

# ДЕТОНАЦИЯ ВЗРЫВЧАТЫХ ВЕЩЕСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ТЯЖЕЛЫЕ ИНЕРТНЫЕ ЧАСТИЦЫ

*Н. М. Кузнецов<sup>a\*</sup>, О. Н. Давыдова<sup>b</sup>*

<sup>a</sup> *Институт химической физики им. Н. Н. Семенова Российской академии наук  
117334, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Институт проблем химической физики Российской академии наук  
142423, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 6 марта 2001 г.

Рассмотрены физические и математические аспекты теории детонационной волны, интенсивность и структура которой зависят от релаксации скоростей реагирующего взрывчатого вещества и тяжелых инертных частиц. Сформулировано обобщенное условие Жуге для скорости самоподдерживающейся детонации. Приведены результаты аналитического анализа и модельных численных решений задачи об отборе скорости детонации и о структуре волны в зависимости от отношения характерных времен тепловыделения и релаксации скоростей двухфазного течения. В качестве предельного случая быстрого увлечения частиц исследована структура ударной волны, обусловленная релаксацией скоростей двухфазного течения.

PACS: 47.40.-x

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно классической теории детонации Чепмена–Жуге и Зельдовича–Неймана–Деринга (ЗНД) параметры самоподдерживающейся детонации определяются на плоскости  $p, v$  (давление–удельный объем) точкой касания прямой Михельсона–Рэля (ПМР) детонационной адиабаты конечных продуктов реакции (условие Жуге) [1, 2]. Такую детонацию часто называют нормальной. Термин «нормальная детонация» обусловлен тем, что обычно детонационная адиабата конечных продуктов реакции расположена на плоскости  $p, v$  выше всех промежуточных детонационных адиабат, отвечающих не закончившемуся тепловыделению. Именно к такому случаю и относится указанное выше условие касания. Если же положение детонационных адиабат в процессе тепловыделения меняется немонотонно, что может быть обусловлено, например, немонотонным тепловыделением, то условие касания по-прежнему остается в силе, но оно относится не к равновесной, а к некоторой промежуточной детонационной адиабате, расположенной на плоскости  $p, v$  выше всех других [2–4]

(рис. 1). В отличие от нормальной детонации при этом точка окончания релаксационной зоны волны не совпадает с точкой касания ПМР и расположена на равновесной детонационной адиабате при меньшем давлении и меньшем сжатии (точка 4 на рис. 1). Детонация с таким пониженным сжатием называется, соответственно, недосжатой детонацией [4]. При одном и том же итоговом (отвечающем переходу в термодинамически равновесное состояние) тепловыделении скорость недосжатой детонации выше скорости нормальной детонации.

Самоподдерживающаяся недосжатая детонация, первоначально рассмотренная в связи с возможностью немонотонного тепловыделения в химических реакциях [3], может быть обусловлена другими причинами немонотонного тепловыделения, такими, например, как достаточно медленные (по сравнению с экзотермической химической реакцией) эндотермические релаксационные процессы — прогрев и плавление инертных добавок [5–9].

Детонация может быть также недосжатой вследствие медленной релаксации скорости тяжелых частиц инертной примеси в смесевых системах [7–10] (далее для краткости условно именуется детонаци-

\*E-mail: kuznetzv@chph.ras.ru

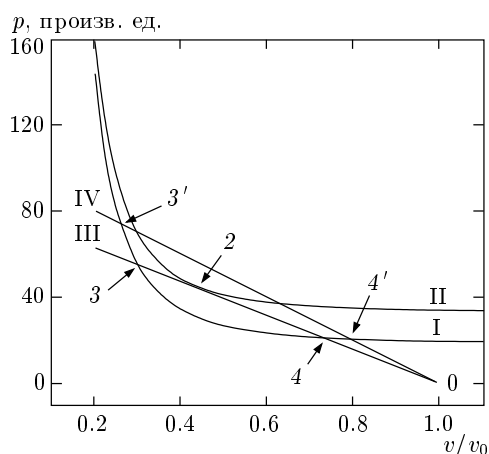


Рис. 1. Детонационные адиабаты. I — равновесная детонационная адиабата, II — детонационная адиабата максимального тепловыделения, III и IV — прямые Михельсона–Рэлея; 0 — точка, соответствующая состоянию вещества перед волной, 2 — точка касания, 3, 3' и 4, 4' — точки соответственно верхнего и нижнего пересечения ПМР с равновесной детонационной адиабатой

ей с релаксирующими скоростями). Скорость самоподдерживающейся детонации в таких системах зависит от отношения характерных времен релаксации температуры  $\tau_T$  и скорости примесных частиц  $\tau_U$  ко времени тепловыделения  $\tau_q$ . При  $\tau_T/\tau_q \ll 1$  и  $\tau_U/\tau_q \ll 1$  имеет место нормальная детонация, скорость  $d_J$  которой определяется условием Жу́ге. Неравенствам  $\tau_T/\tau_q > 1$ ,  $\tau_U/\tau_q \ll 1$  соответствует недосжатая детонация, обусловленная немо­нотонным тепловыделением. Более сложный вариант недосжатой детонации соответствует неравенству  $\tau_U/\tau_q > 1$ . В этом случае скорости фаз в релаксационной зоне детонационной волны (в той части зоны, где происходит основное тепловыделение) не одинаковы и на плоскости  $p, v$  изменение состояния релаксирующего вещества в детонационной волне уже не описывается ПМР. Таким образом, становится беспредметной простая и наглядная интерпретация правила отбора скорости детонации с помощью ПМР.

Приближенные расчеты зависимости релаксации скорости частиц от наблюдаемой скорости детонации применительно к условиям опытов [7] со смешанным взрывчатым веществом (ВВ), содержащим варьируемую концентрацию вольфрамового порошка, получены в [8] и [11]. При этом в [11] для каждого варианта экспериментов [7] оценка скорости примесных частиц (вольфрама) дается для некоторого

условного момента времени практически полного завершения тепловыделения. В [10] расчеты зависимости скорости детонационной волны от отношения  $\tau_U/\tau_q$  выполнены на основе принципа минимума для скорости детонации.

Для последовательного решения задачи о параметрах недосжатой детонации, обусловленной процессом релаксации скорости примесных частиц, следует выяснить, каковы физико-газодинамические причины отбора определенной скорости самоподдерживающейся детонации из множества возможных скоростей и каково математическое выражение такого отбора, т. е. что является аналогом условия Жу́ге в этом случае. Целью данной статьи являются: ответ на эти вопросы, математическое исследование зависимости скорости и структуры детонационной волны от отношения  $\tau_U/\tau_q$ , разработка на этой основе метода численного расчета скорости и структуры детонационной волны и его применение на примере модельных уравнений состояния и кинетики тепловыделения. Прежде всего имеется в виду выяснение качественных закономерностей, которые не зависят (или мало зависят) от деталей уравнения состояния ВВ и продуктов детонации. При такой постановке задачи можно использовать простую модель уравнения состояния конденсированного ВВ и продуктов, например, единое для исходного ВВ и продуктов уравнение состояния идеального газа с большим постоянным показателем адиабаты  $\gamma$  и с большой начальной плотностью (порядка  $\text{г/см}^3$ ), и варьировать такие параметры как массовая концентрация примесных частиц и отношение  $K \equiv \tau_U/\tau_q$  в широких пределах без привязки к конкретным экспериментальным данным.

В разд. 2 обсуждаются особенности решения задачи о структуре волны самоподдерживающейся детонации. Также дано обобщение известного в теории детонации свойства минимальности (принципа минимума) для скорости самоподдерживающейся детонации на системы с релаксацией скоростей. В разд. 3 и 4 дается математическая постановка задачи и качественный анализ ее решения. В разд. 5 и 6 приведены результаты аналитического исследования и численных расчетов зависимости скорости и структуры детонационной волны от параметра  $K$ . В разд. 7 рассматривается структура ударной волны в исходном ВВ (или, что то же самое, в химически инертном веществе) с примесью тяжелых частиц. Этот раздел введен как дополнение к разд. 5 для более наглядной интерпретации структуры детонационной волны при малых  $K$ . Кроме того, он может представить и самостоятельный интерес применительно к вопро-

сам структуры ударных волн.

Часть математических выкладок и исследование вопроса о связи границы вещественных решений дифференциального уравнения для релаксации скорости примесных частиц с седловой особой точкой вынесены в Приложения.

