым давлением (что соответствует чисто круговому движению всех частиц диска). Действительно, линеаризуя такие уравнения гидродинамики (записанные в цилиндрических координатах), получим

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial t} + \Omega \frac{\partial\sigma_1}{\partial\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_0 v_{r1}) + \frac{\sigma_0}{r} \frac{\partial v_{\varphi 1}}{\partial\varphi} = 0, \quad (71)$$

$$\frac{\partial v_{r1}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v_{r1}}{\partial\varphi} - 2\Omega v_{\varphi 1} = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}, \quad (72)$$

$$\frac{\partial v_{\varphi 1}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v_{\varphi 1}}{\partial\varphi} + \frac{\kappa^2}{2\Omega} 2\Omega v_{r1} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}, \quad (73)$$

где $v_{r1}, v_{\varphi 1} = v_\varphi - r\Omega(r)$ — возмущенные скорости. Из последних двух уравнений находим

$$v_{r1} = \frac{1}{\omega_*^2 - \kappa^2} \left(-i\omega_* \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + \frac{2im\Omega}{r} \Phi_1 \right), \quad (74)$$

$$v_{\varphi 1} = \frac{1}{\omega_*^2 - \kappa^2} \left(\frac{m\omega_*}{r} \Phi_1 - \frac{\kappa^2}{2\Omega} \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} \right). \quad (75)$$

Подставляя (74) и (75) в (71), после некоторых преобразований приходим к соотношению (69) между Φ_1 и σ_1 . Заметим, что это соотношение в компактном виде (69) было впервые дано в работе [19].

Как это ни удивительно, предельный переход к случаю холодного диска из кинетического рассмотрения никем ранее не был выполнен (не были даже выведены необходимые для такого предельного перехода корректные выражения для "траекторий" в постэпициклическом приближении). Нас, однако, интересует влияние малого разброса скоростей, модифицирующего резонансные знаменатели. Интересуясь областями диска вблизи того или другого резонанса, мы должны выделить из (59) — (66) доминирующие члены.

Особенно простое выражение для отклика поверхностной плотности получается в области коротационного резонанса:

$$\sigma_1 = A\Phi_1. \quad (76)$$

Вблизи линдбладовских резонансов получается гораздо более громоздкое выражение:

$$\sigma_1 \approx B\Phi_1'' + C\Phi_1' + D\Phi_1, \quad (77)$$

где обозначено

$$B = \Sigma_1, \quad C = \Sigma_2, \quad D = \Sigma_3 - A.$$

3.2. Отклики дисков вблизи главных резонансов

Возможные резонансные отклики дисков довольно разнообразны. Мы, однако, сосредоточимся лишь на откликах, имеющих спиральный вид (хотя резонансные отклики других форм описываются теми же общими выражениями (76), (77) и легко могут быть из них получены). Именно спиральные отклики чаще всего присутствуют в галактиках. В то же время, например, кольца в действительности часто состоят из пар почти круговых полуоборотных спиралей, которые выявляются при наблюдениях с лучшим разрешением.

Как уже отмечалось, галактический диск способен резонансным образом откликаться на воздействие со стороны центрального бара или спутника

(см. рис. 1). Выведенные нами выражения для резонансных откликов пригодны для использования в обоих случаях, но ниже мы для определенности ограничимся более подробным изучением откликов, вызванных барами.

Определим сначала отклики диска, получающиеся в пределе $\gamma \rightarrow 0$; они представляют особый интерес, так как соответствуют квазистационарным состояниям (об этом см. также в п. 4 Заключения). При таком предельном переходе резонансные знаменатели упрощаются следующим образом:

$$\frac{1}{\omega_*(r_0)} \propto \frac{1}{y + \delta r' + i\delta'} = P \frac{1}{y + \delta r'} - i\pi\delta(y + \delta r'), \quad (78)$$

$$\frac{1}{\omega_*(r_0) + \kappa(r_0)} \propto \frac{1}{-\text{sgn}(\Omega'_{pr})(y + \delta r') + i\delta''} = \begin{cases} \frac{1}{y + \delta r' + i\delta''} = P \frac{1}{y + \delta r'} - i\pi\delta(y + \delta r'), \\ \Omega'_{pr} < 0, \\ -\frac{1}{y + \delta r' - i\delta''} = -P \frac{1}{y + \delta r'} - i\pi\delta(y + \delta r'), \\ \Omega'_{pr} > 0, \end{cases} \quad (79)$$

$$\frac{1}{\omega_*(r_0) - \kappa(r_0)} \propto \frac{1}{y + \delta r' + i\delta'''} = P \frac{1}{y + \delta r'} - i\pi\delta(y + \delta r'), \quad (81)$$

