

К ТЕОРИИ СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОГО РЭЛЕЕВСКОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА НА БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ

*Е. Д. Трифонов**

*Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена
191186, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 27 ноября 2000 г.

Предлагается теория сверхизлучательного рэлеевского рассеяния света на бозе-эйнштейновском конденсате, основанная на полуклассическом подходе. В качестве базиса выбраны атомные состояния с определенным импульсом. Выводятся уравнения Максвелла–Блоха и находятся их решения, описывающие интенсивность рассеянного излучения и эволюцию заселенности когерентных атомных состояний.

PACS: 03.75.Fi, 42.50.Fx

1. ВВЕДЕНИЕ

Сверхизлучение, предсказанное Дике [1] в 1953 г. (см. также книги [2–4] и содержащуюся в них библиографию), привлекло к себе в последнее время новый интерес в связи с возможностью создания бозе-эйнштейновской конденсации путем лазерного и испарительного охлаждения [5–8]. В первую очередь это относится к недавним экспериментам, описанным в [9]. В этих экспериментах наблюдалось сверхизлучательное рэлеевское рассеяние света на атомах натрия, находящихся в состоянии бозе-эйнштейновской конденсации. При определенных условиях возбуждения рассеянное излучение оказалось узконаправленным вдоль максимальной протяженности конденсата и значительно интенсивнее, чем обычное (некооперативное) рассеяние. Напомним, что сверхизлучательное рассеяние возникает в условиях сохранения атомной системой фазовой памяти [10–12]. Поэтому состояние бозе-эйнштейновской конденсации — когерентное состояние атомной системы — является идеальным объектом для исследования кооперативных эффектов. Отличительной чертой кооперативных эффектов является принципиальная невозможность разделения процесса на отдельные акты (поглощения, излучения, рассеяния и т. п.), происходящие с различ-

ными атомами. Этим сверхизлучение отличается не только от спонтанного излучения, но и от лазерной генерации или вынужденного рассеяния.

Квантовоэлектродинамический подход к проблеме сверхизлучательного рассеяния в бозе-эйнштейновском конденсате описан в работе [13]. В настоящей работе мы предлагаем более простую модель этого явления, основанную на полуклассическом подходе. Мы приводим вывод уравнений Максвелла–Блоха для рассматриваемой системы. Полученные решения качественно согласуются с экспериментальными результатами работы [9].

2. ОБ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Для теоретической оценки временной зависимости интенсивности сверхизлучательного рассеяния и образования когерентных волн атомных состояний нам понадобятся характерные параметры, определяющие условия эксперимента [9]. В связи с этим приведем его краткое описание.

В магнитной ловушке с помощью лазерного охлаждения был приготовлен бозе-эйнштейновский конденсат атомов натрия. Атомы натрия находились в основном состоянии сверхтонкой структуры $F = 1, 3S_{1/2}$. Магнитная ловушка имела вытянутую форму с размерами $D = 20$ мкм в диаметре и $L = 200$ мкм в длину. Число атомов в ловушке

*E-mail: thphys@herzen.spb.ru

составляло $N \sim 10^7$. Образец подвергался облучению лазерным импульсом, частота которого была сдвинута в красную сторону на 1.7 ГГц от частоты перехода $3S_{1/2} (F = 1) \rightarrow 3P_{3/2} (F = 0, 1, 2)$. Длина волны этого перехода $\lambda = 589$ нм. Лазерный пучок пересекал конденсат перпендикулярно его оси. Типичная интенсивность лазерного излучения 1–100 мВт/см², а длительность импульса 10–800 мкс.

Исследовалась не только интенсивность рассеянного излучения, но также и распределение импульсов атомов, которые они получали в результате взаимодействия с лазерными и рассеянными фотонами. С этой целью сразу же после лазерного облучения магнитная ловушка выключалась, и с помощью резонансного пробного луча фотографировалось положение атомов в пространстве спустя 20–50 мс.

Авторы отмечают зависимость эффекта от поляризации лазерного луча. При поляризации, параллельной оси образца, наблюдалось движение атомов, соответствующее импульсам отдачи при обычном (некогерентном) рэлеевском рассеянии с диаграммой направленности $\sin^2 \theta$, где θ — угол между направлением поляризации и направлением наблюдения. Однако если поляризация лазерного луча была перпендикулярна оси образца, то наблюдалось интенсивное рассеяние вдоль образца. Атом, участвующий в процессе рассеяния, получает импульс лазерного фотона, направленный вдоль лазерного луча, а при испускании рассеянного фотона — такой же по величине импульс, но направленный вдоль образца. Результирующий импульс атома оказывается направленным под углом 45° к оси образца. Некоторые атомы успевают принять участие в последующих актах рассеяния и, соответственно, получают дополнительные импульсы. Выключение ловушки позволяет проследить дальнейшее движение атомов в соответствии с приобретенными импульсами (см. рис. 1а). Кроме зависимости рассеяния от поляризации лазерного луча, авторы отмечают существование порога интенсивности, ниже которого наблюдается лишь обычное спонтанное рассеяние, интенсивность которого пропорциональна интенсивности возбуждающего лазерного поля.

