

# АНОМАЛЬНОЕ ПРОНИКНОВЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО СИГНАЛА В ТОНКУЮ МЕТАЛЛИЧЕСКУЮ ПЛАСТИНУ В УСЛОВИЯХ СИЛЬНОЙ МАГНИТОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

*С. А. Деревянко\*, Г. Б. Ткачев, В. А. Ямпольский*

*Институт радиопрофики и электроники им. А. Я. Усикова Национальной академии наук Украины  
61085, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 10 апреля 2001 г.

Предсказано новое явление аномальной прозрачности металлической пластины при пропускании по ней сильного транспортного тока. Показано, что даже в условиях предельно аномального скин-эффекта, когда глубина проникновения есть наименьший параметр размерности длины, электромагнитное поле падающей волны может переноситься из скин-слоя на противоположную грань образца электронами, захваченными знакопеременным собственным магнитным полем транспортного тока. Механизм переноса высокочастотного поля эффективно работает при низких температурах, когда длина свободного пробега носителей велика. Проанализировано распределение поля волны внутри пластины. Предсказано и качественно проанализировано явление циклотронного резонанса на захваченных электронах, возникающего за счет их периодического возврата в скин-слой.

PACS: 72.15.-v, 72.15.Gd

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в обычных условиях нормальные металлы непрозрачны для электромагнитного излучения: из-за скин-эффекта поле волны локализуется в тонком приповерхностном слое. Однако если параллельно поверхности образца приложить достаточно сильное постоянное магнитное поле, то появляется возможность переноса электромагнитного поля из скин-слоя в глубину металла. В пластинах конечной толщины перенос поля волны с облучаемой ее поверхности на противоположную границу приводит к тому, что образец становится прозрачным. Подобного рода явления, получившие общее название эффектов аномального проникновения, обусловлены индивидуальным движением заряженных квазичастиц в магнитном поле. Проникновение электромагнитного поля в глубь металла происходит благодаря электронам, «выносящим» радиочастотное поле из скин-слоя и затем «воспроизводящим» его в объеме металла. На такого рода эффекты впервые

обратил внимание Азбель [1]. Он рассмотрел перенос поля по цепочке электронных траекторий в условиях циклотронного резонанса. Дальнейшее развитие теории аномального проникновения связано с работами Канера с соавторами. Ими было показано, что траекторный перенос в параллельном по поверхности металла магнитном поле существует в широком диапазоне частот электромагнитного поля и возникает не только в условиях циклотронного резонанса [2]. Были рассмотрены и другие механизмы аномального проникновения, отличные от предсказанного в [1]. Многообразие эффектов аномального проникновения траекторного типа посвящен обзор [3].

Воздействие на динамику носителей заряда в металле может оказывать не только внешнее постоянное магнитное поле, но и магнитная составляющая поля волны или собственное магнитное поле транспортного тока. Магнитное поле волны, которое внутри металла гораздо больше электрического, приводит к нелинейности в уравнениях Максвелла вследствие зависимости проводимости от магнитного поля. Механизм нелинейности такого рода эффекти-

\*E-mail: stanislav@ire.kharkov.ua

вен при низких температурах, когда длина свободного пробега носителей заряда достаточно велика. Он не связан со значительным выведением электронной подсистемы из состояния равновесия, как это имеет место, например, в полупроводниках, и получил название магнитодинамического. Разнообразные проявления магнитодинамической нелинейности рассмотрены в обзорах [4, 5]. Нетривиальным примером магнитодинамической нелинейности является генерация так называемых «токовых состояний», открытых экспериментально в ряде металлов [6]. В работе [7] было теоретически предсказано, а в [8] экспериментально обнаружено значительное отклонение статических вольт-амперных характеристик (ВАХ) тонких металлических пластин от закона Ома в сторону уменьшения сопротивления за счет магнитодинамического механизма нелинейности. В работе [9] проанализировано нелинейное взаимодействие электромагнитной волны, облучающей металлическую пластину, с протекающим по ней транспортным током. Было показано, что в условиях слабой пространственной дисперсии, когда глубина проникновения электромагнитного поля  $\delta$  много больше толщины образца  $d$ , в электродинамическом отклике металла появляется ряд особенностей. Например, временная зависимость электрического поля на поверхности пластины характеризуется наличием серии изломов и пиков.

Многообразие упомянутых выше эффектов показывает, что влияние собственного магнитного поля волны или транспортного тока на динамику носителей заряда может быть весьма существенным. Поэтому представляет интерес вопрос о том, может ли магнитодинамическая нелинейность приводить к проникновению радиоволны на большие расстояния от облучаемой поверхности, как это происходит во внешнем постоянном магнитном поле.

В настоящей работе предсказано новое явление аномального проникновения электромагнитного поля в металлическую пластину при пропускании по ней сильного транспортного тока. Рассматривается случай тонких образцов и предельно аномального скин-эффекта, когда выполняются неравенства

$$\delta \ll d \ll l. \tag{1}$$

Здесь  $\delta$  — глубина проникновения электромагнитного поля,  $d$  — толщина пластины,  $l$  — длина свободного пробега носителей заряда. Одна из граней образца облучается плоской монохроматической волной заданной частоты и амплитуды. В отсутствие транспортного тока поле волны локализовано в основном в скин-слое толщиной  $\delta$ . Как было показано еще

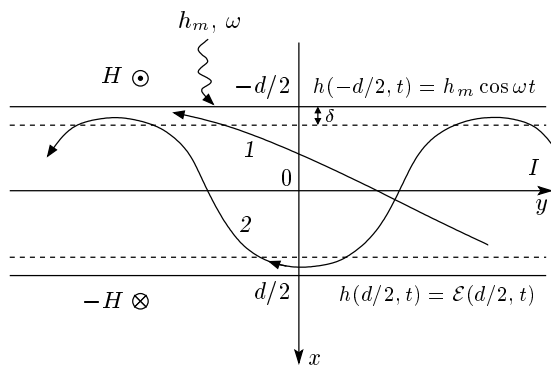


Рис. 1. Геометрия задачи. Схематическое изображение траекторий пролетных (1) и захваченных (2) частиц

Пиппардом [10], главный вклад в радиочастотную проводимость при аномальном скин-эффекте вносит только малая часть электронов — так называемые «эффективные» электроны, движущиеся под малыми углами  $\sim \delta/l \ll 1$  к поверхности образца. В отсутствие магнитного поля эффективные электроны, очевидно, не могут выносить поле волны из скин-слоя, так как проводят в нем все время свободного пробега. Перенос радиочастотного поля в объем образца осуществляют только неэффективные электроны, движущиеся под большими по сравнению с  $d/l$  углами к граням пластины. Однако такие электроны получают значительно меньшую энергию от поля, чем «скользящие» частицы, и создаваемое ими на противоположной границе образца электромагнитное поле оказывается много меньше, чем на облучаемой поверхности.