## 2. КАЧЕСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ САМОПОДДЕРЖИВАЮЩЕЙСЯ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ И ПРИНЦИП МИНИМУМА ДЛЯ СКОРОСТИ ДЕТОНАЦИИ

В этом разделе дается качественный анализ свойств детонационной волны и ее структуры на основе известных общих положений теории ударных волн и детонации. При достаточно мощном инициировании детонационная волна находится сначала в пересжатом состоянии. Течение за ее фронтом является дозвуковым<sup>1)</sup>. Поэтому передний край волны разрежения, сопрягающей детонационную волну с течением далеко за ней, где по условиям конкретных задач плотность вещества обычно в несколько раз или на порядки величин меньше, чем в детонационной волне, совпадает с фронтом ударной волны детонационного комплекса и приводит к постепенному уменьшению его интенсивности. Для исключения этого механизма уменьшения скорости волны  $d$  необходимо, чтобы стационарная релаксационная зона волны перемещалась по веществу со скоростью, не меньшей местной равновесной скорости звука  $c$  на задней границе зоны:

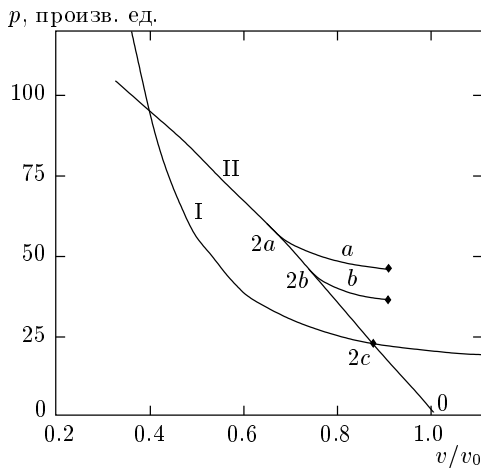
$$d - U \geq c, \quad (1)$$

где  $U$  — скорость вещества на задней границе зоны в лабораторной системе координат.

Фазовая траектория, описывающая структуру стационарной релаксационной зоны волны, в системе с релаксирующими скоростями не совпадает с ПМР, но конец траектории, соответствующий границе релаксационной зоны, находится на пересечении детонационной адиабаты с ПМР. В случае  $d > d_J$ , имеется два таких пересечения каждой ПМР (см. рис. 1). Однако решение физической задачи должно быть единственным. Принципиальное качественное различие точек  $3$ ,  $3'$  и  $4$ ,  $4'$  (рис. 1) заключается в том, что в точках  $4$ ,  $4'$  выполняется неравенство (1), тогда как в точках  $3$ ,  $3'$  — обратное

<sup>1)</sup> Передний фронт детонационной волны, где тепловыделения еще нет или оно относительно мало, является ударной волной, за которой, как известно, течение дозвуковое.

неравенство. Иными словами, из рассматриваемых точек только точки  $4$ ,  $4'$  являются сверхзвуковыми и, следовательно, релаксационная зона незатухающей, самоподдерживающейся волны должна оканчиваться в точке  $4$  [2, 4]. Вследствие количественной неопределенности соотношения (1), из него нельзя найти скорость самоподдерживающейся детонации. Для этого нужно какое-то дополнительное физическое и соответствующее ему математическое условие. В случае нормальной детонации это — условие Жуге (касание детонационной адиабаты и ПМР). Для того чтобы определить такое условие, обратимся к мысленному эксперименту с пересжатой детонационной волной, поддерживаемой поршнем. Начав с сильного пересжатия, будем достаточно медленно, не нарушая стационарности (квазистационарности) течения, уменьшать скорость поршня. При этом степень пересжатия будет уменьшаться и граница релаксационной зоны (точка  $3'$  на рис. 1) будет перемещаться по детонационной адиабате вниз. В этом процессе, однако, скорость детонации не может стать меньше скорости  $d^*$  самоподдерживающейся детонационной волны, для существования которой поршень вообще не нужен. Влияние поршня на скорость волны прекратится, очевидно, при той его скорости ( $U_p^*$ ), когда скорость детонационной волны понизится до  $d = d^*$ . С газодинамической точки зрения прекращение влияния поршня на скорость волны означает, что в релаксационной зоне волны появляется звуковая точка, через которую возмущения, идущие от поршня, не могут пройти к фронту ударной волны. При скорости поршня равной  $U_p^*$  стационарная релаксационная зона оканчивается в звуковой точке и дальнейший переход в термодинамическое равновесие, включая и завершение релаксации скоростей, происходит в нестационарном газодинамическом процессе, сопрягающем звуковую точку с граничным условием на поршне (с заданной его скоростью). При дальнейшем уменьшении скорости поршня скорость детонационной волны и структура стационарной релаксационной зоны между фронтом ударной волны и звуковой точкой не меняется, но стационарная зона удлиняется — ее граница сдвигается за звуковую точку дальше от фронта волны (рис. 2). Наконец, если скорость поршня уменьшается до значения, соответствующего равновесному стационарному течению в точке  $4$  (рис. 1), то граница стационарной зоны совпадает с точкой равновесия  $4$ , т. е. в стационарной зоне релаксация полностью завершается. Между точкой и поршнем при этом расположена нестационарная по длине (равномерно удлиняющаяся со временем) область посто-



**Рис. 2.** Качественная зависимость параметров нестационарного течения между границами стационарной зоны (точки 2a, 2b, 2c на обобщенной линии Михельсона–Рэлея II) и соответствующими границами завершения релаксационных процессов (точки ♦) при трех значениях скорости поршня  $U = U_a > U_b > U_c$ ;  $U_a = U^*$ ,  $U_c = U_{min}$ . Значения давления  $p$  на поршне такие же, как в точках ♦. I — равновесная детонационная адиабата; 0 — точка, соответствующая состоянию вещества перед волной

янного равновесного течения с теми же параметрами — скоростью, давлением, плотностью, что и в точке 4 [9]. Дальнейшее уменьшение скорости поршня, в том числе его остановка или движение назад, не оказывает никакого влияния на скорость детонационной волны и на релаксационную зону (подобно тому, как скорость нормальной детонации в трубе, инициированной у торца трубы, на далеких расстояниях от торца не зависит от того, закрыт он или открыт [2, 4]).

При заданной скорости детонации, в частности, при  $d = d^*$ , задача о структуре стационарной зоны волны в математическом отношении является задачей Коши для определенной системы уравнений с начальными условиями на фронте волны. Ее решение — интегральная кривая, одна и та же независимо от скорости поршня ( $U_p < U_p^*$ ). От скорости поршня зависит лишь то, доходит эта кривая до точки равновесия 4 или стационарная зона заканчивается раньше. В любом случае она не ведет к точке 3 в отличие от интегральных кривых при  $d > d^*$ . Следовательно, структура релаксационной волны, рассматриваемая как функция скорости волны  $d$ , претерпевает в точке  $d = d^*$  качественное изменение: граница релаксационной зоны при  $d > d^*$  заканчи-

вается на верхней ветви детонационной адиабаты, а при  $d = d^*$  — на нижней ветви, в точке нижнего пересечения детонационной адиабаты с ПМР.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что подобное качественное изменение интегральной кривой происходит, когда она становится сепаратрисой седловой особой точки. Таким образом, задачу нахождения скорости самоподдерживающейся детонации можно свести к поиску такой скорости волны  $d = d^*$ , при которой стационарная структура волны описывается сепаратрисой, переводящей в стационарной релаксационной зоне изначально дозвуковое течение в сверхзвуковое. Это положение, установленное в классической теории детонации для однофазных систем (см., например, [4]), в равной мере может быть отнесено и к детонации с релаксирующими скоростями. Величина  $d^*$  связана со скоростями пересжатой детонации соотношением

$$d^* < d. \tag{2}$$

Наряду с таким способом нахождения скорости самоподдерживающейся детонации представляет теоретический и практический интерес подойти к этой задаче с другой стороны. Альтернатива вытекает из условия существования стационарной структуры волны, в которой ВВ переходит из исходного неравновесного состояния в состояние полного термодинамического равновесия продуктов детонации, включая равенство скоростей направленного движения всех компонент (фаз). При фиксированной конечной теплоте взрыва  $q$  существует некоторое минимальное значение скорости волны,  $d_{min1}$  (большее скорости звука в исходном ВВ), ниже которого нет стационарного решения для структуры детонационной волны. Это хорошо известно из классической теории ЗНД и может также быть доказано для любых соотношений между временами  $\tau_T, \tau_q, \tau_U$ .