где

$$\delta r' = \frac{r - r_c}{\rho}, \quad \delta' = \frac{\gamma}{2\rho|\Omega'|},$$

$$\delta'' = \frac{\gamma}{2\rho|\Omega'_{pr}|}, \quad \delta''' = \frac{\gamma}{2\rho|\Omega'^+_{pr}|};$$

P означает главное значение; напомним также введенные ранее (в конце раздела 2.2) обозначения для скоростей прецессии орбит в эпициклическом приближении:

$$\Omega_{pr} = \Omega - \kappa/2, \quad \Omega_{pr}^+ = \Omega + \kappa/2.$$

Поэтому для отклика на коротации имеем

$$\sigma_1 \propto A_c(\delta r') \cos\{2[\varphi - \varphi_0^{(c)}(\delta r')]\}, \quad (82)$$

где

$$A_c(\delta r') = \sqrt{R_c^2(\delta r') + I_c^2(\delta r')}, \quad (83)$$

$$R_c(\delta r') = P \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2/2}}{y + \delta r'} \times \left[\frac{\kappa'}{\kappa}(3 + y^2) - 2 \left(\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} + \frac{\Omega'}{\Omega} \right) \right], \quad (84)$$

$$I_c(\delta r') = \pi \exp(-(\delta r')^2/2) \times \left\{ \frac{\kappa'}{\kappa}[3 + (\delta r')^2] - 2 \left(\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} + \frac{\Omega'}{\Omega} \right) \right\}, \quad (85)$$

$$\text{tg}[2\varphi_0^{(c)}(\delta r')] = \frac{I_c(\delta r')}{R_c(\delta r')}. \quad (86)$$

Согласно (82), отклик σ_1 , выраженный в переменных $\delta r', \varphi$, представляет собой универсальную функцию (для заданной равновесной модели, т.е. в данном случае при фиксированных значениях $\sigma'_0/\sigma_0, \Omega'/\Omega, \kappa'/\kappa$ на круге коротации). В частности, универсальным является уравнение спирали, соответствующей максимальной плотности (на каждом радиусе):

$$\varphi = \varphi_0^{(c)}(\delta r'). \quad (87)$$

Соответственно, одинаковыми являются и изменения азимута $\Delta\varphi$ вдоль этой спирали при падении амплитуды A в какое-то определенное число раз (поскольку амплитуда также является заданной функцией $\delta r'$). С другой стороны, из сказанного следует, что в реальных координатах (r, φ) толщина спирального отклика и угол наклона спирали пропорциональны размеру эпицикла ρ . Эти свойства откликов на коротации иллюстрируются рис. 4а, б, где считается, что $r_c = 1$, и принята модель с типичными для спиральных галактик значениями:

$$\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} = -\frac{1}{r_c/2}, \quad \frac{\Omega'}{\Omega} = -\frac{1}{r_c}, \quad \frac{\kappa'}{\kappa} = -\frac{1}{r_c}. \quad (88)$$

Аналогично, на внешнем ILR получаем (оставляя в выражении для отклика главные члены)

$$\sigma_1 \propto -(n - n_{cr})A_L(\delta r') \cos\{2[\varphi - \varphi_0^{(L)}(\delta r')]\}, \quad (89)$$

где n — показатель степени в принимаемой зависимости

$$\Phi_1 \propto r^{-n} \cos 2\varphi$$

для потенциала бара ($n > 0$, бар считаем расположенным вертикально), $n_{cr} = 4\Omega/\kappa|_{r_c}$,

$$A_L(\delta r') = \sqrt{R_L^2(\delta r') + I_L^2(\delta r')}, \quad (90)$$

$$\text{tg}[2\varphi_0^{(L)}(\delta r')] = \frac{I_L(\delta r')}{R_L(\delta r')}, \quad (91)$$