В заключение приведем порядки величин некоторых параметров, характеризующие условия данного эксперимента. Концентрация атомов в бозе-эйнштейновском конденсате $N_0 = 10^{14}$ см⁻³. Амплитуда напряженности электрического поля в лазерном луче $E_0 = 1$ –10 В/см. Оценка проводилась по формуле

$$E \left[\frac{\text{В}}{\text{см}} \right] = 27.46 \sqrt{I_0 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} \right]},$$

которая следует из $I_0 = cE_0^2/8\pi$. Дипольный момент перехода $d \approx 10^{-17}$ СГС. Расстройка $\Delta = 2\pi \cdot 1.7$ ГГц $\approx 10^{10}$ с⁻¹. Радиационная ширина перехода

$$\gamma = \frac{4}{3} \frac{d^2 (2\pi)^3}{\hbar \lambda^3} \approx 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Для дальнейшего рассмотрения нам понадобится масштабный временной параметр, называемый временем сверхизлучения

$$\tau_R = \frac{2\pi}{\gamma N_0 \lambda^2 L}.$$

В условиях эксперимента $\tau_R \approx 10^{-11}$ с.

3. НЕКОГЕРЕНТНОЕ РЭЛЕЕВСКОЕ РАССЕЯНИЕ

Некогерентное рэлеевское рассеяние — это аддитивный по интенсивности эффект рассеяния отдельными атомами. В газах оно возникает из-за локальных флуктуаций концентрации молекул. В случае бозе-эйнштейновской конденсации некогерентное рассеяние обусловлено квантовыми флуктуациями плотности распределения частиц. При этом также пренебрегается влиянием поля рассеяния одних атомов на другие. Напомним, что когерентная часть рэлеевского рассеяния представляет собой излучение вперед. Атом, участвующий в когерентном рассеянии, не изменяет своего импульса и остается в состоянии бозе-эйнштейновской конденсации.

Очевидно, что некогерентное рассеяние системой атомов сводится к задаче о рассеянии одним атомом. Падающее поле наводит в атоме дипольный момент. Интенсивность излучения (энергия излучения в единицу времени) осциллирующего диполя с амплитудой P_0 и частотой ω равна

$$W = \frac{P_0^2 \omega^4}{3c^3}, \tag{1}$$

где c — скорость света в вакууме. Оценим величину дипольного момента P_0 . Считая атом двухуровневой системой (как при квазирезонансном рассеянии), запишем уравнение для матрицы плотности атома ρ :

$$i\hbar \dot{\rho} = [\hat{H}, \rho]. \tag{2}$$

После выделения быстроосциллирующих множителей для амплитуд матрицы плотности R_{ik} в приближении вращающейся волны получаем

$$i\hbar \dot{R}_{aa} = i\hbar \gamma R_{bb} + H_{ab} R_{ba} - R_{ab} H_{ba},$$

$$i\hbar\dot{R}_{bb} = -i\hbar\gamma R_{bb} + H_{ba}R_{ab} - R_{ba}H_{ab}, \quad (3)$$

$$i\hbar\dot{R}_{ab} = \hbar\left(-i\hbar\frac{\gamma}{2} + \Delta\right)R_{ab} + H_{ab}R_{bb} - R_{aa}H_{bb}.$$

Здесь $H_{ab} = -dE_0$ — недиагональный матричный элемент оператора взаимодействия с падающим полем, индексами a и b обозначены соответственно основное и возбужденное состояния атома. В стационарном режиме ($\dot{R}_{ik} = 0$) из последнего уравнения получаем

$$\hbar\left(\Delta - i\frac{\gamma}{2}\right)R_{ab} - dE_0(R_{bb} - R_{aa}) = 0. \quad (4)$$

Пренебрегая изменением населенности ($R_{aa} = 1$, $R_{bb} = 0$) и предполагая, что $\Delta \gg \gamma$, получаем

$$R_{ab} = \frac{dE_0}{\Delta\hbar} \quad (5)$$

и, следовательно,

$$P_0 = d|R_{ab}| = \frac{d^2E_0}{\Delta\hbar}. \quad (6)$$

Отсюда средняя интенсивность рассеянного света одним атомом

$$W_s = \frac{1}{3} \left(\frac{d^2E_0}{\Delta\hbar}\right)^2 \frac{\omega^4}{c^3}. \quad (7)$$

Величину $\tilde{W}_s = W_s/\hbar\omega$ называют скоростью рэлеевского рассеяния. Поскольку плотность потока падающего излучения

$$I_0 = \frac{cE_0^2}{8\pi},$$

то

$$\tilde{W}_s = \frac{8\pi}{3} \frac{d^4\omega^3}{\hbar^3c^4\Delta^2} I_0. \quad (8)$$

Авторы эксперимента [9] сообщают, что интенсивности лазерного излучения 1–100 мВт/см² соответствует скорость рэлеевского рассеяния $4.5 \cdot 10^{-4} - 4.5 \cdot 10^3$ с⁻¹, что находится в согласии с соотношением (8) при значениях параметров, приведенных в конце разд. 2.