Для волн с устойчивой одномерной структурой по определению  $d_{min1}$  справедливо соотношение

$$d^* \geq d_{min1}.$$

То, что скорости  $d^*$  и  $d_{min1}$  обладают определенными свойствами минимальности (см. (2)), наводит на мысль, что в случае единственности режима самоподдерживающейся детонации эти скорости равны, и мы имеем дело всего лишь с двумя разными обозначениями скорости одной и той же детонационной волны. Известно, что при нормальной детонации Жуге и детонации с немонотонным тепловыделением это действительно так. Подтверждением справедливости этого предположения в общем случае недосжатой детонации служит приведенное в

Приложении 1 доказательство того, что интегральная кривая, описывающая стационарную структуру волны с релаксацией скорости фаз, является при  $d = d_{min1}$  также сепаратрисой, проходящей через седловую особую точку.

Такая одинаковость свойств режимов детонации и соответствующих им решений задачи о структуре волны при  $d = d^*$  и  $d = d_{min1}$  означает, что при условии единственности<sup>2)</sup> скорости  $d_{min1}$  справедливо равенство

$$d^* = d_{min1}. \quad (3)$$

В пространстве комплексных переменных решение задачи о стационарной структуре волны не исчезает при  $d < d_{min1}$ , а становится комплексным и потому не удовлетворяющим физической постановке задачи. Соответственно, значение  $d_{min1}$  может быть найдено, исходя из условия касания интегральной кривой (описывающей стационарную структуру детонационной волны) границы области вещественных решений. Это условие касания будет использовано далее (разд. 4) при формулировке искомого обобщенного условия Жуге.

### 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Структура детонационной волны, при расчете которой наряду с тепловыделением учитывается релаксация скорости примесных частиц, описывается системой пяти уравнений стационарного двухфазного течения: два уравнения сохранения массы компонент, уравнения сохранения импульса и энергии и дифференциальное релаксационное уравнение для скорости примесных частиц, с пятью неизвестными (плотность и скорость каждой из фаз и давление).

Для записи уравнений введем следующие обозначения:  $d$  — скорость детонационной волны в лабораторной системе координат;  $x$  и  $y$  — скорости газа и примесных частиц за фронтом ударной волны детонационного комплекса в системе координат фронта;  $\alpha$  и  $\beta$  — массовые концентрации газа и частиц в исходной смеси,  $\beta = 1 - \alpha$ ;  $R_{ex}$  и  $r_p$  — плотности индивидуального ВВ и частиц в исходном состоянии;

<sup>2)</sup> Неединственность детонационного режима в безграничной среде хотя и возможна, но для этого должны быть выполнены особые условия, налагаемые на параметры релаксационного процесса (на кинетику немоного тепловыделения [5] или на зависимость коэффициента трения между компонентами при релаксации скоростей от интенсивности детонационной волны).

$R_0$  и  $r_0$  — плотности газа и частиц в исходной смеси (массы компонент, отнесенные к объему смеси):

$$R_0 = \frac{\alpha}{v_0}, \quad r_0 = \frac{\beta}{v_0},$$

$R$  и  $r$  — плотность газа и частиц за фронтом ударной волны;  $v_0$  — удельный объем исходной смеси, связанный с плотностями индивидуальных компонент соотношением

$$v_0 = \frac{\alpha}{R_{ex}} + \frac{\beta}{r_p},$$

$C_1$  и  $C_2$  — потоки газа и частиц;  $p$  и  $v$  — давление и удельный объем смеси за фронтом ударной волны;  $p_0$  — давление перед волной;  $H_1$  и  $H_2$  — удельные энтальпии газа и частиц за фронтом ударной волны (без скрытой теплоты взрыва);  $H_{1,0}$  и  $H_{2,0}$  — удельные энтальпии ВВ и частиц перед волной (без скрытой теплоты взрыва);  $q_0$  — удельная теплота взрыва исходного ВВ;  $q$  — текущее удельное тепловыделение (количество тепла, выделившееся к данному моменту времени). Первые четыре уравнения, выражающие законы сохранения для плоского стационарного двухфазного течения, можно представить в следующем виде:

$$xR = C_1, \quad (4)$$

$$yr = C_2, \quad (5)$$

$$p + C_1x + C_2y = C_3, \quad (6)$$

$$C_1(H_1 - q) + C_2H_2 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2\frac{y^2}{2} = C_4, \quad (7)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — постоянные, зависящие от скорости детонационной волны и от состава и состояния исходной смеси:

$$C_1 = R_0d, \quad C_2 = r_0d, \quad C_3 = p_0 + (C_1 + C_2)d, \quad (8)$$

$$C_4 = C_1H_{1,0} + C_2H_{2,0} + (C_1 + C_2)\frac{d^2}{2}.$$

Далее будем рассматривать только сильные детонационные волны, для которых в формулах (4)–(8) можно опустить  $p_0, H_{1,0}$  и  $H_{2,0}$ . Кроме того, сделаем следующие упрощения, не оказывающие существенного влияния на решение рассматриваемой задачи: будем считать, что примесная частица несжимаема и что время ее тепловой релаксации либо бесконечно велико, либо бесконечно мало. (В этих предельных случаях не нужно рассматривать кинетики прогрева частицы и все различие между ними эквивалентно относительно небольшому изменению теплоты  $q_0$ .) Вводя указанные упрощения и подставляя в (7) выражение энтальпии идеального газа

$$H_1 = \frac{Sp}{R}, \quad S \equiv \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad (9)$$

с заменой в нем  $p$  согласно (6), приходим после несложных преобразований к уравнению

$$\frac{d^2}{2} = [d - (\alpha x + \beta y)] Sx - \alpha q + \alpha \frac{x^2}{2} + \beta \frac{y^2}{2}. \quad (10)$$

Это уравнение при заданной скорости волны  $d$  и заданной функции тепловыделения  $q = q(t)$  определяет зависящую от времени связь между скоростями фаз в релаксационной зоне детонационной волны. Вторым уравнением, замыкающим систему и позволяющим найти скорости  $x, y$  и остальные неизвестные  $R, r, p$  является релаксационное уравнение для ускорения частиц

$$m \frac{dy}{dt} = F, \quad (11)$$

где  $F$  — сила, зависящая от разности скоростей фаз,  $m$  — масса частицы. Характер этой зависимости меняется при изменении числа Рейнольдса  $Re$ . При  $Re \leq 10$  имеет место стоков режим обтекания с линейной зависимостью силы от скорости:  $F \propto x - y$ . При  $Re \gg 10$  зависимость становится более сложной. Приблизительно это учитывается суммой линейного и нелинейного слагаемых в виде [12, 13]

$$F \approx \frac{1}{8} \pi A \rho \nu d_p (x - y) \left[ 1 + \frac{B}{A} (Re)^n \right], \quad (12)$$

$$\frac{1}{3} \leq n \leq \frac{2}{3}, \quad Re \equiv |x - y| \frac{d_p}{\nu},$$

где  $\rho$  и  $\nu$  — плотность и кинематическая вязкость продуктов детонации,  $d_p$  — диаметр частицы. По сравнению с разностью скоростей, плотность можно полагать постоянной и равной ее значению, например, в начале или в конце релаксационной зоны. Коэффициенты  $A$  и  $B$  зависят от  $n$ . При  $n = 1/3$ :  $A = 24, B = 5.9$ . Нелинейное слагаемое в (12) не вносит качественного изменения в ход интегральных кривых рассматриваемой системы уравнений (это было установлено ранее в частном случае на примере численных расчетов аналогичной задачи для смеси водонасыщенного гексогена с порошком вольфрама [10]). Его учитывать имеет смысл главным образом в количественных расчетах параметров детонации конкретных смесевых ВВ с использованием достаточно точных уравнений состояния ВВ и продуктов. Поэтому в данном анализе мы ограничимся линейным приближением для силы  $F$ .

Уравнение (12) следует решать с начальным условием

$$y = d|_{t=0}, \quad (13)$$

которое означает, что скорость частиц не претерпевает разрыва на ударноволновом скачке.