Рис. 4. Резонансные отклики диска на коротации ($r_c = 1$). Диск вращается против часовой стрелки. Бар ориентирован вертикально. Степень почернения увеличивается с ростом величины возмущенной поверхностной плотности. а) — «Универсальная» спираль при $\rho = 0.1$; б) — «универсальная» спираль при $\rho = 0.2$; в) — отклик холодного диска при $\gamma = 0.05$; г) отклик диска при $\gamma = 0.05, \rho = 0.05$

а выражения для функций $R_L(\delta r')$ и $I_L(\delta r')$ мы приведем здесь лишь для случая конкретной модели (88):

$$R_L(\delta r') = P \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{ye^{-y^2/2}}{y + \delta r'}, \quad (92)$$

$$I_L(\delta r') = -\pi \delta r' e^{-(\delta r')^2/2}. \quad (93)$$

Отклики, вычисленные по формулам (90) — (93) для $\rho = 0.1, 0.2$, представлены на рис. 5а, б. При этом кривая вращения $v_{0\varphi} = r\Omega(r)$ предполага-

лась плоской: $v_{0\varphi} = \text{const}$ (что приближенно выполняется для большей части диска в большинстве спиральных галактик); для такой кривой вращения $n_{cr} = 2\sqrt{2} \approx 2.82$.

Выражения для откликов на двух оставшихся главных резонансах (внутреннем ILR и OLR) мы здесь не приводим; вычисленные по соответствующим формулам отклики на внутреннем ILR даны на рис. 6а, б; что же касается откликов на OLR, то они подобны откликам на внешнем ILR при $n < n_{cr}$ (рис. 5а, б). Обратим внимание на присущую откли-

Рис. 5. Резонансные отклики диска на внешнем ILR ($r_c = 1$). Диск вращается против часовой стрелки. Бар ориентирован вертикально. Степень почернения увеличивается с ростом величины возмущенной поверхностной плотности. *a* — «Универсальная» спираль при $\rho = 0.1$, $n = 2$, $n < n_{cr}$, $n_{cr} = 2.82$; *б* — «универсальная» спираль при $\rho = 0.2$, $n = 2$, $n < n_{cr}$; *в* — отклик холодного диска при $\gamma = 0.05$, $n = 2$, $n < n_{cr}$; *г* — отклик диска при $\gamma = 0.05$, $\rho = 0.05$, $n = 2$, $n < n_{cr}$; *д* — отклик холодного диска при $\gamma = 0.05$, $n = 3$, $n > n_{cr}$; *е* — отклик диска при $\gamma = 0.05$, $\rho = 0.05$, $n = 3$, $n > n_{cr}$

Рис. 6. Резонансные отклики диска на внутреннем ILR ($r_c = 1$). Диск вращается против часовой стрелки. Бар ориентирован вертикально. Степень почернения увеличивается с ростом величины возмущенной поверхностной плотности.

a — «Универсальная» спираль при $\rho = 0.1$, $n = 3$, $n > n_{cr}$, $n_{cr} = 2.82$; *б* — «универсальная» спираль при $\rho = 0.2$, $n = 3$, $n > n_{cr}$; *в* — отклик холодного диска при $\gamma = 0.05$, $n = 3$, $n > n_{cr}$; *г* — отклик диска при $\gamma = 0.05$, $\rho = 0.05$, $n = 3$, $n > n_{cr}$; *д* — отклик холодного диска при $\gamma = 0.05$, $n = 2$, $n < n_{cr}$; *е* — отклик диска при $\gamma = 0.05$, $\rho = 0.05$, $n = 2$, $n < n_{cr}$

кам на внутреннем ILR особенность: они имеют вид «лидирующих» спиралей, т. е. раскручиваются в сторону вращения галактического диска (против часовой стрелки). Во всех остальных случаях (см. рис. 4, 5) спирали являются «отстающими», они как бы тянутся вслед за вращением галактики (подробнее об этом см. в Заключение).