Как показано в данной работе, ситуация меняется радикально, если через образец протекает сильный транспортный ток  $I$  (геометрия задачи изображена на рис. 1). На электронные траектории существенное влияние начинает оказывать собственное магнитное поле тока, которое распределено антисимметрично по толщине образца. В середине пластины оно равно нулю, а на противоположных гранях принимает равные по величине, но противоположные по знаку значения  $H$  и  $-H$ :

$$H = \frac{2\pi I}{cD}. \tag{2}$$

Здесь  $D$  — ширина пластины (размер в направлении магнитного поля тока),  $c$  — скорость света. Знакопеременное поле транспортного тока приводит к появлению помимо обычных, «пролетных», электронов, новой группы носителей, которые захватываются в

эффективную потенциальную яму. Траектории пролетных и захваченных электронов изображены схематически на рис. 1, где они отмечены соответственно цифрами 1 и 2. Движение захваченных носителей происходит по почти плоским периодическим кривым, «вьющимся» относительно плоскости  $x = 0$  перемены знака поля тока. Из рис. 1 видно, что часть захваченных электронов, а именно те, которые залетают в скин-слой, способны переносить радиочастотное поле к противоположной поверхности образца. Таким образом осуществляется аномальное проникновение поля волны благодаря его переносу захваченными электронами. Физическая картина рассматриваемого явления аналогична переносу радиочастотного поля по цепочке электронных орбит в однородном магнитном поле [3].

В следующем разделе работы рассмотрена постановка задачи и выписаны уравнения Максвелла с граничными условиями для суммарных электрического и магнитного полей тока и волны. В разд. 3 проанализированы операторы проводимости пролетных и захваченных электронов и проведена линеаризация уравнений Максвелла по относительно слабому полю радиоволны. Специфический характер оператора проводимости захваченных электронов, а также требования, налагаемые граничными условиями, приводят к сложному характеру распределения электромагнитного поля в пластине: оказывается, что симметричная и антисимметричная по толщине образца компоненты электрического поля заметно различаются по величине и характеризуются разными глубинами проникновения. В режиме сильной нелинейности электрическое поле волны практически антисимметрично, а это означает, что оно переносится захваченными электронами из скин-слоя на противоположную поверхность металла без затухания. В разд. 4 получены асимптотики оператора проводимости в случае сильной пространственной дисперсии ( $\delta \ll d$ ), а также линейное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее распределение электрического поля в пластине. В пятом разделе дан последовательный качественный анализ задачи в духе концепции неэффективности, позволивший получить верные по порядку величины оценки для глубины проникновения сигнала и для поверхностного импеданса пластины без решения сложного интегро-дифференциального уравнения. В шестом разделе численно исследована картина распределения электрического поля в образце. В разд. 7 указана возможность наблюдения циклотронного резонанса на захваченных электронах и сформулированы необходимые условия для наблю-

дения такого эффекта. В этом разделе также приведены качественные формулы, описывающие резонансные осцилляции поверхностного импеданса.

В Заключении указана область применимости полученных результатов и приведен ряд соображений относительно возможного экспериментального наблюдения предсказанных эффектов.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим тонкую металлическую пластину толщиной  $d$ , по которой протекает постоянный транспортный ток  $I$ . Ось  $x$  выберем по нормали к границе металла так, что плоскость  $x = 0$  совпадает с серединой образца. Граница  $x = -d/2$  облучается плоской электромагнитной волной, магнитный вектор которой коллинеарен вектору магнитного поля тока. Ось  $y$  направим вдоль тока, а ось  $z$  — параллельно магнитным полям тока и волны (см. рис. 1). Магнитное поле в металле представляет собой сумму собственного поля транспортного тока  $H(x)$  и поля волны  $h(x, t)$ :

$$\mathbf{H}(x, t) = \{0, 0, \mathcal{H}(x, t)\} = \{0, 0, H(x) + h(x, t)\}. \quad (3)$$

Электрическое поле в образце  $\mathbf{E}(x, t)$  имеет только  $y$ -компоненту, которая также естественным образом разбивается на сумму однородного потенциального поля  $E_0(t)$ , ответственного за протекание транспортного тока, и неоднородной вихревой компоненты  $\mathcal{E}(x, t)$  поля электромагнитной волны:

$$\mathbf{E}(x, t) = \{0, E(x, t), 0\} = \{0, E_0(t) + \mathcal{E}(x, t), 0\}. \quad (4)$$

Будем считать, что длина  $L$  и ширина  $D$  пластины (т.е. ее размеры соответственно вдоль осей  $y$  и  $z$ ) значительно больше толщины  $d$ . Кроме того, мы рассматриваем случай диффузного отражения электронов от поверхности образца.

Уравнения Максвелла в принятой геометрии имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{H}(x, t)}{\partial x} &= \frac{4\pi}{c} j(x, t), \\ \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}(x, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $j(x, t)$  —  $y$ -компонента плотности тока. Граничное условие к уравнениям (5) на облучаемой границе  $x = -d/2$  есть

$$\mathcal{H}(-d/2, t) = h_m \cos \omega t + H, \quad (6)$$

где  $H = 2\pi I/cD$  — магнитное поле тока на поверхности пластины,  $h_m$  — амплитуда волны. На противоположной грани образца в прошедшей сквозь него

волне магнитная и электрическая компоненты должны совпадать, т. е. должно выполняться равенство

$$h(d/2, t) = \mathcal{E}(d/2, t). \quad (7)$$

Облучающий пластину сигнал считается слабым, т. е. магнитная и электрическая компоненты поля волны  $h$  и  $\mathcal{E}$  много меньше соответственно собственного поля тока  $H(x)$  и потенциального электрического поля  $E_0(t)$ . Поэтому уравнения Максвелла можно линеаризовать по полям  $h(x, t)$  и  $\mathcal{E}(x, t)$ . Кроме того, будем пренебрегать временной дисперсией, т. е. полагать частоту переменного поля  $\omega$  много меньшей частоты релаксации носителей заряда  $\nu$ :

$$\omega \ll \nu. \quad (8)$$

### 3. ДИНАМИКА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА. АСИМПТОТИКИ ОПЕРАТОРОВ ПРОВОДИМОСТИ

Благодаря относительной малости поля радиоволны при изучении динамики электронов мы можем пренебречь его влиянием на электронные траектории и, следовательно, упростить задачу по сравнению с рассмотренной в [7] и [9]. Следуя общей схеме из [9], выберем калибровку векторного потенциала поля транспортного тока в виде

$$A(x) = \int_0^x H(x') dx'. \quad (9)$$

Как уже упоминалось, магнитное поле тока распределено антисимметрично и обращается в нуль в середине пластины:

$$H(0) = 0.$$

Векторный потенциал  $A(x)$  при этом является симметричной функцией координаты  $x$ . Он почти всюду отрицателен и только в точке  $x = 0$  достигает своего максимума, равного нулю. Интегралами движения электрона в антисимметричном поле тока являются полная энергия, равная энергии Ферми, и обобщенные импульсы

$$p_z = mv_z, \quad p_y = mv_y - eA(x)/c$$

( $m$  — масса электрона). Через обобщенные импульсы можно выразить компоненты скорости электрона  $v_x(x)$  и  $v_y(x)$  в плоскости, перпендикулярной маг-

нитному полю. Для случая сферической поверхности Ферми радиуса  $p_F = mv$  имеем

$$v_y(x) = \frac{p_y + eA(x)/c}{m}, \quad (10)$$

$$|v_x(x)| = [v_{\perp}^2 - v_y^2(x)]^{1/2}, \quad v_{\perp} = [v^2 - v_z^2]^{1/2}.$$

Известно [7, 9], что в зависимости от величины и знака интеграла движения  $p_y$  электроны делятся на три основные группы: так называемые захваченные, пролетные и поверхностные носители. Последняя группа является несущественной в рассматриваемом здесь случае диффузного отражения носителей от границ образца (они играют важную роль только в случае зеркального отражения).