Зависимость  $q$  от времени задается в виде

$$q = q_0 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t}{\tau_q} \right) \right], \quad (14)$$

где  $q_0$  — полное тепловыделение (теплота взрыва). Релаксационное уравнение, получаемое подстановкой выражения для  $F$  из (12) в (11) в линейном приближении, т. е. при  $B = 0$ , для удобства сравнения характерных времен тепловыделения и релаксации скорости преобразуется к виду

$$\frac{dy}{dT} = \frac{x - y}{K}, \quad (15)$$

$$T \equiv \frac{t}{\tau_q}, \quad K \equiv \frac{\tau_U}{\tau_q}, \quad \frac{1}{\tau_U} \equiv \frac{\pi A \rho \nu d_p}{8m}.$$

При экспоненциальном законе тепловыделения (14) имеем

$$\frac{dq}{dT} = q_0 - q.$$

Исключая из этой формулы и из (14) безразмерное время  $T$ , получаем для зависимости  $y$  от  $q$  следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dq} = \frac{x - y}{K(q_0 - q)}. \quad (16)$$

При этом начальное условие (13) выражается в виде

$$y = d|_{q=0}. \quad (17)$$

#### 4. ОБЩАЯ СХЕМА И ПРАКТИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПАРАМЕТРАХ И СТРУКТУРЕ САМОПОДДЕРЖИВАЮЩЕЙСЯ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

Система уравнений (10), (16) в зависимости от входящего в нее параметра — скорости детонации  $d$  — описывает не только самоподдерживающуюся детонацию, но и пересжатые детонационные волны, которые, подобно ударным волнам, могут распространяться с постоянной амплитудой только при соответствующем внешнем воздействии, например под действием поршня. Без этого скорость волны уменьшается до скорости самоподдерживающейся детонации  $d^*$ , вычисление которой согласно (3) сводится к нахождению такого значения  $d_{min1}$ , ниже которого не существует вещественного решения задачи о стационарной структуре детонационной волны. Это значение зависит от параметра  $K$  релаксационного уравнения (16). Нахождение скорости самоподдерживающейся недосжатой детонационной волны является своеобразной задачей на собственное значение: при заданной величине параметра  $K$  из множества решений задачи о структуре волны нужно

найти такое, для которого  $d = d_{min1}(K)$  и которое в переменных  $q, x$  описывается сепаратрисой, проходящей через седловую особую точку (см. разд. 2). Далее для краткости вместо  $d_{min1}(K)$  будем использовать сокращенное обозначение  $d_{min1}$ .

При вещественных начальных данных граница вещественных решений (интегральных кривых) системы уравнений (10), (16) (в которой скорость детонации  $d$  является параметром), удовлетворяющих начальному условию (17) и ведущих к локальному термодинамическому равновесию,

$$q = q_0, \quad y = x, \quad (18)$$

определяется в трехмерном пространстве  $y, q, d$  двумя поверхностями, одна из которых обусловлена требованием вещественности интегральных кривых, а вторая — условием существования точек (18) при заданном значении  $d$ . Рассмотрим поочередно каждую из этих двух поверхностей.

1) Первая поверхность представляет собой границу вещественных значений функции  $x = x(y, q, d)$ , определяемой уравнением (10). Эта функция, т. е. решение уравнения (10) относительно  $x$ , приведена в Приложении 2. Приравнивание детерминанта решения к нулю дает уравнение рассматриваемой границы

$$Z(y, q, d) = 0. \quad (19)$$

Условимся называть ее в дальнейшем граничной поверхностью. Явные выражения функции  $Z(y, q, d)$  и уравнения граничной поверхности, разрешенного относительно  $d$ ,

$$d = F(y, q), \quad (20)$$

приведены в Приложении 2. Там же показано, что область вещественных решений удовлетворяет соотношению

$$d - F(y, q) \geq 0. \quad (21)$$

В этой области находятся вещественные интегральные кривые системы (10), (16), отвечающие различным значениям параметров  $d$  и  $K$ :

$$f(y, q)_{d,K} = 0. \quad (22)$$

Пусть в рассматриваемом трехмерном пространстве  $y, q, d$  в декартовых координатах ось  $d$  направлена по вертикали вверх. Тогда условие (21) означает, что интегральные кривые системы (10), (16) (которые по определению находятся в плоскостях  $d = \text{const}$ ) должны располагаться не ниже граничной поверхности (20). При этом наименьшему значению скорости  $d$  (назовем его  $d_{min1}$ ) из всех ее значений, удовлетворяющих (21), отвечает касание инте-

гральной кривой граничной поверхности. К вопросу о вычислении  $d_{min1}$  мы вернемся ниже.

2) Вторая поверхность — это плоскость  $d = d_{min2}$ , разделяющая все пространство  $y, q, d$  (все множество плоскостей  $d = \text{const}$ ) на две части. В одной из них при каждом значении  $d$  имеется по крайней мере одна такая точка  $y, q_0$ , в которой (18) является решением уравнения (10), а в другой ни при каком значении  $d$  таких точек нет. Из классической теории детонации известно, что множеству точек (18) отвечает на плоскости  $p, v$  равновесная детонационная адиабата и при каждом значении  $d > d_J$  имеются две точки (18), удовлетворяющие уравнению (10), которые определяются двумя пересечениями детонационной адиабаты с ПМР. При  $d = d_J$  оба пересечения сливаются в одно — в точку касания. При  $d < d_J$  ПМР не имеет общих точек с детонационной адиабатой, т. е. уравнение (10) не имеет вещественных решений (18). Отсюда и из данного выше определения (свойств) плоскости  $d = d_{min2}$  следует

$$d_{min2} \equiv d_J. \quad (23)$$

Значение  $d_{min2}$  определяется уравнением

$$\text{Det}(d, q_0) = 0, \quad (24)$$

где  $\text{Det}(d, q_0)$  — детерминант в решении уравнения (10) относительно  $x$  при условии (18), т. е. уравнения

$$\frac{d^2}{2} - (d - x)Sx + q_0\alpha x - \frac{x^2}{2} = 0.$$

Решение этого уравнения относительно  $d$  приводит к известной формуле теории детонации:

$$d_{min2} \equiv d_J = \sqrt{2(\gamma^2 - 1)\alpha q_0}. \quad (25)$$

(Множителем  $\alpha$  учитывается понижение удельной теплоты взрыва за счет инертной примеси.)

Отметим, что при  $\beta = 0$  в (20) исчезает переменная  $y$  (см. явный вид функции  $F(y, q)$  в Приложении 2) и подстановка  $q = q_0$  в (20) приводит, как и должно быть, к (25). Качественная иллюстрация относительного положения поверхности (20) и плоскости (23), ограничивающих область вещественных решений уравнений (10), (16) с интегральными кривыми, содержащими точки (18), дана на рис. 3. Сечения граничной поверхности (20) плоскостями  $d = \text{const}$  приведены на рис. 4 (кривые  $y_1$ – $y_4$  об-суждаются в разд. 5).

Поскольку скорость детонации не может быть меньше  $d_{min1}$  и  $d_J$ , для минимальной скорости детонации  $d_{min}$  имеем условие

$$d_{min} = \max\{d_{min1}, d_J\}. \quad (26)$$

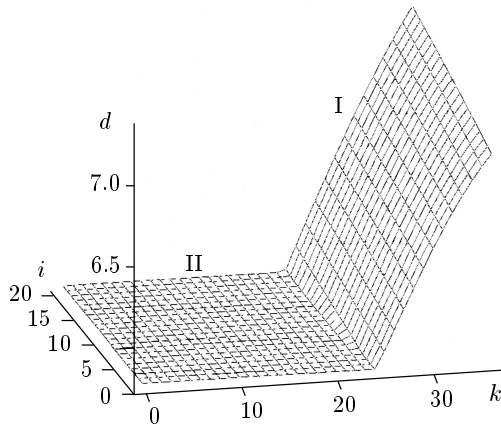


Рис. 3. I — граничная поверхность (20), II — плоскость  $d = d_J = 5.759$  км/с;  $q = (3 + 0.027i)$  кДж/г,  $y = 0.2k$  км/с,  $d$  — в км/с

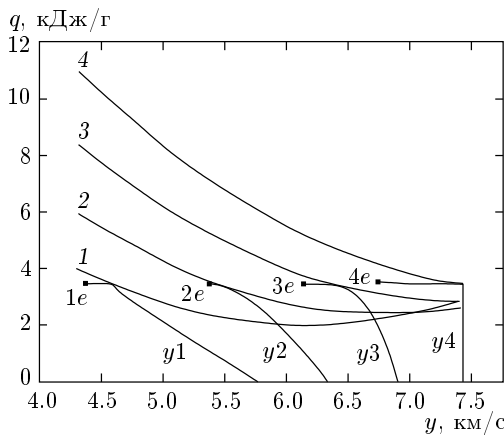


Рис. 4. Линии пересечения граничной поверхности (20) плоскостями  $d = \text{const}$ : 1 —  $d = 5.759$ , 2 —  $d = 6.33$ , 3 —  $d = 6.9$ , 4 —  $d = 7.413$  (значения  $d$  выражены в км/с). Квадратами 1e–4e отмечены соответствующие границы стационарных зон в структуре самоподдерживающихся детонационных волн (точка 4 на рис. 1).  $q_0 = 3.455$  кДж/г,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 3$ .  $y_1$ – $y_4$  — соответствующие собственные интегральные кривые