Рассмотрим теперь отклики холодных дисков ($\rho = 0$). Поскольку ранее этот случай уже исследовался [20, 21], мы ограничимся лишь несколькими замечаниями, относящимися к откликам спирального вида (с тем чтобы затем сравнить их с откликами в дисках с почти круговыми — но не точно круговыми — орбитами).

1. Вблизи коротации ($\omega_* \approx 0$, т. е. $\Omega_p = \Omega(r_c)$, $\Omega_p = \omega/2$) из уравнения (69) получаем

$$\sigma(r, \varphi) \approx \frac{2r^{-n-1}}{\sqrt{\Omega_c'^2(r-r_c)^2 + \gamma^2/4}} \times \frac{d}{dr} \left(\frac{\Omega\sigma_0}{\kappa^2} \right) \cos 2(\varphi - \varphi_c(r)), \quad (94)$$

$$\text{tg } 2\varphi_c(r) = -\frac{\gamma}{2\Omega_c'(r-r_c)}, \quad (95)$$

где $\Omega_c' = d\Omega/dr|_{r_c}$. Эти формулы описывают двухрукавную отстающую (так как $\Omega_c' < 0$, см. рис. 3) спираль. Типичный отклик представлен на рис. 4в; он относится к простейшей модели экспоненциального диска

$$\sigma_0(r) = \sigma_0(0)e^{-r/r_d}$$

(при $\sigma_0(0) = 1$, $r_d = 1/2$) и плоской кривой вращения $\Omega = V_0/r$ ($V_0 = 1$); бар вращается с угловой скоростью Ω_p , такой что $r_c = 1$. Заметим, что для обеспечения указанной кривой вращения диск должен находиться внутри достаточно массивной сферической компоненты (что в действительности и имеет место); последняя практически не участвует в возмущениях в плоскости диска, ввиду того что орбиты составляющих ее звезд сильно вытянуты.

Максимальная угловая длина каждого рукава равна, очевидно, $\pi/2$; наиболее длинные рукава получаются при малых γ . Рисунок 4в соответствует случаю, когда $|\sigma_0'/\sigma_0| \gtrsim |\Omega'/\Omega|$ (что, по-видимому, всегда выполняется). При обратном неравенстве мы имели бы ненаблюдаемую картину расположения спиралей относительно бара, которая получается из приведенной поворотом против часовой стрелки на $\pi/2$. Промежуточные случаи $|\sigma_0'/\sigma_0| \gtrsim |\Omega'/\Omega|$ описывают вполне реалистическую картину спиралей,

немного заходящих за бар и отходящих от него на угол, меньший $\pi/2$.

2. Вблизи одного из ILR ($r \approx r_{2i}$ или $r \approx r_{2e}$) уравнение (69) дает

$$\frac{\sigma(r)}{\sigma_0(r)} \approx (n_{cr} - n)r\Omega_{pr}' \frac{r^{-n-2}}{\kappa[4(\Omega_b - \Omega_{pr}(r))^2 + \gamma^2]} \times \cos 2(\varphi - \varphi_2(r)), \quad (96)$$

$$\text{tg } \varphi_2(r) = -\frac{\gamma}{2\Omega_{pr}'(r-r_c)}, \quad (97)$$

где

$$\Omega_{pr}' = \left. \frac{d\Omega_{pr}}{dr} \right|_{r_c}, \quad n_{cr} = \left. \frac{4\Omega}{\kappa} \right|_{r_c}$$