Проводимость захваченных электронов в существенной мере зависит от величины транспортного тока. В статическом случае, когда внешнее переменное поле отсутствует, режиму сильной нелинейности соответствуют такие значения токов, при которых вклад захваченных частиц в проводимость значительно больше вклада пролетных электронов. Согласно [7], параметр нелинейности  $r$ , определяющий относительный вклад захваченных электронов, совпадает с отношением длины свободного пробега  $l$  к характерной длине дуги траектории захваченной частицы:

$$r = \frac{l}{(Rd)^{1/2}}, \quad R = \frac{cp_F}{eH}. \quad (11)$$

Здесь  $R$  — характерный радиус кривизны электронной траектории в магнитном поле тока,  $e$  — элементарный заряд. Таким образом, параметр нелинейности  $r$  представляет собой число осцилляций, которые успевают совершить захваченный электрон относительно плоскости  $x = 0$ , перед тем как испытать акт рассеяния. В дальнейшем мы будем рассматривать только случай сильной нелинейности, т. е.

$$r \gg 1. \quad (12)$$

Для нахождения операторов проводимости пролетных и захваченных электронов необходимо выполнить довольно сложную и громоздкую процедуру решения кинетического уравнения Больцмана. Мы не станем приводить здесь соответствующие выкладки, поскольку они достаточно подробно описаны в работе [7]. Отметим лишь, что в [7] плотность тока была получена для случая однородного электрического поля. В рассматриваемой же здесь ситуации сильной пространственной дисперсии выражение для плотности тока отличается тем, что электрическое поле нельзя выносить из под знака действия

оператора проводимости. Соответствующие формулы для плотности тока пролетных  $j_{fl}$  и захваченных  $j_{tr}$  электронов имеют вид

$$j_{fl} = \hat{\sigma}_{fl} \mathcal{E}(x, t) = \frac{3\sigma_0}{2\pi l} \int_0^v \frac{dv_z}{v} \times \\ \times \int_{p_y^*}^{mv_\perp} \frac{dp_y}{p_F} \frac{v_y(x)}{|v_x(x)|} \int_{-d/2}^{d/2} dx' \frac{v_y(x')}{|v_x(x')|} \times \\ \times \exp(-\nu|\tau(x, x')|) \mathcal{E}(x'), \quad (13)$$

$$j_{tr}(x) = \hat{\sigma}_{tr} \mathcal{E}(x, t) = \frac{3\sigma_0}{\pi l} \int_0^v \frac{dv_z}{v} \times \\ \times \int_{-mv_\perp - (e/c)A(x)}^{p_y^*} \frac{dp_y}{p_F} \frac{v_y(x)}{|v_x(x)|} \left\{ \frac{\text{ch } \nu\tau(x_1, x)}{\text{sh } \nu T} \times \right. \\ \times \int_{x_1}^{x_2} dx' \frac{v_y(x')}{|v_x(x')|} \text{ch } \nu\tau(x', x_2) \mathcal{E}(x') + \\ \left. + \int_{x_1}^x dx' \frac{v_y(x')}{|v_x(x')|} \text{sh } \nu\tau(x, x') \mathcal{E}(x') \right\}, \quad (14)$$

где

$$\tau(x, x') = \int_x^{x'} \frac{dx''}{|v_x(x'')|}, \quad (15)$$

$x_1 = -x_2 \equiv -x^*$  — точки поворота электронных траекторий, представляющие собой корни уравнения  $|v_x| = 0$ ,

$$p_y^* = -mv_\perp - (e/c)A(d/2) \quad (16)$$

— верхняя по импульсам  $p_y$  граница области существования захваченных электронов (нижняя граница этой области —  $p_y = -mv_\perp$ ),  $\sigma_0$  — проводимость массивного образца. Величина  $2T \equiv 2\tau(x_1, x_2)$  равна периоду движения захваченного электрона.

Уравнения Максвелла (5) в нулевом приближении дают нелинейную вольт-амперную характеристику пластины, рассмотренную в [7]. Нас же интересуют линейные по полю волны члены разложения, отвечающие за электродинамический отклик. В линейном приближении мы ищем решения в виде

$$\mathcal{E}(x, t) = \mathcal{E}(x) \exp(-i\omega t), \quad h(x, t) = h(x) \exp(-i\omega t).$$

Тогда уравнения Максвелла принимают вид

$$\mathcal{E}'(x) = \frac{i\omega}{c} h(x), \\ -h'(x) = \frac{4\pi}{c} [\hat{\sigma}_{tr} \mathcal{E}(x) + \hat{\sigma}_{fl} \mathcal{E}(x)]. \quad (17)$$

Граничные условия (6) и (7) переписываются в форме

$$h(-d/2) = h_m, \quad h(d/2) = \mathcal{E}(d/2). \quad (18)$$

Режим сильной нелинейности предполагает достаточно большие значения токов. Будем считать, однако, что величина тока не слишком велика, так что наряду с неравенством (12) выполняется условие

$$d \ll R, \quad (19)$$

позволяющее пренебречь искривлением траекторий пролетных электронов. Неравенство (19) дает возможность в выражении (13) для оператора проводимости пролетных электронов брать все величины в отсутствие магнитного поля тока. При этом формулы (10), (15) и (16) переходят в

$$p_y^* = -mv_\perp, \quad v_y = \frac{p_y}{m}, \quad v_x = \sqrt{v_\perp^2 - p_y^2/m^2}. \quad (20)$$

Учитывая это, оператор проводимости (13) можно переписать в виде

$$j_{fl} = \frac{3\sigma_0}{2\pi l} \int_0^v \frac{dv_z}{v} \int_{p_y^*}^{mv_\perp} \frac{dp_y}{p_F} \frac{p_y^2/m^2}{v_\perp^2 - p_y^2/m^2} \times \\ \times \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left(-\frac{\nu|x-x'|}{\sqrt{v_\perp^2 - p_y^2/m^2}}\right) \mathcal{E}(x') dx'. \quad (21)$$

Сделаем в этом интеграле замену  $t = p_y/mv_\perp$ . Тогда имеем

$$j_{fl} = \frac{3\sigma_0}{2\pi l} \int_0^v \frac{dv_z}{v} \frac{2mv_\perp}{p_F} \int_0^1 dt \frac{t^2}{1-t^2} \times \\ \times \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left(-\frac{\nu|x-x'|}{v_\perp \sqrt{1-t^2}}\right) \mathcal{E}(x') dx'. \quad (22)$$

Поменяем местами порядок интегрирования по  $t$  и по  $x$ . Тогда внутренний интеграл есть интеграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^1 dt \frac{t^2}{1-t^2} \exp\left[-\frac{\alpha}{(1-t^2)^{1/2}}\right]. \quad (23)$$

С точностью до экспоненциально малых членов этот интеграл равен функции Макдональда  $K_0(\alpha)$ . Величина  $\alpha$  равна

$$\alpha = \frac{\nu|x - x'|}{v_{\perp}} \lesssim \frac{\nu d}{v_{\perp}}.$$

Практически всюду, кроме близких окрестностей опорных точек поверхности Ферми, где величина  $v_{\perp}$  близка к нулю, имеем

$$\alpha \sim d/l \ll 1.$$

Несложный анализ показывает, что вклад в проводимость пролетных электронов узкой области вблизи опорных точек ферми-сферы, где  $\alpha \gtrsim 1$ , мал по сравнению со вкладом остальной части поверхности Ферми по параметру  $r^{-3/2}$ . Вообще говоря, во внешнем интеграле в (21) существенна только окрестность экстремального сечения поверхности Ферми, где  $v_{\perp} \approx v$ . Поэтому оператор проводимости пролетных электронов можно записать в виде

$$j_{fl}(x) = \frac{3\sigma_0}{\pi l} \int_0^v \frac{dv_z}{v} \frac{mv_{\perp}}{p_F} \times \int_{-d/2}^{d/2} K_0\left(\frac{|x - x'|}{l}\right) \mathcal{E}(x') dx'. \quad (24)$$