Это и есть искомое обобщенное условие Жуге. Первая из двух сравниваемых в (26) величин зависит от параметра  $K$  уравнения (16) (и является непрерывной функцией этого параметра), а вторая,  $d_J$ , от  $K$  не зависит. В пределе  $K \rightarrow 0$ , соответствующем классической детонации Жуге,  $d_{min} = d_J$ . Следовательно, как видно из (26), в этом пределе должно быть  $d_{min1} < d_J$  (другая возможность,  $d_{min1} = d_J$ , допускаемая условием (26), реализуется в рассмат-

риваемом пределе только при  $\beta = 0$ ). При  $K \rightarrow \infty$ , что соответствует предельному, наиболее ярко выраженному случаю недосжатой детонации, выполняется неравенство  $d_{min} > d_J$  и согласно (26) должно быть  $d_{min1} > d_J$ . Указанные различия  $d_{min1}$  и  $d_J$  в двух пределах означают, что при прохождении параметром  $K$  некоторого промежуточного конечного значения  $K^*$  происходит изменение знака неравенства между  $d_{min1}$  и  $d_J$ . Иными словами, нормальной детонации Жуге с точным выполнением равенства  $d_{min1} = d_J$  отвечает не только предельное значение  $K = 0$ , но некоторый конечный интервал

$$0 \leq K \leq K^*. \tag{27}$$

Физическая причина этой закономерности выяснялась в разд. 4. Для нахождения скорости детонации  $d_{min}$  из (26) во всем диапазоне значений  $K$  нужно вычислить  $d_J$  и  $K^*$  и затем найти зависимость  $d_{min1}$  от  $K$  при  $K > K^*$ .

Сформулируем теперь уравнение, определяющее  $d_{min1}$ , и рассмотрим способ практических расчетов  $K^*$  и  $d_{min1}$ . Как уже говорилось выше, интегральная кривая при  $d = d_{min1}$  касается граничной поверхности (20), т. е. имеет с ней одну общую точку. (Далее будем называть такую кривую «собственной» интегральной кривой.) Эта точка является точкой касания двух кривых, лежащих в плоскости  $d = d_{min1}(K)$ : «собственной» интегральной кривой

$$f(y, q)_{d_{min1}} = 0 \tag{28}$$

и линии пересечения этой плоскости с граничной поверхностью (20), т. е. линией

$$F(y, q) = d_{min1}. \tag{29}$$

Условие касания выражается в виде равенства в одной и той же точке  $y, q, d_{min1}(K)$  двух производных  $dy/dq$ , одна из которых берется вдоль интегральной кривой (28), а вторая — вдоль линии (29). Это равенство имеет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_y / \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_q = \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_y / \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_q \Big|_{d=d_{min1}}. \tag{30}$$

Тремя уравнениями (28)–(30) определяются три неизвестных — значения  $y$  и  $q$  в точке касания и  $d_{min1}$  при заданном значении параметра  $K$ . После вычисления  $d_{min1}$  значение  $d_{min}$  находится из (26).

Формально процедура нахождения собственного значения  $d_{min1}$  и соответствующей «собственной» интегральной кривой (28) заключается в выборе из



множества функций (22) функции с таким значением  $d$ , при котором удовлетворяется условие касания (30). После того как интегральная кривая (28) найдена (или непосредственно в процессе ее вычисления), из уравнений (28) и (10) находится зависимость  $x$  от  $q$  (или от  $y$ ), представляющая структуру детонационной волны в этих переменных. Затем структура волны может быть вычислена в переменных  $p, v$  по формулам (см. (4)–(9)):

$$p = C_3 - C_1x - C_2y, \quad v = \frac{xy}{C_1y + C_2x}.$$

Рассмотренный путь нахождения скорости детонационной волны  $d(K)$  и «собственной» интегральной кривой (28) дает общее представление о математической структуре решения и его геометрическую интерпретацию. Но для практической реализации он довольно сложен. На практике численное решение задачи при заданном  $K > K^*$  существенно облегчается, если вместо поиска точки касания с помощью уравнения (30) проводить эквивалентный поиск такого наименьшего значения параметра  $d$  в уравнении (10), при малейшем (в пределах заданной точности) уменьшении которого решение системы уравнений (10), (16) становится комплексным. Точка  $q = q^*$  появления (исчезновения) комплексности при малейшем уменьшении (увеличении) параметра  $d$  совпадает в пределах заданной точности с искомой точкой касания. Путем таких вычислений для ряда значений  $K = K_i$  определяется функция  $d_{min1}(K_i)$ . Вследствие монотонности этой функции и относительно слабой ее зависимости от аргумента (при возрастании  $K$  от  $K^*$  до  $\infty$  скорость  $d_{min1}$  возрастает в  $1/\sqrt{\alpha}$  раз в случае идеального газа и примерно так же при других уравнениях состояния) для восстановления непрерывной зависимости  $d_{min1}(K)$  с удовлетворительной точностью достаточно провести указанные вычисления для нескольких (около десяти)  $K_i$ . Практические расчеты удобнее проводить, поменяв местами аргумент и функцию — задавая значения  $d = d_i$  с постоянным шагом во всем диапазоне (от  $d_J$  до  $\approx d_J/\sqrt{\alpha}$ ) и находя такое наибольшее значение параметра  $K = K_i$  уравнения (16), при малейшем (в пределах заданной точности) увеличении которого решение системы уравнений (10), (16) становится комплексным. При этом  $K^*$  находится как наибольшее значение  $K$  при  $d = d_J$ . Результаты численных решений см. ниже в разд. 6.

## 5. ЗАВИСИМОСТЬ КООРДИНАТ ТОЧКИ КАСАНИЯ ОТ ОТНОШЕНИЯ ( $K$ ) ХАРАКТЕРНЫХ ВРЕМЕН РЕЛАКСАЦИИ СКОРОСТИ ЧАСТИЦ И ТЕПЛОТЫДЕЛЕНИЯ

Вследствие того что система уравнений (10), (16), (30) не решается аналитически, зависимость координат точки касания от параметра  $K$  тоже нельзя получить в аналитическом виде. Но качественное представление о такой зависимости может быть получено на основе анализа асимптотик малых и больших  $K$ .

а) Случай  $K \rightarrow 0$  соответствует нормальной (классической) детонации: релаксация скоростей практически заканчивается еще при  $q = 0$  и на стадии теплотыделения  $x = y$ . В этом пределе скорость детонации определяется формулой (25).

В разд. 4 на основе качественного анализа зависимости скорости самоподдерживающейся детонационной волны от параметра  $K$  и ее предельных значений было показано, что классическое выражение скорости детонации является точным не только в пределе  $K \rightarrow 0$ , но и в некотором конечном интервале (27) малых  $K$ . Проанализируем физическую причину этого свойства детонационной волны.

При конечных малых значениях параметра  $K$  релаксация скоростей фаз происходит сравнительно быстро, поэтому основная стадия теплотыделения протекает в условиях примерного равенства скоростей фаз, которое можно выразить соотношением

$$|\Delta| \ll x, y, \quad \Delta \equiv y - x.$$

При этом

$$\frac{dy}{dq} \approx \frac{dy_e}{dq} \equiv \frac{dx_e}{dq},$$

где  $x_e$  (и  $y_e$ ) — скорость течения при равенстве скоростей фаз, а  $\Delta$  определяется релаксационным уравнением (16) с заменой в его левой части производной  $dy/dq$  на  $dx_e/dq$ :

$$\Delta = -K(q_0 - q) \frac{dx_e}{dq}. \quad (31)$$

Зависимость  $x_e$  от  $q$  при заданной скорости волны  $d$  определяется уравнениями (10) и  $y = x$  и выражается в виде

$$x_e = \frac{1}{\gamma + 1} \left[ \gamma d - \sqrt{d^2 - 2(\gamma^2 - 1)\alpha q} \right].$$

Отсюда, подставляя  $d = d_J$  (см. (25)), получаем

$$x_e = \frac{1}{\gamma + 1} \sqrt{2(\gamma^2 - 1)\alpha q_0} \left( \gamma - \sqrt{1 - \frac{q}{q_0}} \right). \quad (32)$$