(для предполагаемой плоской кривой вращения $n_{cr} = 2\sqrt{2} \approx 2.82$). Из этих формул следует, что при $r \approx r_{2e}$ резонансные отклики имеют вид отстающих двухрукавных спиралей, представленных на рис. 5в, д (соответственно, для случаев, когда величина $n_{cr} - n$ положительна и отрицательна). Максимальная длина каждого из спиральных рукавов равна π . Она достигается при малых γ , когда сами спирали почти круговые, а пара спиралей образует конфигурацию, близкую к кольцу. При $r \approx r_{2i}$ резонансные отклики (рис. 6в, д) похожи на только что рассмотренные, но с двумя важными отличиями. Главное из них — то, что теперь спиральные рукава являются лидирующими (причина в том, что на $r = r_{2i}$ $\Omega_{pr}' > 0$, см. рис. 3). Второе отличие (причина которого та же) заключается в том, что для $r \approx r_{2i}$ спирали отходят от концов бара при $n > n_{cr}$ (а при $n < n_{cr}$ они «ложатся» на концы бара); напомним, что бар предполагается ориентированным вертикально. Отметим, что так же отличаются друг от друга и «универсальные» спирали при $n > n_{cr}$ и $n < n_{cr}$ (на рис. 5а, б (6а, б) эти универсальные отклики представлены только при $n < n_{cr}$ ($n > n_{cr}$)).

Отклики дисков на различных резонансах при $\gamma = 0.05$, $\rho = 0.05$ представлены на рис. 4г; 5г, 5е; 6г, е; они были вычислены по общим формулам (89), (90) для описанной выше равновесной модели. Из сравнения рис. 4в и 4а, б, г для коротации (и аналогичных рисунков для других резонансов) видно, что главным эффектом разброса скоростей звезд является увеличение толщины спирального отклика и степени его открытости; последнее происходит при $\rho > \delta = \gamma/2|\Omega'|$ для CR, $\rho > \delta_1 = \gamma/2|\Omega_{pr}'|$ для ILR и $\rho > \delta_2 = \gamma/2|\Omega_{pr}^{+'}|$ для OLR.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим некоторые принципиальные моменты, связанные с проведенным выше исследованием резонансного возбуждения галактических спиральных рукавов.

1. Вообще говоря, учет влияния на отклик галактического диска конечной дисперсии скоростей звезд (даже если она предполагается малой по сравнению с круговой скоростью) представляет собой трудную задачу. До сих пор она была решена (в аналитической теории Линя и Шу [16, 17]) лишь для случая туго закрученных спиралей. В этой теории принимается, что потенциал Φ_1 , как и все другие возмущения равновесного аксиально-симметричного фона (поверхностная плотность σ_1 , функция распределения f_1 и т. д.), пропорционален e^{ikr} , где k — волновое число, причем

$$kr \gg 1, \quad d \ln k / d \ln r \ll 1.$$

Таким образом, строго говоря, теория правильно описывает отклики галактических дисков под воздействием лишь многооборотных туго закрученных спиралей.

Напомним, что с привлечением соотношения между возмущениями потенциала и поверхностной плотности, вытекающей из уравнения Пуассона,

$$\Phi_1 = -\frac{2\pi G \sigma_1}{|k|}$$

(которое в рассматриваемом приближении также локально), получается известное дисперсионное уравнение Линя–Шу, являющееся одним из основных соотношений современной теории спиральной структуры галактик (подробнее см. [6]).

К интересующей нас задаче об отклике диска на потенциал бара теория Линя–Шу заведомо неприменима: потенциал бара можно описать как предельный случай, противоположный туго закрученным спиральям, которые рассматривались Линем и Шу. Найти общее решение кинетического уравнения в нашей задаче представляется затруднительным (если вообще возможным). Можно, однако, как мы видели выше, сравнительно легко определить, каким образом под влиянием конечной (хотя и малой) дисперсии скоростей модифицируются резонансные знаменатели $1/\omega_*$, $1/(\omega_*^2 - \kappa^2)$, $1/(\omega_*^2 - \kappa^2)^2$ в отклике холодного диска (отдельно для каждого из основных резонансов).

Особо мы бы отметили полученные в разд. 3.2 квазистационарные спиральные отклики. Если измерять ширину кольцевой области Δr , в которой сосре-

доточена спираль, в единицах среднего эпициклического размера $\rho = c_0/\kappa$, то для такого отклика мы получим определенное число (свое для каждого из резонансов: $\Delta r/\rho \approx 2.5$ для CR и $\Delta r/\rho \approx 3.7$ для ILR). Это дает простой способ для практической оценки дисперсии скоростей звезд вблизи концов бара. Если же для какой-то галактики существует независимая оценка дисперсии скоростей, то в этом случае мы получаем тест для проверки характера (резонансного или нерезонансного) прилегающих к бару спиралей.