В заключение этого раздела получим выражение для числа рассеянных фотонов за время τ_R :

$$\tilde{W}_s \cdot \tau_R = \frac{P_0^2\omega^3}{3\hbar c^3} \frac{2\pi}{\gamma N_0\lambda^2 L} = \frac{2\pi|R_{ab}|^2}{N_0\lambda^2 L}. \quad (9)$$

В соответствии с оценками, приведенными в конце разд. 2, фактор

$$\frac{2\pi}{N_0\lambda^2 L} \sim 10^{-3}.$$

4. КООПЕРАТИВНОЕ (СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОЕ) РАССЕЙНИЕ СВЕТА

Рассматривать рассеяние света как аддитивный по атомам процесс в общем случае нельзя, в частности, при учете влияния поля, рассеянного одним атомом, на другие. В условиях бозе-эйнштейновского конденсата это влияние осуществляется при сохранении фазовой памяти (когерентности) атомных состояний и поэтому носит сверхизлучательный характер. Поэтому для описания наблюдаемого эффекта целесообразна более общая постановка задачи — рассмотрение рассеяния света всей многоатомной системой как целым. Мы предполагаем, что первоначально все атомы находятся в одном и том же электронном состоянии с почти нулевым значением импульса поступательного движения. Нулевыми колебаниями атомов в магнитной гармонической ловушке мы будем пренебрегать. Падающее лазерное излучение квазирезонансно с одним из электронных переходов в атоме. Поэтому каждый атом будем рассматривать как двухуровневую электронную систему. Атом будем характеризовать не только его электронным состоянием, но и состоянием поступательного движения. При взаимодействии атома с излучением выполняется закон сохранения импульса. Формально это обеспечивается правилами отбора. Матричный элемент взаимодействия атома (в состоянии с определенным импульсом) с электромагнитной волной с волновым вектором \mathbf{k} отличен от нуля для конечного состояния атома, импульс которого отличается от исходного на величину $\pm\hbar\mathbf{k}$. Электронные состояния атома (основное и возбужденное) будем отмечать индексами a и b : ϕ_a и ϕ_b . Поступательное движение будем описывать собственными функциями импульса. Таким образом волновые функции атома мы выбираем в виде:

$$|a; \mathbf{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \phi_a,$$

$$|b; \mathbf{k}'\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) \phi_b,$$

где V — объем системы. В частности, волновая функция исходного состояния записывается в виде $|a; 0\rangle$. Волновая функция возбужденного состояния, которое возникает после поглощения одного лазерного фотона, — $|b; \mathbf{k}_0\rangle$. Если из этого состояния происходит переход в основное с испусканием импульса \mathbf{k} , то новым состоянием будет $|a; \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}\rangle$.

В соответствии с условиями эксперимента (см. разд. 2) мы будем считать, что возбуждающий ла-

зерный луч направлен перпендикулярно оси конденсата, а рассеяние фотонов — вдоль этой оси. Таким образом, для задания импульса атома достаточно две его компоненты. Примем направление лазерного луча за ось x , а направление вытянутости конденсата — за ось y . Тогда система состояний атома, необходимая для описания рассеяния, будет иметь вид $|a; 0, 0\rangle$, $|a; k_0, \pm k_0\rangle$, $|a; 2k_0, 0\rangle$, $|b; k_0, 0\rangle$, $|a; 2k_0, \pm k_0\rangle$, $|a; 2k_0, \pm 2k_0\rangle$ и т. д. Ограничиваясь актами не более чем двукратного рассеяния, пронумеруем эти состояния одним индексом следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= |a; 0, 0\rangle, \\ \psi_2 &= |a; k_0, -k_0\rangle, \\ \psi_3 &= |b; k_0, 0\rangle, \\ \psi_4 &= |a; k_0, k_0\rangle, \\ \psi_5 &= |b; 2k_0, -k_0\rangle, \\ \psi_6 &= |b; 2k_0, k_0\rangle, \\ \psi_7 &= |a; -2k_0, -2k_0\rangle, \\ \psi_8 &= |a; 2k_0, 0\rangle, \\ \psi_9 &= |a; 2k_0, 2k_0\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Переходы между этими состояниями поясняются диаграммой (рис. 1б).