Дифференцируя (32) по  $q$  и подставляя результат в (31), находим

$$\Delta = -K \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \sqrt{2\alpha(q_0 - q)}. \quad (33)$$

Для исследования зависимости скорости самоподдерживающейся детонации от параметра  $K$  при малых его значениях ключевым моментом является отрицательность разности скоростей компонент  $\Delta$  на основной и заключительной стадиях тепловыделения, качественно очевидная уже из (31) и количественно выраженная формулой (33). (См. также результаты численных расчетов в разд. 6 и рис. 6а.) Отрицательность  $\Delta$  означает, что в лабораторной системе координат примесные частицы движутся быстрее продуктов детонации. Следовательно, дальнейшая релаксация скоростей сопровождается перекачкой кинетической энергии от частиц к продуктам детонации, которые таким образом получают энергию дополнительно к тепловыделению. Вследствие одинакового (положительного) знака потоков энергии, поступающих в продукты в результате тепловыделения и относительного торможения частиц, переданная энергия достигает максимума при полном завершении тепловыделения и скоростной релаксации. На плоскости  $p, v$  соответствующая точка расположена на равновесной детонационной адиабате. В Приложении 3 дано доказательство того, что эта точка определяется классическим условием касания ПМР. При этом в конечном диапазоне (27) малых значений параметра  $K$  скорость самоподдерживающейся детонации не зависит от  $K$  и определяется формулой (25).

б) При  $K = \infty$  скорость примесных частиц во время тепловыделения не изменяется, сохраняя свое начальное значение  $y = d$ . В этом пределе (который соответствует обращению коэффициента вязкости  $\nu$  в нуль) значение  $d_{min1}$  определяется согласно (20) уравнением  $d = F(d, q_0)$ , решение которого имеет вид

$$d_{min1} = \sqrt{2(\gamma^2 - 1)q_0}, \quad (34)$$

что совпадает с известной формулой для скорости детонационной волны индивидуального ВВ [2]. Отсутствие множителя  $\alpha$  под корнем в (34) объясняется тем, что инертные примесные частицы, не меняющие своего импульса в процессе тепловыделения, не оказывают никакого влияния на параметры детонационной волны (с точностью до эффектов, связанных с тепловой релаксацией частиц) и она распространяется так же, как в индивидуальном ВВ.

При  $K \gg 1$  релаксация скорости происходит после практически полного завершения тепловы-

деления. Это позволяет в уравнениях, определяющих точку касания, ограничиться старшими членами разложения всех величин по степеням разности  $Q^* - 1$  (где  $Q^* \equiv q^*/q_0$ ), и найти явное выражение условия касания (30). Соответствующие выкладки приведены в Приложении 4. Здесь мы приводим лишь результат:

$$Q^* - 1 = \frac{\text{const}}{K}, \quad (35)$$

$$\text{const} = -\frac{2\beta[\gamma^2 + 1 + \beta(\gamma^2 - 1)]}{(1 - \beta)(\gamma + 1)[1 + \beta(\gamma^2 - 1)]}.$$

О зависимости  $Q^*$  от  $K$  при всех значениях этого параметра см. в разд. 6.

### 6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ЗАВИСИМОСТИ СКОРОСТИ ДЕТОНАЦИИ И СТРУКТУРЫ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ ОТ ПАРАМЕТРА $K$

При численном решении сформулированной в разд. 3 задачи о нахождении минимальной скорости детонации как функции от  $K$  и о структуре детонационной волны использовались следующие исходные данные: теплота взрыва  $q_0$  и плотность индивидуального ВВ ( $R_{ex}$ ) полагались равными соответственно 3.455 кДж/г и 1.45 г/см<sup>3</sup> (примерно такими же, как у водонасыщенного гексогена [10, 14]), плотность примесных частиц (вольфрам)  $r_p = 19.35$  г/см<sup>3</sup>, массовая концентрация

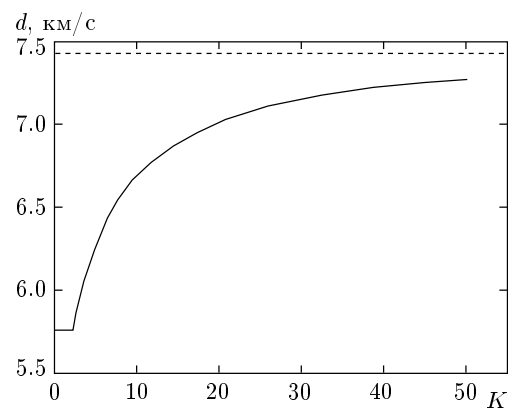
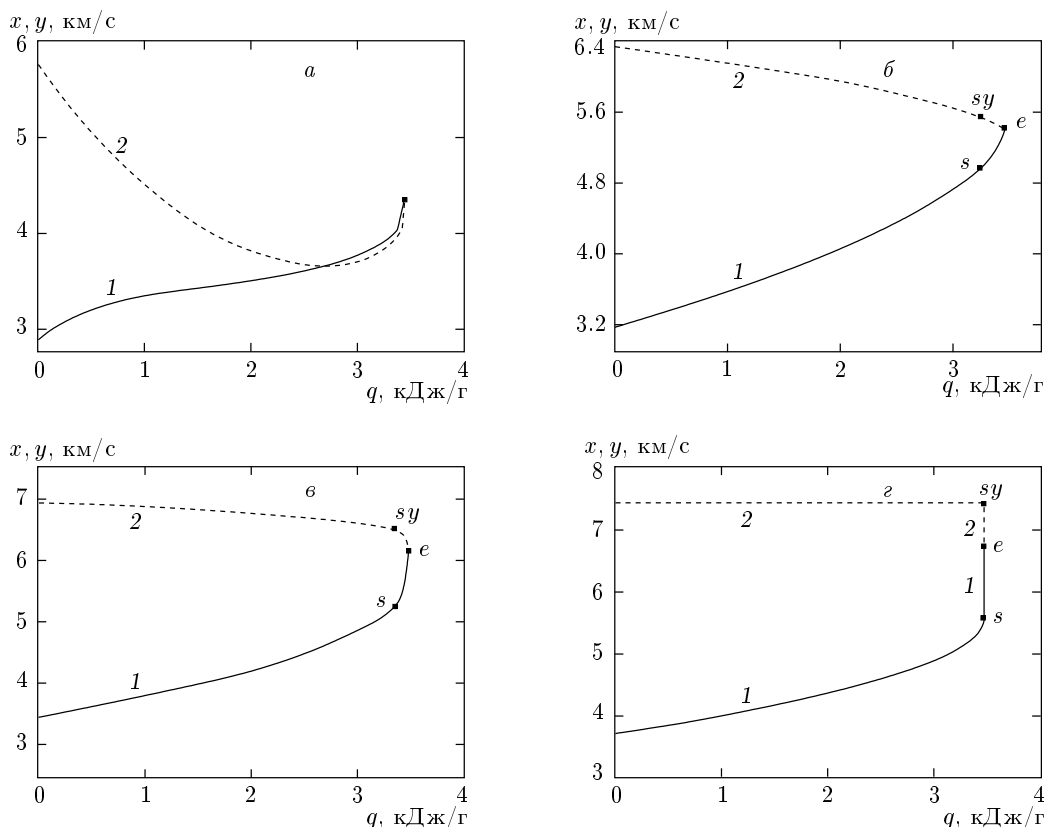


Рис. 5. Зависимость скорости детонационной волны от отношения характерных времен релаксации скорости и тепловыделения ( $K$ ).  $q_0 = 3.455$  кДж/г,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 3$ . В асимптотике больших  $K$  скорость волны приближается к 7.43 км/с (штриховая линия)



**Рис. 6.** Зависимость скорости газа (1) и частиц (2) от текущего тепловыделения  $q$ .  $q_0 = 3.455$  кДж/г,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 3$ ,  $a - d = 5.759$  км/с,  $K = 0.5$ ;  $б - d = 6.328$  км/с,  $K = 5.5$ ;  $в - d = 6.92$  км/с,  $K = 16$ ;  $г - d = 7.435$  км/с,  $K = \infty$ ;  $e$  — граница стационарной зоны ( $q = q_0$ ,  $x = y = 4.392$  км/с (а), 5.403 км/с (б), 6.15 км/с (в), 6.75 км/с (г)).  $s$  — седло на плоскости  $q, x$ ;  $sy$  — точка на плоскости  $y, q$ , соответствующая седлу  $s$  (точка касания, см. линии на рис. 4: 2 и  $y_2$  (б), 3 и  $y_3$  (в), 4 и  $y_4$  (г))