2. Обращает на себя внимание тот факт, что из полученных нами результатов следует, что амплитуда отклика диска на воздействие со стороны бара практически не зависит от дисперсии скоростей звезд. Это противоречит устоявшемуся (и, на первый взгляд, естественному) мнению, что амплитуда отклика должна быть всегда тем меньше, чем больше дисперсия скоростей.

Кажущийся парадокс объясняется следующим образом. Как показано в теории Линя и Шу [16, 17], для получения отклика диска с дисперсией скоростей c_r на возмущение от туго закрученных спиральных рукавов нужно отклик холодного диска умножить на редуцирующий фактор $\mathcal{F}_\nu(k^2 \rho^2)$, где $k = 2\pi/\lambda$ — радиальное волновое число (λ — длина волны), $\rho = c_r/\kappa$ — размер эпицикла; $\mathcal{F}_\nu(0) = 1$, $\mathcal{F}_\nu(x) < 1$ при $x > 0$ и монотонно убывает с ростом x ; эти свойства функции $\mathcal{F}_\nu(x)$ оправдывают ее название, показывая, что действительно амплитуда отклика должна уменьшаться с ростом дисперсии скоростей. Функция \mathcal{F}_ν становится заметно меньше 1 при $x \sim 1$, т. е. при $\rho \sim \lambda$. Так как в большинстве нормальных спиральных галактик длина волны λ гораздо меньше радиуса R , неравенство $\rho > \lambda$ легко достигается звездами с вполне умеренными дисперсиями скоростей $c_r \ll v_0$ (где v_0 — круговая скорость). Поэтому эффект редукции отклика при увеличении дисперсии скоростей в этом случае очень просто наблюдать, и именно в этом заключается источник упомянутого выше общепринятого мнения. Однако в случае бара формально $k \rightarrow 0$, а фактически $k \sim 1/R$, так что влияние дисперсии скоростей должно стать заметным лишь при $\rho \sim R$, т. е. $c_r \sim v_0$. Следовательно, в приближении почти круговых орбит ($c_r \ll v_0$), которым мы пользовались, отклик не может существенно зависеть от величины дисперсии скоростей.

Более того, поскольку ширина области возбужденных баром спиралей растет вместе с дисперсией скоростей, можно сказать, что в этом смысле эффект в рассматриваемом случае тем заметнее, чем

больше дисперсия скоростей.

3. Остановимся подробнее на откликах диска вблизи внутреннего ILR: они имеют вид лидирующих спиралей (см. рис. 6). Между тем естественным и ожидаемым является отстающий характер спиралей. Именно такими становятся, например, лобье (случайным образом возникшие) возмущения плотности в дифференциально вращающемся диске при убывающей с радиусом угловой скорости $\Omega(r)$: они растягиваются таким дифференциальным вращением в отрезки отстающих спиралей (подробнее см. в [6]). Кроме того, все наблюдавшиеся до самого последнего времени спирали были отстающими, по крайней мере в спиральных галактиках, обладающих регулярной спиральной структурой. Поэтому весьма неожиданным явилось недавнее открытие [22] (см. также [23]) лидирующих спиралей в центральной области галактики NGC 157 (они были обнаружены при обработке фотометрических измерений галактики). Возможно, эти спирали представляют собой описанный выше отклик диска на внутреннем ILR на возмущение со стороны короткого бара галактики NGC 157. Похожая интерпретация, в которой наблюдаемая лидирующая спираль рассматривается как отклик холодного ($\rho = 0$) диска на растущее с некоторым малым инкрементом γ бароподобное возмущение, была предложена и авторами открытия [22]; ранее такая возможность рассматривалась в [20, 21]. Таким образом, если бар находится внутри внутреннего ILR, резонансная спиральная структура начинается с лидирующей спирали.

4. Полученные нами результаты интересны также в связи с давно обсуждающейся проблемой так называемой антиспиральной теоремы, впервые сформулированной Линден–Беллом и Острайкером [24] для случая газового диска; позже она была доказана также и для звездного диска [25]. Теорема гласит, что спиральная форма не может существовать как нейтральная мода колебаний недиссипативного газового или звездного диска.