Поскольку аргумент функции Макдональда в (24) есть малая величина, мы можем воспользоваться следующей асимптотикой:

$$K_0(t) = -\left\{ \ln \frac{t}{2} + \gamma \right\}, \quad t \rightarrow 0,$$

где  $\gamma \approx 0.577216$  — постоянная Эйлера. Кроме того, заметим, что двойной интеграл в (24) свелся к повторному. Внешний интеграл по  $v_z$  вычисляется, он равен  $\pi/4$ . Поэтому окончательно имеем

$$j_{fl}(x) = -\frac{3\sigma_0}{4l} \int_{-d/2}^{d/2} \left[ \ln \frac{|x - x'|}{2l} + \gamma \right] \mathcal{E}(x') dx'. \quad (25)$$

Теперь запишем асимптотику оператора проводимости захваченных электронов. В главном приближении по  $r^{-1} \sim \nu\tau \ll 1$  формула (14) дает

$$j_{tr}(x) = \frac{3\sigma_0}{\pi l} \int_0^v \frac{dv_z}{v} \times$$

$$\times \int_{-mv_{\perp} - (e/c)A(x)}^{p_y^*} \frac{dp_y}{p_F} \frac{v_y(x)}{|v_x(x)|} \frac{1}{\nu T} \times \int_{-x^*}^{x^*} dx' \frac{v_y(x')}{|v_x(x')|} \mathcal{E}(x'). \quad (26)$$

Оператор проводимости захваченных электронов, в отличие от оператора проводимости пролетных электронов, сложным образом зависит от распределения магнитного поля транспортного тока.

Простые оценки, проведенные в разд. 5, показывают, что проводимость захваченных частиц в  $r^{2/3} \gg 1$  раз превышает проводимость пролетных электронов. Тем не менее, как будет показано в следующем разделе, ток пролетных электронов необходимо учитывать при решении уравнений Максвелла — он нужен для удовлетворения граничным условиям (18).

#### 4. ДВУХКОМПОНЕНТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПЛАСТИНЕ

Несмотря на довольно сложный вид операторов проводимости (25) и (26), ряд выводов, касающихся распределения полей в металле, можно сделать, не решая уравнений Максвелла с плотностью тока  $j_{tr} + j_{fl}$ , а проведя их качественный анализ. Для начала заметим, что из формул (9), (10) следует, что векторный потенциал  $A(x)$ , а вместе с ним и скорости  $v_y(x)$  и  $v_x(x)$ , являются четными функциями координаты  $x$ . Это означает, что плотность тока  $j_{tr}(x)$  в главном приближении по параметру  $r^{-1}$  также является четной функцией  $x$ . Поэтому, если пренебречь вкладом пролетных электронов, суммарная плотность тока  $j(x) = j_{tr}(x)$  в уравнениях Максвелла (17) окажется четной функцией. Тогда из второго уравнения (17) следует, что переменное магнитное поле  $h(x)$  должно быть распределено антисимметричным образом. Но это противоречит граничным условиям. В самом деле, согласно (18), на границе  $x = -d/2$  магнитное поле должно равняться заданной величине  $h_m$ , в то время как на противоположной границе оно должно практически обращаться в нуль. Последнее обстоятельство есть следствие того, что электрическое поле в металле всегда много меньше магнитного по параметру  $\omega\delta/c$ , что в свою очередь следует из первого уравнения в (17) (см. оценку (57) из разд. 5). Поэтому, чтобы удовлетворить граничным условиям (18), магнитное поле  $h(x)$  должно

содержать соизмеримые четную и нечетную компоненты.

Это означает, что для корректного решения поставленной граничной задачи необходимо учесть вклад пролетных электронов, что позволяет удовлетворить и уравнениям, и граничным условиям.

Представим электрическое поле волны  $\mathcal{E}(x)$  в виде суммы симметричной  $\mathcal{E}_+(x)$  и антисимметричной  $\mathcal{E}_-(x)$  компонент. Обратим внимание на то обстоятельство, что оператор проводимости захваченных электронов (26) обращает в нуль антисимметричную компоненту поля. Оператор же проводимости пролетных электронов (25) не обращает эту компоненту в нуль, и именно пролетные электроны обеспечивают наличие нечетных слагаемых в радиочастотной плотности тока<sup>1)</sup>. Оказывается, что одновременно удовлетворить граничным условиям (18) и уравнениям (17) можно только в том случае, если антисимметричная компонента электрического поля много больше симметричной:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-, \quad \mathcal{E}_- \gg \mathcal{E}_+. \quad (27)$$

Чтобы убедиться в этом, перепишем уравнения Максвелла (17), выделив во всех величинах четные и нечетные части. Учтем при этом, что ввиду специфического характера оператора проводимости пролетных электронов (25) (его ядро зависит только от модуля разности  $x - x'$ ) антисимметричная компонента плотности тока пролетных частиц определяется только антисимметричной компонентой электрического поля, в то время как симметричная часть плотности тока пролетных электронов определяется только симметричной компонентой электрического поля и много меньше плотности тока захваченных электронов (26) (более подробно см. разд. 5). В результате имеем

$$\begin{aligned} -h'_+(x) &= (4\pi/c)j_-(x) = (4\pi/c)\hat{\sigma}_{fl}\mathcal{E}_-, \\ -h'_-(x) &= (4\pi/c)j_+(x) = (4\pi/c)\hat{\sigma}_{tr}\mathcal{E}_+, \\ \mathcal{E}'_+(x) &= (i\omega/c)h_-(x), \\ \mathcal{E}'_-(x) &= (i\omega/c)h_+(x). \end{aligned} \quad (28)$$

Подставим теперь выражения для  $h_-$  и  $h_+$  из третьего и четвертого уравнений в (28) соответственно в первое и второе уравнения. В результате получим

<sup>1)</sup> Вообще говоря, этим же свойством обладают и следующие члены разложения оператора проводимости захваченных электронов (14) по параметру  $r^{-1}$ . Однако анализ показывает, что эти члены имеют более высокий порядок малости по сравнению с оператором проводимости пролетных электронов (25).

пару уравнений для симметричной и антисимметричной компонент электрического поля:

$$\frac{d^2\mathcal{E}_-}{dx^2} = -\frac{4\pi i\omega}{c^2}\hat{\sigma}_{fl}\mathcal{E}_-, \quad (29)$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}_+}{dx^2} = -\frac{4\pi i\omega}{c^2}\hat{\sigma}_{tr}\mathcal{E}_+. \quad (30)$$

Видно, что глубина проникновения  $\delta_-$  антисимметричной компоненты электрического поля  $\mathcal{E}_-$  определяется относительно малой проводимостью пролетных электронов, в то время как глубина проникновения  $\delta_+$  симметричной компоненты электрического поля  $\mathcal{E}_+$  определяется большой проводимостью захваченных электронов. В силу того что глубина проникновения обратно пропорциональна квадратному корню из проводимости, имеет место неравенство

$$\delta_+ \ll \delta_-. \quad (31)$$

Из граничных условий (18) следует, что правые части третьего и четвертого уравнений в (28) — величины одного порядка. Поэтому из неравенства (31) вытекает, что антисимметричная компонента электрического поля много больше симметричной, т. е. выполняется неравенство (27).