Мы будем рассматривать взаимодействие этих состояний с двумя полями: внешним лазерным полем и с полем, рассеянным вдоль конденсата. При этом последнее представляется в виде двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Обозначим эти поля соответственно через E_L , E_+ , E_- . Очевидно, что взаимодействие с полем E_L связывает состояния $1 \leftrightarrow 3$, $2 \leftrightarrow 5$, $4 \leftrightarrow 6$. Взаимодействие с полем E_- связывает состояния $3 \leftrightarrow 2$, $5 \leftrightarrow 7$, $6 \leftrightarrow 8$, а взаимодействие с полем E_+ связывает состояния $3 \leftrightarrow 4$, $5 \leftrightarrow 8$, $6 \leftrightarrow 9$.

Поля E_- и E_+ обусловлены поляризацией среды. В одномерном случае поле может быть выражено через поляризацию следующим образом (см., например, [4]):

$$\begin{aligned} E(y, t) &= \frac{2\pi i \omega_0}{c} \int_0^L P\left(y', t - \frac{|y - y'|}{c}\right) \times \\ &\times \exp(ik_0|y - y'|) \exp(-i\omega_0 t) dy' + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (11)$$

где ω_0 — частота излучения лазера, $P(y', t)$ — комплексная амплитуда поляризации среды, $k_0 = \omega_0/c$. Эта амплитуда поляризации в свою очередь выражается через недиагональные элементы матрицы плотности как среднее квантовомеханическое.

Пусть $\rho_{b,k;a,k'}$ — произвольный недиагональный элемент матрицы плотности атома. (В индексах матрицы плотности мы указываем лишь y -компоненту волнового вектора.) Тогда парциальная комплексная амплитуда поляризации P' , обусловленная этим элементом, находится из равенства

$$P'(y', t) = \exp(i\omega_0 t) N P_{a,k';b,k}(y', t) \rho_{b,k;a,k'}. \quad (12)$$

Здесь N — полное число атомов в системе, $P_{a,k';b,k}(y', t)$ — матричный элемент оператора поляризации (отнесенной к одному атому) $\hat{d}\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} P_{a,k';b,k}(y', t) &= \exp(-i\omega_{ba} t) \frac{d}{V} \times \\ &\times \int \exp(-ik'y') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \exp(iky') d\mathbf{r} = \\ &= \frac{d}{V} \exp(-i\omega_{ba} t) \exp(i(k - k')y'), \end{aligned} \quad (13)$$

где ω_{ba} — частота перехода, \hat{d} — оператор дипольного момента атома. Далее введем амплитуды элементов матрицы плотности

$$R_{b,k;a,k'} = \exp(i(\omega_0 - \omega_{ba})t) \rho_{b,k;a,k'}, \quad (14)$$

тогда

$$P'(y', t) = dN_0 \exp(i(k - k')y') R_{b,k;a,k'}. \quad (15)$$

Поле, обусловленное этой поляризацией, имеет вид

$$\begin{aligned} E'(y, t) &= \frac{2\pi i \omega_0}{c} \exp(-i\omega_0 t) \times \\ &\times \int_0^L P'(y', t) \exp(ik_0|y - y'|) dy' + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (16)$$

Пренебрегая запаздыванием в амплитуде поляризации и быстроосциллирующими членами при интегрировании по y' , получим

$$\begin{aligned} E'(y, t) &= i \frac{2\pi \omega d N_0 y}{c} R_{b,k;a,k'} \times \\ &\times \exp(-i\omega_0 t) \exp(ik_0 y) + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (17)$$

Как видно, амплитуда поля, создаваемого однородной поляризацией, оказывается линейной по координате y . Далее мы примем приближение среднего поля, положив $y = L/2$. Кроме того, выберем в качестве единицы напряженности электрического поля величину $\hbar/\tau_R d$. Тогда

$$\begin{aligned} E'(y, t) &= i R_{b,k';a,k} \exp(ik_0 y) \exp(-i\omega_0 t) + \text{с.с.}, \\ k' - k &= k_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Рис. 1. *a* — Схема формирования когерентных атомных состояний с отличными от нуля импульсами в результате сверхизлучательного рассеяния света. Подлинная фотография этих когерентных атомных «облаков» приведена в [9]. *b* — Схема переходов между когерентными атомными состояниями в процессе сверхизлучательного рэлеевского рассеяния

Оператор взаимодействия атома с этим полем имеет вид

$$\hat{H}' = -\hat{d}E'. \tag{19}$$

Пренебрегая быстроосциллирующими членами в матричных элементах этого оператора, получим

$$H'_{b,k';a,k} = -iR_{b,k';a,k}, \quad H'_{a,k;b,k'} = iR_{a,k;b,k'}. \tag{20}$$