вольфрама в исходной смеси варьировалась в пределах  $0 \leq \beta \leq 0.5$ . Калорическое уравнение состояния реагирующего ВВ полагалось независимым от степени превращения и моделировалось в двух вариантах: формулой (9) (идеальный газ) и уравнением состояния продуктов детонации водонасыщенного гексогена [14]. В качестве примера на рис. 4–6 приведены полученные в расчетах зависимости: 1) скорости детонации от параметра  $K$  (рис. 5); 2) структуры детонационной волны в переменных  $x, y, q$  для нескольких значений параметра  $K$  и соответствующих ему собственных значений скорости детонации  $d_K$  (рис. 4, 6). На рис. 4 приведены также соответствующие значениям  $d_K$  граничные линии (29) и точки равновесия (16) (каждой такой точке отвечает точка 4 на рис. 1). Приведенные иллюстрации относятся к варианту: уравнение состояния (9) с показателем адиабаты  $\gamma = 3$ , концентрация вольфрама  $\beta = 0.4$ . При такой концентрации вольфрама

удельный объем исходной смеси  $v_0 = 0.435$  см<sup>3</sup>/г. Отметим, что при недосжатой детонации координата седла  $q^*$  совпадает с  $q_0$  только при  $K = \infty$ . Зависимость  $q^*(K)$  не монотонна: при возрастании  $K$  в диапазоне (17) величина  $q^*$  сначала уменьшается, а затем возрастает, асимптотически приближаясь к  $q_0$  согласно (35).

### 7. СТРУКТУРА СИЛЬНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН, ОБУСЛОВЛЕННАЯ СКОРОСТНОЙ РЕЛАКСАЦИЕЙ КОМПОНЕНТ

При  $K \ll 1$  релаксация скоростей происходит и практически полностью заканчивается на той стадии, где тепловыделение пренебрежимо мало. (Это утверждение не относится к тем особым случаям, когда значительная часть ( $\sim 10\%$ ) тепла выделяется на стадии ударно-волнового сжатия [15].) При этом зоны релаксации скорости и тепловыделения

в структуре детонационной волны пространственно разделены и первая из них относится к ударной волне детонационного комплекса. Исследование структуры этой зоны поэтому представляет также самостоятельную задачу, относящуюся к теории ударных волн в дисперсных средах (газ или жидкость с твердыми частицами). Структура ударных волн в таких системах в основном исследовалась применительно к слабым ударным волнам с протяженным вязким скачком уплотнения [16–18]. В отличие от этого здесь рассматривается сильная ударная волна, в которой вязкий скачок формируется раньше скоростной релаксации и может рассматриваться как разрыв, за которым происходит релаксация скоростей. При этом существенно, что малая удельная теплоемкость тяжелых примесных частиц позволяет исключить из рассмотрения кинетику теплообмена между компонентами и выяснить влияние релаксации скоростей на структуру ударной волны, не завуалированное другими релаксационными процессами.

В скачке уплотнения сильной ударной волны газовая компонента (идеальный газ) сжимается в

$$\theta \equiv \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

раз. Поскольку на этой стадии ударно-волнового сжатия скорость и плотность примесных частиц (масса частиц в единице объема смеси) остаются неизменными, степень полного сжатия равна  $\alpha\theta + \beta$ . После выравнивания скоростей полная степень сжатия составляет  $\theta$ . Характерными особенностями структуры зоны релаксации скоростей являются: 1) немонотонная зависимость скорости газа от скорости частиц и от времени пребывания частицы за скачком уплотнения (и соответственно, от расстояния, пройденного частицей за скачком уплотнения); немонотонность скорости выражена слабо, но существует при любых значениях показателя адиабаты  $\gamma$  и концентрации частиц  $\beta$ ; 2) обобщенная линия Михельсона–Рэлея  $v(p)$  — выпуклая кривая, асимптотически при  $t/\tau_v \gg 1$  переходящая в ПМР. В окрестности начала зоны релаксации скоростей линия  $v(p)$  имеет максимум (стадии сжатия предшествует небольшое расширение смеси). Пример расчета структуры приведен на рис. 7, 8.

В другом предельном случае, при  $K \gg 1$ , стадии релаксации скоростей и тепловыделения тоже разделены во времени. Но релаксация скоростей происходит в этом случае за зоной тепловыделения и формирует заключительную часть всей стационарной зоны детонационной волны (в заряде неограниченно-

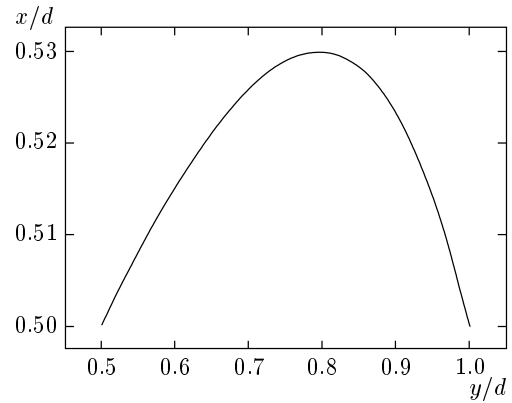


Рис. 7. Структура зоны релаксации скоростей двухфазного течения в сильной ударной волне: плоскость  $x, y$ ;  $\gamma = 3$

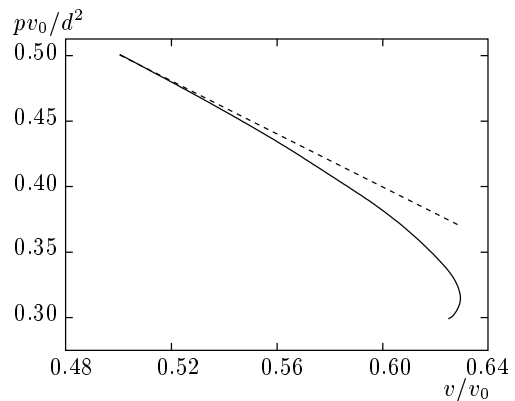


Рис. 8. Структура зоны релаксации скоростей двухфазного течения в сильной ударной волне: плоскость  $v, p$ ; штриховая линия — прямая Михельсона–Рэлея,  $\gamma = 3$

го диаметра). При этом связь между скоростями  $x$  и  $y$  определяется уравнением (10) с подстановкой в него  $q = q_0$ . В отличие от случая  $K \ll 1$  зависимости  $x(y)$  и  $p(v)$  на собственной интегральной кривой никаких аномалий не имеют: скорости  $x$  и  $y$  сближаются, изменяясь в противоположных направлениях ( $dx/dt \geq 0, dy/dt \leq 0; dp/dt \leq 0, dv/dt \geq 0$ , знак равенства относится к точке на равновесной детонационной адиабате).

### 8. ВЫВОДЫ

Дана физическая и математическая интерпретация принципа минимума для скорости самоподдерживающейся детонации с релаксирующими скоро-

стями двухфазного течения. Доказано, что формула классической теории детонации, выражающая скорость детонационной волны как функцию от теплоты взрыва, является точной не только в асимптотике малого отношения  $K$  характерных времен релаксации скоростей фаз и тепловыделения, но и в некотором конечном интервале  $\Delta K$ , примыкающем к этой асимптотике. При  $K \sim 1$  характерное время выравнивания скоростей фаз (время достижения точки пересечения кривых  $x(q)$ ,  $y(q)$ , см. рис. 6а) меньше времени  $\tau_U$ , входящего в релаксационное уравнение (15), поскольку при  $K \sim 1$  в процессе релаксации скорости фаз изменяются примерно с одинаковой интенсивностью во встречном направлении. Поэтому изменение режима детонации от нормального к недосжатому происходит при  $K \approx 2$ , а не при  $K \approx 1$  (см. рис. 5). Переходу к недосжатой детонации соответствует появление седловой особой точки на интегральной кривой, которая описывает структуру самоподдерживающейся детонационной волны на плоскости  $x, q$ . На плоскости  $y, q$  этой точке отвечает точка касания интегральной кривой  $y(q)$  границы вещественных значений  $x$  (скорости реагирующего ВВ) как функции от переменных  $y, q$  и параметра  $d$  (скорости детонационной волны) (рис. 4). Такое соответствие седловой особой точки и точки касания имеет место во всей области существования режима недосжатой детонации. При недосжатой детонации координата седла  $q^*$  совпадает с  $q_0$  только при  $K = \infty$ . Зависимость  $q^*(K)$  не монотонна: при возрастании  $K$  в диапазоне (27) величина  $q^*$  сначала уменьшается, а затем возрастает, асимптотически приближаясь к  $q_0$  согласно (35).