Таким образом, в режиме сильных токов, когда  $r \gg 1$ , электрическое поле содержит практически только антисимметричную компоненту. А это означает, что поле скин-слоя выносится захваченными электронами на противоположную границу пластины без затухания:

$$|\mathcal{E}(-d/2)| = |\mathcal{E}(d/2)|.$$

Любопытно, что при этом, согласно (29), глубина проникновения и величина электрического поля определяются не захваченными, а пролетными электронами. Это связано с тем, что оператор проводимости захваченных электронов (26), действуя на чисто антисимметричное электрическое поле  $\mathcal{E}_-$ , дает плотность тока, равную нулю. Физически это есть следствие того, что траектории захваченных электронов симметричны относительно середины образца. Залетая в скин-слой и приобретая некоторую энергию от электрического поля, захваченная частица у противоположной грани пластины встречает электрическое поле противоположного знака и отдает всю полученную ею ранее энергию.

Для того чтобы получить интегро-дифференциальное уравнение для поля  $\mathcal{E}_-(x)$ , подставим в уравнение (29) оператор проводимости пролетных электронов (25). При этом в ядре оператора (25) оставим

только антисимметричную по  $x'$  часть, так как симметричная часть не дает вклада в плотность тока. В результате находим

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_-}{dx^2} = \frac{3i\pi\omega\sigma_0}{2lc^2} \int_{-d/2}^{d/2} \ln \frac{|x-x'|}{|x+x'|} \mathcal{E}_-(x') dx'. \quad (32)$$

Очевидно, что в силу симметрии можно рассматривать это уравнение на промежутке  $(0, d/2)$ . Обратимся теперь к граничным условиям (18). Они переписываются следующим образом:

$$\begin{cases} h_+(-d/2) + h_-(-d/2) = h_m, \\ h_+(d/2) + h_-(d/2) = \mathcal{E}_+(d/2) + \mathcal{E}_-(d/2). \end{cases}$$

Используя тот факт, что

$$\mathcal{E}_+ \ll \mathcal{E}_- \sim (\omega\delta_-/c)h_+,$$

представим эту систему в виде

$$\begin{cases} h_+(d/2) - h_-(d/2) = h_m, \\ h_+(d/2) + h_-(d/2) = O[(\omega\delta_-/c)h_+]. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$h_+(d/2) = -h_-(d/2) = h_m/2 \quad (33)$$

с точностью до членов порядка  $(\omega\delta_-/c)h_m \ll h_m$ . С помощью последнего из уравнений (28) это условие можно переписать для электрического поля  $\mathcal{E}_-$ :

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_-}{dx} \right|_{x=d/2} = \frac{i\omega}{2c} h_m. \quad (34)$$

Вторым граничным условием к уравнению (32) служит условие обращения антисимметричной компоненты  $\mathcal{E}_-(x)$  в нуль в начале координат  $x = 0$ :

$$\mathcal{E}_-(0) = 0. \quad (35)$$

Введем безразмерную координату  $\xi$  и безразмерное поле  $f(\xi)$ :

$$\xi = 2x/d, \quad \mathcal{E}_-(\xi) = f(\xi) \frac{i\omega d}{4c} h_m. \quad (36)$$

В новых обозначениях наша граничная задача принимает вид

$$\begin{aligned} f''(\xi) &= -\beta \int_0^1 \ln \frac{|\xi - \xi'|}{\xi + \xi'} f(\xi') d\xi', \\ f(0) &= 0, \quad f'(1) = 1. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь параметр  $\beta$  есть

$$\beta = -\frac{3i\pi\omega\sigma_0 d^3}{16c^2 l} \equiv \frac{d^3}{\delta^3} \gg 1. \quad (38)$$

Последним равенством мы определили величину

$$\delta = \left( \frac{16ic^2 l}{3\pi\omega\sigma_0} \right)^{1/3}. \quad (39)$$

Она, очевидно, имеет физический смысл комплексной глубины проникновения  $\delta_-$  и совпадает по порядку величины с результатом, полученным ниже в рамках качественного анализа (см. (55)).

### 5. КАЧЕСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ ЭФФЕКТА АНОМАЛЬНОГО ПРОНИКНОВЕНИЯ

Рассмотренная в разд. 3 и 4 граничная задача является весьма громоздкой и приводит к сложно-му интегро-дифференциальному уравнению (37). Во многих задачах подобного рода оказывается весьма эффективным качественный метод, основанный на концепции неэффективности Пиппарда [10]. Согласно этой концепции, основной вклад в высокочастотную проводимость металла вносят электроны, которые проводят наибольшее время в скин-слое. Для оценки проводимости основных групп носителей тока вводится так называемая эффективная проводимость, вычисляемая для каждой электронной группы по формуле

$$\sigma_{eff} = \frac{N_{eff} e^2 \tau_{eff}}{m}. \quad (40)$$

Здесь  $N_{eff}$  и  $\tau_{eff}$  — соответственно концентрация «эффективных» электронов и время, которое они проводят в скин-слое. Суть концепции неэффективности состоит в том, что интегральные операторы проводимости пролетных и захваченных электронов, (25), (26), просто заменяются операторами умножения на соответствующую эффективную проводимость.

Начнем с оценки проводимости пролетных носителей (т.е. фактически с оценки оператора в правой части уравнения (29)). Так же, как и в разд. 3, в силу неравенства (19) мы пренебрегаем искривлением траекторий пролетных электронов магнитным полем тока. При этом эффективной оказывается группа электронов, подлетающих к поверхности под малыми углами  $\varphi \sim \delta_-/l$  и проводящих в скин-слое все время свободного пробега. Для эффективной проводимости таких носителей получаем качественную формулу:

$$\sigma_{fl} = \sigma_0 \frac{\delta_-}{l}, \quad (41)$$



где  $\sigma_0 = Ne^2/m\nu$  — проводимость массивного образца (здесь мы пренебрегаем временной дисперсией, т. е. комплексной добавкой  $-i\omega$  к  $\nu$ , ввиду (8)). Это выражение справедливо с точностью до логарифмического множителя и совпадает с оценкой проводимости для случая обычного аномального скин-эффекта в полубесконечном образце в отсутствие магнитного поля.

Оценим теперь проводимость захваченных носителей (т. е. оператор в правой части (30)). Будем считать, что магнитное поле тока достаточно велико и магнитодинамическая нелинейность заметна,  $r \gg 1$ . Угол, под которым захваченные электроны влетают в скин-слой, по порядку величины равен  $\psi \sim (\delta_+/R)^{1/2}$ . Длина дуги, которую описывает захваченный электрон в скин-слое, есть  $L \sim (R\delta_+)^{1/2}$ . Поэтому время, проводимое электроном в скин-слое за один период его осциллирующего движения, составляет  $(R\delta_+)^{1/2}/v$ . Теперь необходимо учесть многократные возвращения электронов в скин-слой. Поскольку вероятность очередного возвращения равна  $\exp[-2(Rd)^{1/2}/l]$ , эффективное время пребывания в скин-слое может быть оценено как

$$\tau_{tr} = \frac{(R\delta_+)^{1/2}}{v} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-2n(Rd)^{1/2}/l] \right) = \frac{(R\delta_+)^{1/2}}{v} \operatorname{cth}[(Rd)^{1/2}/l]. \quad (42)$$

Наличие множителя 2 перед знаком суммы в (42) объясняется тем, что время первого пребывания электрона в скин-слое оказывается в среднем вдвое меньше последующих. Поэтому для эффективной проводимости захваченных носителей справедлива формула

$$\sigma_{tr} = \frac{Ne^2}{m} \left( \frac{\delta_+}{R} \right)^{1/2} \frac{(R\delta_+)^{1/2}}{v} \operatorname{cth} \left[ \frac{(Rd)^{1/2}}{l} \right] = \sigma_0 \frac{\delta_+}{l} \operatorname{cth} \left[ \frac{(Rd)^{1/2}}{l} \right]. \quad (43)$$

В режиме сильной нелинейности ( $r = l/(Rd)^{1/2} \gg 1$ ) последнее выражение можно записать как

$$\sigma_{tr} = \sigma_0 \frac{\delta_+}{(Rd)^{1/2}}. \quad (44)$$

Теперь, имея оценки проводимостей пролетных и захваченных электронов, можно на качественном уровне проанализировать уравнения Максвелла (28) вместе с граничными условиями (18) и получить справедливые по порядку оценки для величин полей  $\mathcal{E}_{\pm}$  и глубин проникновения  $\delta_{\pm}$ .