Мы рассмотрели парциальное поле E' , обусловленное амплитудой поляризации $R_{b,k';a,k}$. Полные поля E_{\pm} представляются в виде

$$\begin{aligned} E_+ &= iE_+^0 \exp(ik_0y) \exp(-i\omega_0t) + \text{с.с.}, \\ E_- &= iE_-^0 \exp(-ik_0y) \exp(-i\omega_0t) + \text{с.с.}, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} E_+^0 &= \sum_{k'-k=k_0} R_{b,k';a,k}, \\ E_-^0 &= \sum_{k'-k=-k_0} R_{b,k';a,k}. \end{aligned} \tag{22}$$

Поэтому матричные элементы оператора взаимодействия в принятом выше приближении имеют вид

$$\begin{aligned} H_{b,k';a,k} &= -i \sum_{\bar{k}'-\bar{k}=k_0} R_{b,\bar{k}';a,\bar{k}}, \\ H_{a,k;b,k'} &= i \sum_{\bar{k}'-\bar{k}=-k_0} R_{a,\bar{k};b,\bar{k}'}. \end{aligned} \tag{23}$$

Напомним, что квадраты модулей амплитуд этих полей имеют смысл числа фотонов (на один атом), излучаемых через торцы образца за время τ_R (см., например, [4]).

Мы не будем записывать уравнение для матрицы плотности в общем виде, лишь обсудим алгоритм его записи. Выше мы установили вид матрицы оператора взаимодействия с лазерным полем и полями, создаваемыми волнами поляризации, распространяющимися вдоль образца. Поскольку мы ввели новые амплитуды для матрицы плотности (см. (14)), в уравнениях для недиагональных элементов (по элек-

тронным состояниям) должны присутствовать члены с расстройкой

$$\dot{R}_{b,k';a,k} = i(\omega_0 - \omega_{ba})R_{b,k';a,k} + \dots \quad (24)$$

Кроме процессов взаимодействия с полями E_L , E_{\pm} , имеет место некогерентное рассеяние в произвольном направлении, о котором мы говорили в разд. 3. Некогерентное рассеяние является не только альтернативным процессом, но и инициирующим фактором для сверхизлучательного рассеяния. Сверхизлучательное рассеяние возникает как следствие квантовой флуктуации поля, распространяющегося вдоль образца. В нашей модели такая флуктуация создается в результате некогерентного (спонтанного) рассеяния. Оценим интенсивность (число фотонов за время τ_R) спонтанного рассеяния (одним атомом) в телесном угле образца. Согласно (9), получаем

$$I_{incoh} = \frac{2\pi|R_{a,b}|^2}{N_0\lambda^2 L} \frac{D^2}{L^2}. \quad (25)$$

Отсюда следует, что амплитуда соответствующего флуктуационного поля равна

$$E_{fl} = |R_{a,b}|s, \quad (26)$$

где

$$s = \left(\frac{2\pi}{N_0\lambda^2 L} \right)^{1/2} \frac{D}{L}. \quad (27)$$

В уравнении для матрицы плотности мы добавим это флуктуационное поле к полям E_{\pm} .

Оператор взаимодействия с лазерным полем имеет вид $-\hat{d}E_L$. Для исключения мнимой единицы в уравнении для матрицы плотности поле лазерной волны целесообразно выбрать в виде $E_L = iE$.

Для учета спонтанного рассеяния введем релаксационные члены в уравнения для недиагональных элементов матрицы плотности, соответствующих радиационным переходам, и в уравнения для соответствующих диагональных элементов.

В соответствии с описанным выше алгоритмом приведем уравнения для матрицы плотности с учетом только однократного рассеяния. Для этого потребуется рассматривать состояния $\psi_1 = |a; 0, 0\rangle$, $\psi_2 = |a; k_0, -k_0\rangle$, $\psi_3 = |b; k_0, 0\rangle$, $\psi_4 = |a; k_0, k_0\rangle$.

Если в качестве единицы времени выбрать время сверхизлучения, то уравнение для матрицы плотности в этом случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{R}_{11} &= -E(R_{13} + \bar{R}_{13}), \\ \dot{R}_{22} &= E_+^0 R_{23} + \bar{E}_+^0 \bar{R}_{23}, \\ \dot{R}_{33} &= E(R_{13} + \bar{R}_{13}) - E_+^0 R_{23} - E_-^0 \bar{R}_{34} - \\ &\quad - \bar{E}_-^0 R_{34} - \gamma R_{33}, \\ \dot{R}_{44} &= \bar{E}_-^0 R_{34} + E_-^0 \bar{R}_{34}, \\ \dot{R}_{12} &= -E\bar{R}_{23} + E_+^0 R_{13}, \\ \dot{R}_{13} &= E(R_{11} - R_{33}) - \bar{E}_+^0 R_{12} - \bar{E}_-^0 R_{14} + \\ &\quad + \left(i\Delta - \frac{\gamma}{2} \right) R_{13}, \\ \dot{R}_{14} &= -ER_{34} + E_-^0 R_{13}, \\ \dot{R}_{23} &= E\bar{R}_{12} + \bar{E}_+^0 (R_{33} - R_{22}) - \bar{E}_-^0 R_{24} + \\ &\quad + \left(i\Delta - \frac{\gamma}{2} \right) R_{23}, \\ \dot{R}_{24} &= \bar{E}_+^0 R_{34} + E_-^0 R_{23}, \\ \dot{R}_{34} &= ER_{14} + E_-^0 (R_{33} - R_{44}) - E_+^0 R_{24} + \\ &\quad + \left(-i\Delta - \frac{\gamma}{2} \right) R_{34}, \end{aligned} \quad (28)$$