Эта теорема является следствием определенной симметрии уравнений движения (газа или звезд) в гравитационном поле $\Phi(r, \varphi)$. Если мы обратим направление времени и одновременно отразим все движения в меридиональной плоскости $\varphi \rightarrow -\varphi$, то придем к состоянию, где на такой же аксиально-симметричный фон (включая направление вращения) наложено возмущение с противоположным направлением закручивания спиралей. Ввиду симметрии уравнений движения относительно такого преобразования, частоты колебаний в исходном и преобразованном состояниях должны совпадать, и

нет оснований отдавать предпочтение одному из них. Соответствующие решения уравнений для нормальных мод должны быть, вообще говоря, неспиральными. Однако, если в системе присутствуют резонансные звезды, аргументы, приводящие к антиспиральной теореме, неприменимы. Это не удивительно, поскольку антиспиральная теорема в значительной степени является отражением временной обратимости уравнений движения, которая нарушается резонансными звездами.

Рассматривавшиеся нами структуры в SB-галактиках, включающие бар и спиральные рукава, являются составляющими единой моды, причем при определенных условиях одну из этих составляющих (спирали) можно считать индуцированной другой (баром). Нам представляется, что для SB-галактик именно такой подход наиболее естествен. В частности, в этих галактиках трудно заподозрить существование бегущих спиральных волн. Район коротации может играть роль генератора благодаря имеющимся там антициклоническим (или иногда циклоническим) вихрям (о последних см. в [26]).

Вследствие явного присутствия спиральных рукавов с определенным направлением закручивания (чаще всего отстающих — как на рис. 1а) возникает вопрос о причинах несоответствия антиспиральной теореме. Самой простой причиной могла бы быть неустойчивость рассматриваемой моды: при достаточно большом инкременте неустойчивости γ раскрытие спиральных рукавов может быть значительным даже в холодном диске (в то время как при малых γ спирали очень близки к дугам окружностей, наподобие спиралей на рис. 4в, 5в, 6в). Однако предположение о сильной неустойчивости для галактических систем не очень естественно: такая неустойчивость должна была уже давно насытиться (имеющегося для этого запаса времени больше чем достаточно). Правдоподобнее рассматривать квазистационарные состояния, когда γ мало или даже $\gamma \rightarrow 0$. Но в этом случае, как следует из антиспиральной теоремы, спирали могут появиться только при наличии резонансов. Похоже, что именно так и происходит в действительности: концы баров находятся вблизи одного из главных галактических резонансов (коротационного или линдбладовского). Мы видели, что тепловое движение звезд «размывает» эти резонансы по кольцам шириной порядка нескольких эпициклических радиусов. В этих кольцах и локализируются спиральные рукава, обычно отстающие (рис. 4, 5), но иногда и лидирующие (рис. 6).

5. В принципе, резонансные отклики могут полностью покрыть все разнообразие наблюдаемых в

SB-галактиках спиральных и кольцевых форм. Так, из обозрения фотографий SB-галактик в имеющихся атласах (например, в известном хаббловском атласе) видно, что, как правило, отстающие спиральные рукава, отходящие от бара, четко прослеживаются на протяжении примерно половины оборота вокруг центра. Это очень похоже на резонансные отклики, представленные на рис. 4, 5. С другой стороны, короткие ядерные бары могут, как видно из рис. 6, приводить к формированию лидирующих спиралей (при условии, что бар находится в пределах внутреннего ILR).

Заметим, что сам по себе вопрос о возможности генерации спиралей баром не нов. Однако до сих пор для его решения использовались почти исключительно численные (в основном N -body) методы, поскольку представлялось, что задача слишком сложна и не может быть решена аналитически. К сожалению, сравнение полученных нами аналитических результатов с многочисленными исследованиями методами N -body затруднительно ввиду несистематического характера последних.

6. В заключение отметим некоторые пути усовершенствования предложенной выше теории.