Начнем с того, что проинтегрируем первые два уравнения в (28) по  $x$  от 0 до  $d/2$ , учитывая соотношения (33). Тогда по порядку величины получим

$$(4\pi/c)j_- \delta_- = -h_m/2, \quad (45)$$

$$(4\pi/c)j_+ \delta_+ = h_m/2, \quad (46)$$

где токи  $j_{\pm}$  определяются соотношениями

$$j_+ = \sigma_{tr} \mathcal{E}_+, \quad (47)$$

$$j_- = \sigma_{fl} \mathcal{E}_-. \quad (48)$$

Здесь фигурируют эффективные проводимости  $\sigma_{fl}$  и  $\sigma_{tr}$ , задаваемые выражениями (41) и (44). Третье и четвертое уравнения в (28) запишутся в виде

$$\frac{\mathcal{E}_+}{\delta_+} = \frac{i\omega}{c} h_-, \quad (49)$$

$$\frac{\mathcal{E}_-}{\delta_-} = \frac{i\omega}{c} h_+. \quad (50)$$

Шесть уравнений (45)–(50) и два соотношения (33) составляют систему, содержащую восемь неизвестных:  $\delta_{\pm}, j_{\pm}, h_{\pm}, \mathcal{E}_{\pm}$ . Таким образом, решение этой системы позволяет оценить все интересующие нас величины. Так, из уравнений (49), (50) и соотношений (33) следует, что

$$\frac{\mathcal{E}_+}{\delta_+} = -\frac{\mathcal{E}_-}{\delta_-}. \quad (51)$$

Здесь  $\mathcal{E}_+$  и  $\mathcal{E}_-$  имеют разные знаки. В то же время из уравнений (45), (46) вытекает равенство

$$j_- \delta_- = -j_+ \delta_+.$$

Подставляя сюда  $j_{\pm}$  из уравнений (47), (48) с проводимостями (41) и (44), получаем

$$\sigma_0 \frac{\delta_-^2}{l} \mathcal{E}_- = -\sigma_0 \frac{\delta_+^2}{l} r \mathcal{E}_+.$$

Отсюда с использованием (51) находим

$$\begin{aligned} \delta_- &= \delta_+ r^{1/3}, \\ |\mathcal{E}_-| &= |\mathcal{E}_+| r^{1/3}. \end{aligned} \quad (52)$$

Таким образом, качественный анализ показывает, что симметричная и антисимметричная части электрического поля имеют разный масштаб и изменяются на различных расстояниях, в полном соответствии с результатами разд. 4.

Далее, из уравнений (46), (47) и (49) следует равенство

$$\frac{4\pi}{c} \delta_+^2 \frac{\sigma_0}{l} r \mathcal{E}_+ = -\frac{c}{i\omega} \frac{\mathcal{E}_+}{\delta_+}.$$

Отсюда вытекает, что глубина проникновения  $\delta_+$  равна

$$\delta_+ = \left( \frac{c^2 l}{4\pi i \omega \sigma_0 r} \right)^{1/3} \sim \delta_a r^{-1/3}, \quad (53)$$

где

$$\delta_a = \left( i \frac{c^2 l}{3\pi^2 \sigma_0 \omega} \right)^{1/3} \quad (54)$$

— глубина скин-слоя при обычном аномальном скин-эффекте в отсутствие транспортного тока. Используя теперь формулы (52), получим

$$\delta_- \sim \delta_a, \quad (55)$$

$$\mathcal{E}_+ \sim -\frac{i\omega}{c} \frac{h_m}{2} \delta_a r^{-1/3}, \quad \mathcal{E}_- \sim \frac{i\omega}{c} \frac{h_m}{2} \delta_a. \quad (56)$$

Отношения компонент электрического и магнитного полей (например  $\mathcal{E}_-/h_+$ ) определяются из (28):

$$\left| \frac{\mathcal{E}_-}{h_+} \right| \sim \frac{\omega |\delta_-|}{c} \sim \left( \frac{\omega^2 l}{c \sigma_0} \right)^{1/3}. \quad (57)$$

Это отношение всегда является малым ввиду больших значений проводимости чистых металлов  $\sigma_0$ .

Формулы (56), в принципе, решают поставленную задачу, давая качественную оценку для электрического поля, переносимого захваченными электронами из скин-слоя на противоположную грань образца. Однако для более точного описания пространственного распределения электрического поля в пластине в условиях аномальной прозрачности в следующем разделе мы приводим результаты численного решения задачи.

### 6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Интегро-дифференциальное уравнение (37) после некоторых преобразований может быть сведено к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, в котором уже учтены граничные условия:

$$f(\xi) - \beta \int_0^1 K(\xi, \xi') f(\xi') d\xi' = \xi, \quad (58)$$

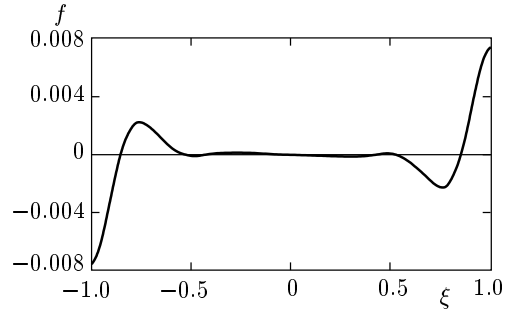


Рис. 2. Распределение безразмерного электрического поля  $f(\xi)$  (см. (36)) в пластине, полученное численным решением уравнения (58) для отношения  $d/|\delta_-| = 10$

где ядро  $K(\xi, \xi')$  есть

$$K(\xi, \xi') = \xi [(1-\xi') \ln(1-\xi') - (1+\xi') \ln(1+\xi')] + \frac{1}{2} (\xi+\xi')^2 \ln(\xi+\xi') - \frac{1}{2} (\xi-\xi')^2 \ln|\xi-\xi'| - \xi\xi'. \quad (59)$$

В силу того что спектральный параметр  $\beta$  по модулю много больше единицы, ряд последовательных приближений расходится. Поэтому уравнение было решено методом дискретизации. На рис. 2 представлено типичное распределение электрического поля  $\mathcal{E}_-$ , полученное в результате численного решения уравнения (58). Видно, что глубина скин-слоя по порядку величины совпадает с величиной  $|\delta_-|$ , определяемой выражением (39), которая в свою очередь совпадает с полученной в разд. 5. На рис. 3 схематически показаны распределения симметричной и антисимметричной компонент электрического и магнитного полей в металле, а также компоненты плотности тока.