где E_+^0 и E_-^0 — амплитуды полей (22):

$$E_+^0 = \bar{R}_{23} + R_{13}s, \quad E_-^0 = R_{34} + R_{13}s, \quad (29)$$

\bar{E} , \bar{R} — комплексно-сопряженные величины.

Аналогичное уравнение для матрицы плотности с учетом повторных актов рассеяния выглядит достаточно громоздко. Заметим, что если не стремиться к точному учету релаксационных процессов, то вместо уравнения фон-Неймана можно записать соответствующее уравнение Шредингера, которое выглядит более компактно

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= -EC_3, \\ \dot{C}_2 &= \bar{E}_+^0 C_3 - EC_5, \\ \dot{C}_3 &= \left(i\Delta - \frac{\gamma}{2} \right) C_3 - \bar{E}_+^0 C_2 - E_-^0 C_4 + EC_1, \\ \dot{C}_4 &= \bar{E}_-^0 C_3 - EC_6, \\ \dot{C}_5 &= \left(i\Delta - \frac{\gamma}{2} \right) C_5 - E_+^0 C_7 - E_-^0 C_8 + EC_2, \\ \dot{C}_6 &= \left(i\Delta - \frac{\gamma}{2} \right) C_6 - E_+^0 C_8 - E_-^0 C_9 + EC_4, \\ \dot{C}_7 &= \bar{E}_+^0 C_5, \\ \dot{C}_8 &= \bar{E}_+^0 C_6 + \bar{E}_-^0 C_5, \\ \dot{C}_9 &= \bar{E}_-^0 C_6. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь C_i — коэффициенты разложения волновой функции по выбранному ранее базису (10), а

$$\begin{aligned} E_+^0 &= \bar{C}_2 C_3 + C_5 \bar{C}_7 + C_6 \bar{C}_8 + C_1 \bar{C}_3 s, \\ E_-^0 &= \bar{C}_4 C_3 + C_5 \bar{C}_8 + C_6 \bar{C}_9 + \bar{C}_1 C_3 s \end{aligned} \quad (31)$$

в соответствии с (22). При описанной выше постановке задачи единственное ненулевое начальное условие имеет вид: $R_{11}(0) = 1$ или $C_1(0) = 1$.