Наиболее очевидным ее недостатком является то, что в ней не учитывается самогравитация спирали-отклика, хотя она может иногда оказаться существенной (в случае достаточно массивных галактических дисков). Мы не видим сейчас возможности ввести самогравитацию отклика в рамках аналитической теории. Напрашивающаяся здесь идея использовать для этой цели ВКБ-приближение (в итерационной схеме) оказывается несостоятельной. Дело в том, что, как можно показать, вычисления потенциала достаточно короткого почти кругового отрезка спирали (каковым является резонансный отклик) по формуле ВКБ-теории (т. е. $\Phi_1 = -2\pi G\sigma_1/|k|$) и (численно) по точной формуле потенциала простого слоя различаются в несколько (2–4) раз. По этой причине данное усовершенствование придется, по-видимому, выполнять численными методами.

Строгий учет конечной толщины галактического диска сейчас представляется еще более трудной задачей, если, конечно, не иметь в виду только использование теорий типа N -body. Вероятно, в качестве первого шага можно попробовать различные формфакторы на толщину, которые широко используются в теории устойчивости гравитирующего диска (подробности см. в [1, 2]).

Благодарим рецензента за важные замечания, позволившие улучшить качество статьи. Работа

выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 99-02-18432 и 00-15-96528).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Поляченко, А. М. Фридман, *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем*, Наука, Москва (1976).
2. A. M. Fridman and V. L. Polyachenko, *Physics of Gravitating Systems*, Springer-Verlag, New York (1984), Vol. 1, 2.
3. А. Б. Михайловский, *Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках*, Атомиздат, Москва (1978).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1988).
5. Н. М. Горькавый, А. М. Фридман, *Физика планетных колец*, Наука, Москва (1994).
6. В. Л. Поляченко, Е. В. Поляченко, *ЖЭТФ* **112**, 771 (1997).
7. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **7**, 203 (1937).
8. В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман, *Астрон. Ж.* **59**, 228 (1982).
9. F. Combes and B. G. Elmegreen, *Astron. and Astrophys.* **271**, 391 (1993).
10. V. L. Polyachenko, in *Barred Galaxies*, ed. by R. Buta, D. A. Crocker, and B. G. Elmegreen, ASP Conf. Ser. **91**, 405 (1996).
11. В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман, *Астрон. Ж.* **56**, 957 (1979).
12. В. Л. Поляченко, *ЖЭТФ* **101**, 1409 (1992).
13. А. Б. Михайловский, А. М. Фридман, Я. Г. Эпельбаум, *ЖЭТФ* **59**, 1608 (1970).
14. F. H. Shu, *Astrophys. J.* **160**, 99 (1970).
15. A. Toomre, *Astrophys. J.* **139**, 1217 (1964).
16. C. C. Lin and F. H. Shu, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **55**, 229 (1966).
17. C. C. Lin, C. Yuan, and F. H. Shu, *Astrophys. J.* **155**, 721 (1969).
18. А. Б. Михайловский, *Теория плазменных неустойчивостей*, Атомиздат, Москва (1970), т. 1.
19. Г. С. Бисноватый-Коган, А. Б. Михайловский, *Астрон. Ж.* **50**, 312 (1973).

-
20. I. I. Pasha and V. L. Polyachenko, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **266**, 92 (1994).
21. V. L. Polyachenko, in *Physics of Gaseous and Stellar Disks of the Galaxy*, ed. by I. R. King, *ASP Conf. Ser.* **66**, 103 (1994).
22. A. M. Fridman and O. V. Khoruzhii, *Phys. Lett. A* **276**, 199 (2000).
23. A. M. Fridman, O. V. Khoruzhii, E. V. Polyachenko, V. L. Polyachenko, O. K. Sil'chenko, A. V. Zasov, V. L. Afanas'ev, S. N. Dodonov, A. V. Moiseev, J. Boulesteix, and J. H. Knapen, *ASP Conf. Ser.*, ed. by J. G. Fines and E. M. Consini (2001).
24. D. Lynden-Bell and J. P. Ostriker, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **136**, 293 (1967).
25. F. H. Shu, *Astrophys. J.* **160**, 89 (1970).
26. A. M. Fridman, O. V. Khoruzhii, E. V. Polyachenko et al., *Phys. Lett. A.* **264**, 85 (1999).