Зная распределение электрического поля, можно вычислить величину, характеризующую электромагнитный отклик пластины, а именно, поверхностный импеданс. Он определяется выражением

$$Z = \frac{4\pi}{c} \frac{\mathcal{E}(-d/2)}{h_m}. \quad (60)$$

В главном приближении по параметру  $r^{-1}$ , когда учитывается только антисимметричная компонента электрического поля  $\mathcal{E}_-$ , используя безразмерные характеристики  $\xi$  и  $f(\xi)$  (см. (36)), для импеданса получим следующую формулу:

$$Z = -\frac{4\pi}{c} \frac{\mathcal{E}_-(d/2)}{h_m} = -\frac{4\pi}{c} \frac{i\omega d}{c} f(\xi = 1). \quad (61)$$

При  $I = 0$  имеет место обычный аномальный скин-эффект в отсутствие магнитного поля. При

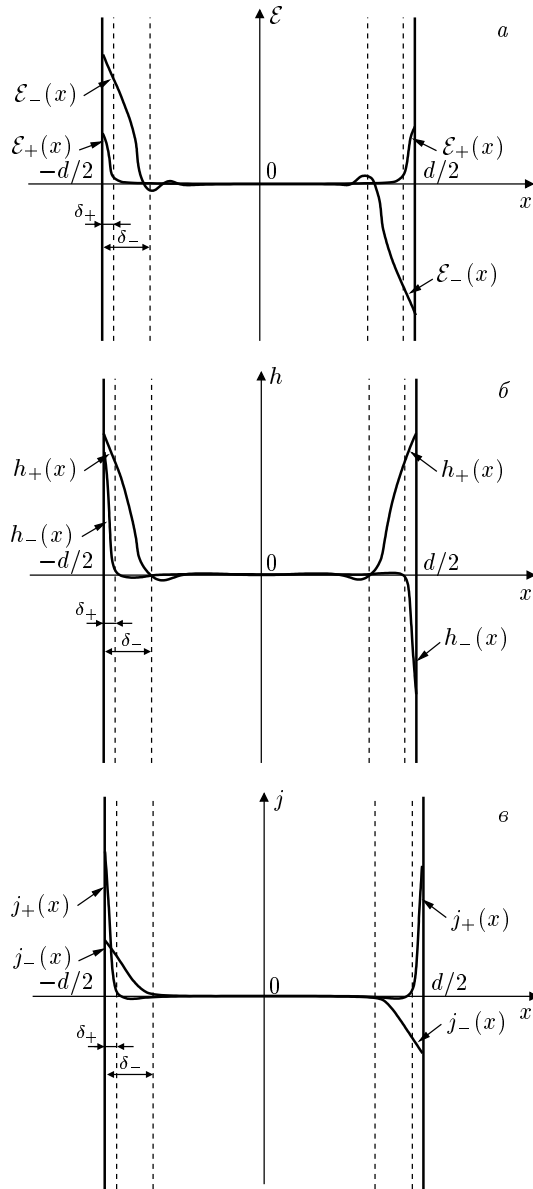


Рис. 3. Схематическое изображение пространственного распределения четных и нечетных компонент электрического поля (а), магнитного поля (б) и плотности тока (в)

этом для комплексной глубины  $\delta_a$  проникновения поля волны справедлива формула (54). Из выражения (39) для глубины скин-слоя следует, что в режиме сильной нелинейности глубина проникновения имеет тот же порядок величины, что и в отсутствие транспортного тока.

Из первого уравнения в (17) видно, что поверхностный импеданс (60) можно записать в форме

$$Z = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \frac{\mathcal{E}(-d/2)}{\mathcal{E}'(-d/2)}. \quad (62)$$

Поэтому величина  $Z$  по порядку величины есть

$$Z \sim -4\pi i \omega \delta / c^2. \quad (63)$$

Таким образом, поверхностный импеданс в режиме сильной нелинейности (при больших токах) имеет тот же порядок величины, что и при  $I = 0$ . Однако в промежуточной области, при  $r \sim 1$ , поверхностный импеданс в функции тока  $I$  может изменяться существенным образом.

### 7. ЦИКЛОТРОННЫЙ РЕЗОНАНС НА ЗАХВАЧЕННЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

В предыдущих разделах нами было рассмотрено аномальное проникновение электромагнитного поля волны в металл за счет группы захваченных электронов. С явлением аномального проникновения волны в металл тесно связано другое замечательное явление — циклотронный резонанс. Циклотронный резонанс в однородном магнитном поле возникает благодаря периодическим возвратам электронов в скин-слой при условии, что частота волны кратна ларморовской частоте электронного движения по циклотронной орбите.

В рассматриваемой нами задаче аналогичный периодический возврат в скин-слой совершают захваченные электроны. Они выются относительно плоскости  $x = 0$  с периодом  $2T$  (15). Поэтому следует ожидать, что если период осцилляций  $2T$  захваченного электрона оказывается кратным периоду волны  $2\pi/\omega$ , должен иметь место резонанс, аналогичный обычному циклотронному резонансу в однородном магнитном поле.

Для простоты будем считать, что образец облучается с двух сторон симметричным по магнитному полю образом. Тогда электрическое поле изначально распределено антисимметрично по толщине образца и локализовано вблизи обеих границ пластины. Резонансное условие в такой постановке задачи состоит в том, что электрон должен ускоряться при попадании в каждый скин-слой. Это означает, что полупериод осцилляций захваченного электрона  $T$  должен равняться нечетному числу полупериодов волны,  $(2n + 1)\pi/\omega$ , так как при антисимметричном распределении электрического поля его фаза должна измениться на  $\pi$  за время движения электрона сквозь пластину.

Для наблюдения циклотронного резонанса на захваченных электронах необходимо выполнение ряда важных условий. Первое из них состоит в том, что полупериод осцилляций захваченного электрона  $T$  должен быть много меньше времени релаксации носителей заряда  $\tau$ . Иными словами, характерная длина дуги траектории электрона  $(Rd)^{1/2}$  должна быть много меньше длины свободного пробега  $l$ . Это требование, очевидно, совпадает с условием сильной нелинейности  $r \gg 1$ . Вторым важным условием наблюдения резонанса является требование сильной временной дисперсии. Это следует из того, что в условиях резонанса период волны  $2\pi/\omega$  должен быть порядка периода осцилляций захваченного электрона. Как было отмечено выше, в режиме сильной нелинейности полупериод осцилляций захваченных носителей много меньше времени релаксации  $\tau$ . Это означает, что в условиях циклотронного резонанса должно выполняться неравенство  $\omega \gg \nu$ , противоположное (8). Учет временной дисперсии приводит к тому, что в выражении для оператора проводимости (14) необходимо заменить частоту релаксации  $\nu$  на  $\nu^* = \nu - i\omega$ . Ввиду того что в комплексной величине  $\nu^*$  мнимая часть является доминирующей, характер асимптотик плотности тока и распределения полей в пластине в условиях циклотронного резонанса существенно отличаются от рассмотренных нами выше.

Здесь мы приведем анализ предсказанного явления только в рамках качественной модели. Для оценки проводимости захваченных электронов используем формулу (40). Эффективное время релаксации описывается той же формулой (42), где следует, однако, заменить  $\nu$  на  $\nu^*$ . Для эффективной проводимости имеем формулу (43), в которой величина  $l$  заменяется на  $l^* = v/(\nu - i\omega)$ .