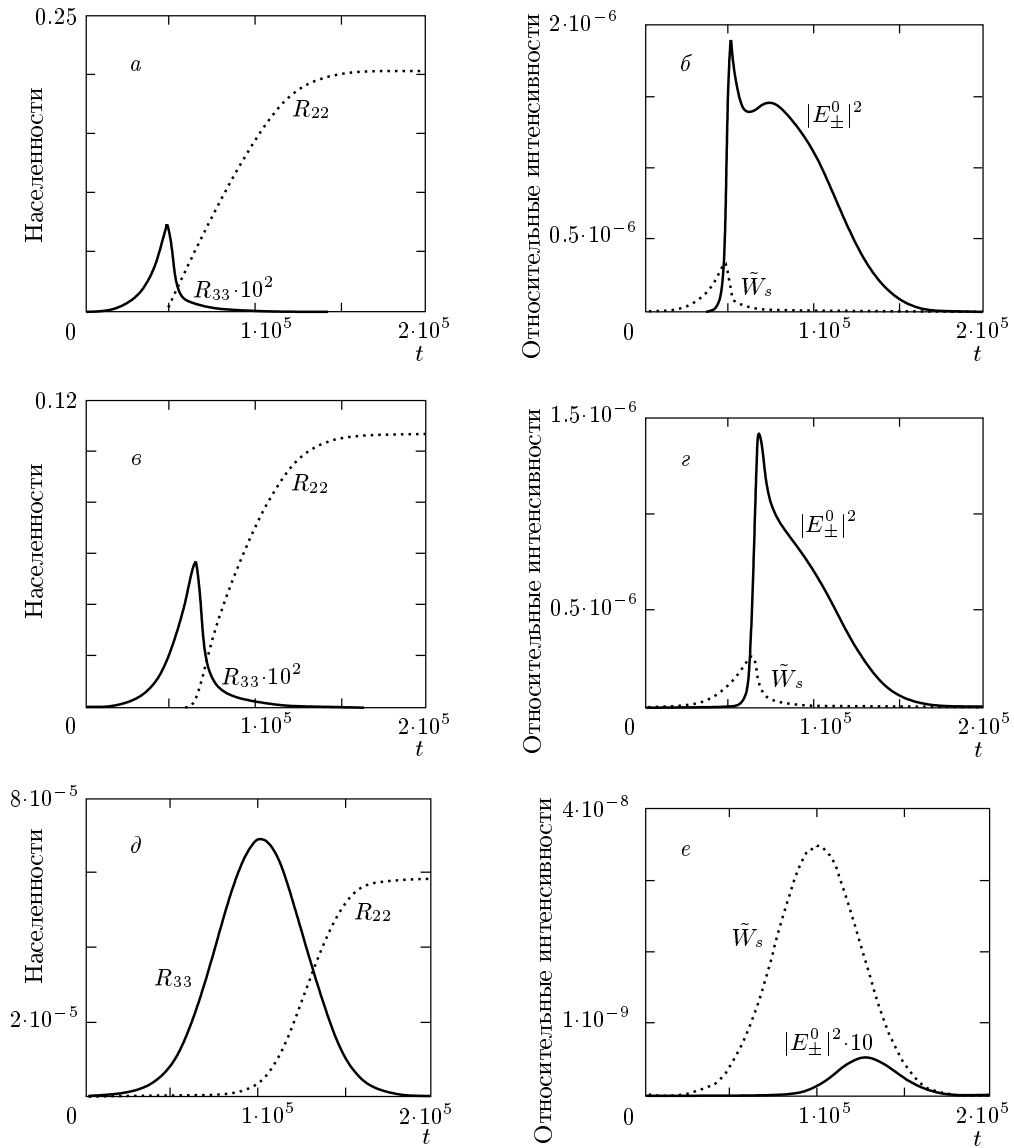


Рис. 2. Импульсы рассеянного вдоль конденсата света (*б, г, е*) и временная зависимость населенности атомных состояний (*а, в, д*) при различных интенсивностях лазерного луча для модели, учитывающей только однократные процессы рассеяния. $E = 10^{-3}$ (*а, б*), $E = 5 \cdot 10^{-3}$ (*в, г*), $E = 10^{-4}$ (*д, е*). Значения полей E указаны в единицах $\hbar/d\tau_R$. Пунктирной кривой на рис. *б, г, е* показана скорость некогерентного рэлеевского рассеяния. Время измеряется в единицах τ_R

В качестве единицы времени мы выбрали время сверхизлучения τ_R , которое в условиях эксперимента [9] имеет порядок величины 10^{-11} с. В то же время длительность возбуждающего импульса имеет порядок 1 мс. Масштаб времени можно было бы выбрать соизмеримым с длительностью импульса. Как преобразуются уравнения при изменении масштаба времени? Очевидно, что если перейти к новому времени $t' = \alpha t$ и к новым параметрам $E' = \alpha^{-1}E$,

$\Delta' = \alpha^{-1}\Delta$, $\gamma' = \alpha^{-1}\gamma$, то при преобразовании переменных $R'_{i,k} = \alpha^{-1}R_{i,k}$ и $C'_i = \alpha^{-1/2}C_i$ уравнения (28) и (30) сохраняют свой вид. Однако из этого нельзя сделать вывод об инвариантности решения относительно такого преобразования, поскольку изменяется и начальное условие: $R'_{i,k}(0) = \alpha^{-1}$ и $C'_i(0) = \alpha^{-1/2}C_i$.

5. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

Выполненные нами решения уравнений (28) и (30) иллюстрируют пока лишь качественное согласие с экспериментом [9]. Более детальные и точные расчеты требуют отдельного рассмотрения.

В конце разд. 2 мы привели порядки величин параметров, которые характеризуют рассматриваемый эффект для эксперимента [9]. Напомним, что в качестве единицы времени мы выбрали время сверхизлучения τ_R , которое в условиях эксперимента имеет порядок 10^{-11} с. Поэтому радиационная постоянная перехода в единицах (τ_R^{-1}) будет иметь порядок 10^{-3} , расстройка $\Delta = 10^{-2}$, напряженность электрического поля в лазерном пучке (в единицах $\hbar/\tau_R d$) $E = 10^{-4}-10^{-3}$, длительность импульса $T_p = 10^7$. Чтобы гарантировать точность расчета, мы были вынуждены уменьшить величину расстройки и уменьшить длительность импульса по сравнению с экспериментальными значениями. Будем полагать $\Delta = 2 \cdot 10^{-3}$ и $T_p = 2 \cdot 10^5$. Эти ограничения не являются принципиальными, и могут быть преодолены при использовании более мощного компьютера или при применении более рационального метода интегрирования полученных уравнений. Предполагалось, что лазерный импульс имеет гауссову форму.