Комплексная глубина проникновения  $\delta$  удовлетворяет уравнению

$$\delta^2 = \frac{ic^2}{4\pi\sigma_{tr}\omega}. \quad (64)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \delta^3 &= \frac{ic^2}{4\pi\sigma_0\omega} l^* \operatorname{th} \left[ \frac{(Rd)^{1/2}}{l^*} \right] = \\ &= \delta_n^2 l^* \operatorname{th} \left[ \frac{(Rd)^{1/2}}{l^*} \right] = \delta_a^3 \frac{l^*}{l} \operatorname{th} \left[ \frac{(Rd)^{1/2}}{l^*} \right], \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$\delta_n = \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma_0\omega} \right)^{1/2} \exp \left( \frac{i\pi}{4} \right), \quad \delta_a = (\delta_n^2 l)^{1/3}$$

— глубины проникновения для случаев нормального и аномального скин-эффектов в полубесконечном образце в отсутствие тока (см. формулу (54)). Для вычисления поверхностного импеданса используем формулу (63), которая после подстановки  $\delta$  из (65) превращается в

$$Z = Z_a \left( \frac{l^*}{l} \right)^{1/3} \operatorname{th}^{1/3} \left[ \frac{(Rd)^{1/2}}{l^*} \right]. \quad (66)$$

Здесь  $Z_a$  — поверхностный импеданс массивного металла в условиях обычного аномального скин-эффекта. Как было указано выше, для наблюдения резонанса необходима сильная временная дисперсия  $\omega \gg \nu$ . Используя это обстоятельство, можно переписать (66) как

$$\begin{aligned} Z &= Z_a \left( \frac{i\nu}{\omega} \right)^{1/3} \times \\ &\times \left[ \frac{\nu T \cos(\omega T/2) - i \sin(\omega T/2)}{\cos(\omega T/2) - i\nu T \sin(\omega T/2)} \right]^{1/3}. \end{aligned} \quad (67)$$

Формула (67) качественно верно описывает циклотронный резонанс в металлах с цилиндрической поверхностью Ферми с осью вдоль магнитного поля. В металлах с выпуклой поверхностью Ферми эллиптического типа резонанс размывается из-за того, что радиус кривизны электронных траекторий и, следовательно, частота  $T^{-1}$  попадания захваченных электронов в скин-слой зависят от проекции импульса  $p_z$ . Основной вклад в проводимость таких металлов определяется относительно небольшим количеством электронов, находящихся вблизи центрального сечения поверхности Ферми, для которых величина  $T$  в функции  $p_z$  имеет экстремум. В результате проводимость в резонансных условиях уменьшается в  $(\nu T)^{-1/2} \sim r^{1/2} \gg 1$  раз по сравнению со случаем цилиндрической поверхности Ферми. Соответственно, в резонансе поверхностный импеданс (67) приобретает дополнительный множитель  $r^{1/6}$ .

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренное в данной работе явление аномального проникновения электромагнитной волны в металлическую пластину с током является примером того, как магнитодинамическая нелинейность может существенно повлиять на прозрачность металлических пластин. Этот эффект во многом аналогичен известному явлению проникновения поля по цепочке электронных траекторий в постоянном однородном магнитном поле. Однако имеются и принципиальные отличия.

Так, аномальное проникновение поля в пластину в однородном магнитном поле приводит к так называемому радиочастотному размерному эффекту (см., например [3]). Если обозначить через  $2R$  диаметр электронной орбиты (для простоты считаем поверхность Ферми цилиндрической), то  $n$ -й всплеск поля произойдет на глубине  $2nR$  от поверхности. При выполнении резонансного условия  $2nR = d$  всплеск поля попадает на противоположную грань пластины и образец становится прозрачным для падающей волны. Конечно, если поверхность Ферми не цилиндрическая, то резонанс размывается и роль  $2R$  теперь играет диаметр орбиты, соответствующий экстремальному сечению поверхности Ферми. Однако и в этом случае резонансный по магнитному полю характер аномальной прозрачности сохраняется. Кроме того, радиочастотный размерный эффект имеет ярко выраженный пороговый характер. Действительно, для осуществления прозрачности в случае замкнутых орбит в однородном магнитном поле необходимо, чтобы на толщине образца помещалась хотя бы одна орбита, а это значит, что магнитное поле должно превышать некоторое пороговое значение. В нашей же ситуации проникновения поля за счет вьющихся электронных орбит образец является прозрачным при любых значениях тока, соответствующих  $r \gtrsim 1$ . Число захваченных электронов, а следовательно, и проводимость плавно зависят от величины тока, и это обстоятельство не зависит от геометрии поверхности Ферми. Таким образом, в случае переноса поля захваченными электронами образец оказывается прозрачным при любых значениях транспортного тока и при любой форме поверхности Ферми.

Чтобы эффект аномального проникновения наблюдался отчетливо, необходимо выполнение условия сильной нелинейности (12). Для образцов толщиной  $d = 10^{-2}$  см, шириной  $D = 0.5$  см, длиной свободного пробега носителей  $l = 10^{-1}$  см, концентрацией электронов  $N = 10^{23}$  см $^{-3}$  и фермиевским импульсом  $p_F = 10^{-19}$  г·см/с режим сильной нелинейности наступает при значениях тока  $I \sim 10$  А. Необходимые большие значения длины свободного пробега достигаются только в чистых металлах при гелиевых температурах.

Отметим, что результаты данной работы получены в предположении диффузного рассеяния носителей заряда на поверхности образца. Однако известно, что рассеяние электронов на поверхности металла во многих случаях очень близко к зеркальному. Это обстоятельство мешает проявлениям ряда эффектов магнитодинамической

нелинейности. Так, экспериментально наблюдаемое понижение сопротивления пластины в режиме сильной нелинейности достигает всего лишь десятка процентов [8], в то время как теория [7] предсказывает значительное отклонение ВАХ металлического образца с диффузными гранями от закона Ома. В случае зеркального отражения электронов важную роль начинает играть группа поверхностных частиц. Эти носители испытывают соударения только с одной из граней пластины и их вклад в проводимость, пренебрежимо малый в случае диффузного отражения, при зеркальном отражении может быть порядка вклада всех остальных электронных групп. В отличие от статической ВАХ, вид которой определяется всеми электронами, предсказанная в данной работе аномальная прозрачность пластины обеспечивается только захваченными носителями, которые не испытывают соударений с поверхностью образца. Поэтому механизм проникновения поля в глубь металла должен быть мало чувствительным к характеру поверхностного рассеяния электронов. Можно надеяться, что и эффект аномального проникновения, и циклотронный резонанс на захваченных электронах, рассмотренные в данной работе, будут четко различимы в эксперименте даже при почти зеркальном отражении электронов от поверхности.

Авторы выражают признательность Л. М. Фишеру за полезные обсуждения работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. Я. Азбель, ЖЭТФ **39**, 400 (1960).
2. Э. А. Канер, ЖЭТФ **44**, 1036 (1963).
3. Э. А. Канер, В. Ф. Гантмахер, УФН **94**, 193 (1968).
4. В. Т. Долгополов, УФН **130**, 241 (1982).
5. Н. М. Макаров, В. А. Ямпольский, ФНТ **17**, 547 (1991).
6. G. I. Babkin and V. T. Dolgoplov, Sol. St. Comm. **18**, 713 (1976).
7. Э. А. Канер, Н. М. Макаров, И. Б. Снапиро, В. А. Ямпольский, ЖЭТФ **87**, 2166 (1984).
8. И. Ф. Волошин, С. В. Кравченко, Н. А. Подлевских, Л. М. Фишер, ЖЭТФ **89**, 233 (1985).
9. С. А. Деревянко, Г. Б. Ткачев, В. А. Ямпольский, ФНТ **26**, 87 (2000).
10. A. V. Pippard, Proc. Roy. Soc. A **191**, 385 (1947).