На рис. 2 приведены результаты решения системы (28), иллюстрирующие форму и интенсивность рассеянного импульса, а также динамику заселения когерентных атомных состояний $|a; k_0, \pm k_0\rangle$ для разной интенсивности лазерного поля. Видно, что при амплитуде лазерного поля $E_0 = 10^{-3}$ доля атомов в состояниях $|a; k_0, \pm k_0\rangle$ после прекращения лазерного облучения составляет около 0.2 для каждого из двух направлений рассеяния. С уменьшением E_0 происходит изменение формы импульса рассеяния (увеличивается время задержки), а при достижении значения $E_0 = 10^{-4}$ резко уменьшается интенсивность рассеянного импульса и заселение когерентной атомной волны (на четыре порядка величины). Можно сказать, что здесь проявляется порог сверхизлучательного рассеяния. В этом случае остается обычное некогерентное рассеяние, интенсивность которого пропорциональна интенсивности лазерного поля (см. рис. 2в).

На рис. 3 представлены результаты решения системы уравнений (30) для населенностей когерентных атомных состояний $|a; k_0, \pm k_0\rangle$, $|a; 2k_0, \pm 2k_0\rangle$ с учетом актов повторного рассеяния. Эти расчеты были проведены для длительности импульса

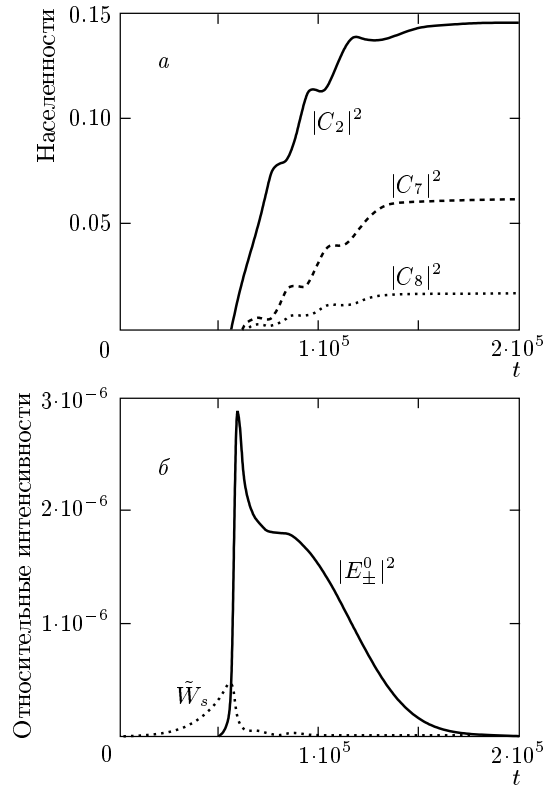


Рис. 3. Импульс рассеянного света (б) и временная зависимость населенности когерентных атомных состояний (а) для модели, учитывающей двукратные акты рассеяния, $E = 10^{-3} \hbar/d\tau_R$. Пунктирной кривой на рис. а показана скорость некогерентного рэлеевского рассеяния. Время измеряется в единицах τ_R

$T_p = 10^5$ при расстройке $\Delta = 10^{-3}$.

Анализ полученных результатов показывает, что эффект зависит от площади возбуждающего лазерного импульса. Но при фиксированной площади эффект (генерация когерентных волн атомных состояний) проявляется сильнее при большей величине поля и соответственно при меньшей длительности лазерного импульса.

Я выражаю благодарность М. Г. Бенедикту, обратившему мое внимание на данную проблему, В. И. Перелю, В. Л. Гуревичу и В. Кеттерле за стимулирующий интерес к работе, А. С. Трошину, И. В. Соколову, А. И. Зайцеву, Д. С. Булянице за обсуждение и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке Минобразования РФ и РФФИ (проект 01-02-17075).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
2. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978).
3. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).
4. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov, and E. D. Trifonov, *Superradiance: Multiatomic Coherent Emission*, IOP Publishing, Bristol, Philadelphia (1996).
5. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).
6. K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
7. C. C. Bradley, C. A. Sackett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **78**, 985 (1997).
8. D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann et al., Phys. Rev. Lett. **81**, 3811 (1998).
9. S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Science **285**, 571 (1999).
10. С. Г. Раутиан, Б. М. Черноброд, КЭ **6**, 2645 (1979).
11. С. Г. Раутиан, Б. М. Черноброд, ЖЭТФ **78**, 1365 (1980).
12. Е. Д. Трифонов, А. С. Трошин, Н. И. Шамров, Опт. и спектр. **48**, 567 (1980).
13. M. G. Moore and P. Meystre, Phys. Rev. Lett. **83**, 5202 (1999).