В случае  $K \ll 1$  исследованы характерные особенности структуры ударной волны, обусловленные релаксацией скоростей двухфазного течения.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Докажем, что вещественная интегральная кривая  $x = x(q)$ , граничащая с областью комплексных решений (10), (16), является сепаратрисой седловой особой точки.

Рассмотрим на отрезке

$$0 \leq q \leq q_0 \quad (\text{П.1})$$

интегральную кривую, удовлетворяющую определенным начальным данным, например,  $y = d|_{q=0}$ , являющуюся решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dq} = f_K(x, y, q), \quad (\text{П.2})$$

в котором  $x$  — корень<sup>3)</sup> уравнения

$$\varphi_d(x, y, q) = 0, \quad (\text{П.3})$$

где  $\varphi_d(x, y, q)$  — дифференцируемая функция с вещественными коэффициентами (параметрами),  $d$  — параметр. В качестве уравнения (П.2) выше фигурировало уравнение (16). Для дальнейшего рассмотрения конкретный вид функции  $f_K(x, y, q)$  не существен. Предполагается лишь, что это — вещественная непрерывная функция, содержащая параметр  $K$ , позволяющий варьировать величину производной  $dy/dq$  при фиксированных значениях аргументов в неограниченных пределах. Из двух переменных  $y$  и  $q$  в уравнении (П.3) независимой является только одна, поскольку на интегральной кривой

$$y = y(q). \quad (\text{П.4})$$

Запишем уравнение, получаемое при подстановке (П.4) в (П.3), следующим образом:

$$\Psi_{d,K}(x, q) = 0. \quad (\text{П.5})$$

Уравнением (П.5) определяется зависимость  $x$  от  $q$  на интегральной кривой при заданном значении параметров  $d$  и  $K$ . Предположим, что существует граничное значение  $d_K$  параметра  $d$ , такое, что по одну сторону от него (пусть, для определенности, при  $d > d_K$ ) корень уравнения (П.5) веществен во всем диапазоне (П.1), а по другую (при  $d < d_K$ ) в некотором поддиапазоне значений  $q$  из (П.1) корень уравнения комплексный. Вследствие вещественности коэффициентов уравнения (П.5) при переходе значений  $d$  через точку  $d_K$  исчезают два действительных корня (и появляются соответственно два комплексно-сопряженных). В самой точке  $d = d_K$  при некотором значении  $q = q_K$  оба корня сливаются в один (обозначим его  $x_K$ ) и функция  $\Psi_{d,K}(x, q)$  имеет экстремум<sup>4)</sup>:

$$\frac{d\Psi_{d,K}(x, q_K)}{dx} = 0.$$

В этой точке на плоскости  $q, y$  интегральная кривая касается граничной линии

$$D(y, q, d_K) = 0, \quad (\text{П.6})$$

разделяющей на плоскости  $d = d_K$  области вещественных и комплексных корней уравнения (П.3).

<sup>3)</sup> Если таких корней несколько, то имеется в виду один из них, выбранный однозначно из физических условий.

<sup>4)</sup> Обращение в нуль еще и второй производной в этой точке было бы невероятной случайностью.

Представляя функцию  $\Psi_{d,K}(x, q)$  в окрестности точки  $x_K, q_K$  параболой, имеем

$$\Psi_{d,K}(x, q) = a + b(x - x_K)^2, \quad (\text{П.7})$$

где коэффициенты  $a$  и  $b$  зависят от  $q$  и  $d$ . При  $d = d_K$  и  $q = q_K$

$$a = 0, \quad b = b_0 \neq 0.$$

В окрестности точки  $d_K, q_K$  с точностью до членов более высокого порядка малости

$$a = -\alpha_K(d - d_K) - \beta_K(q - q_K)^2, \quad b = b_0, \quad (\text{П.8})$$

где  $\alpha_K$  и  $\beta_K$  — постоянные, знак которых совпадает со знаком  $b_0$ . Разложение (П.8) следует из указанных выше условий существования действительных корней уравнения (П.5).

Из (П.5), (П.7) и (П.8) следует

$$x = x_K \pm \sqrt{-\frac{a}{b_0}}, \quad \frac{dx}{dq} = \pm \frac{da}{dq} \frac{1}{2\sqrt{-ab_0}}.$$

Отсюда, согласно (П.8), при  $d = d_K$  имеем

$$x = x_K \pm \sqrt{\frac{\beta_K}{b_0}}(q - q_K), \quad \frac{dx}{dq} = \pm \sqrt{\frac{\beta_K}{b_0}}. \quad (\text{П.9})$$

Покажем теперь, что на плоскости переменных  $q, x$  точка  $x_K, q_K$  является седловой особой точкой уравнений (16), (П.3) при  $d = d_K$  и, следовательно, интегральная кривая

$$x = f_K(q), \quad (\text{П.10})$$

проходящая через эту точку, — сепаратриса семейства интегральных кривых этих уравнений. (При этом первым уравнением (П.9) представлены отрезки двух сепаратрис.) Для этого рассмотрим, как ведут себя в окрестности точки  $x_K, q_K$  любые две интегральные кривые, сколько угодно близкие по начальным данным к интегральной кривой (П.10), но расположенные с разных сторон от нее, т. е. удовлетворяющие начальным данным

$$y_0 = d_K \pm \delta|_{q=0}, \quad (\text{П.11})$$

где  $\delta$  — сколь угодно малая положительная величина.

Так как собственная интегральная кривая касается границы вещественных корней (П.6), то в окрестности точки касания  $q_K, y_K$  одна из рассматриваемых соседних интегральных кривых дважды пересекает границу (П.6), а вторая не имеет общих точек с этой границей, т. е. корень  $x$  уравнения (П.5)

на второй интегральной кривой всюду в окрестности точки  $q_K, y_K$  веществен.

Для этих двух интегральных кривых так же, как сделано выше для собственной интегральной кривой (т. е. при  $\delta = 0$ ), введем в рассмотрение функцию (П.5) и ее представление в виде параболы (П.7). При этом все параметры параболы сдвигаются на малые величины, пропорциональные  $\delta$ :

$$a \rightarrow a_1 \equiv a \pm \lambda_a \delta, \quad b \rightarrow b_1 \equiv b \pm \lambda_b \delta,$$

$$x_K \rightarrow x_{K1} \equiv x_K \pm \lambda_K \delta,$$

где  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_K$  — некоторые постоянные коэффициенты. Соответственно, вместо (П.9) теперь с точностью до величин более высокого порядка малости имеем

$$\begin{aligned} x &= x_{K1} \pm \sqrt{\frac{\beta_K(q - q_K)^2 + \Delta_1}{b_0}}, \\ \frac{dx}{dq} &= \pm \sqrt{\frac{\beta_K}{b_0}} \frac{q - q_K}{\sqrt{(q - q_K)^2 + \Delta_1/\beta_K}}, \\ \Delta_1 &\equiv \pm \lambda_a \delta. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Из (П.12) следует, что на плоскости  $q, x$  интегральные кривые в окрестности точки  $q = q_K$  качественно меняются при изменении знака  $\Delta_1/\beta_K$ : при  $\Delta_1/\beta_K > 0$  они проходят при  $q = q_K$  через изоклину нулей, а при  $\Delta_1/\beta_K < 0$  в точках  $q = q_K \pm \sqrt{-\Delta_1/\beta_K}$  они упираются в изоклину бесконечностей. Легко убедиться в том, что четыре «подсемейства» интегральных кривых, соответствующих двум знакам перед квадратным корнем в (П.12) и двум знакам  $\Delta_1$ , образуют вместе с сепаратрисами (П.9) характерный узор седла с особой точкой  $q_K, x_K$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим границу действительных решений в задаче о структуре волны.

Решая квадратное уравнение (10) относительно  $x$ , получаем:

$$x = \frac{Sd - S\beta y + \sqrt{Z(y, q, d)}}{(2S - 1)\alpha}, \quad (\text{П.13})$$

где  $Z(y, q, d)$  — детерминант, явное выражение которого можно представить в виде

$$\begin{aligned} Z(y, q, d) &= (S^2 - 2S\alpha + \alpha)d^2 + \beta(S^2\beta + 2S\alpha - \alpha) \times \\ &\times y^2 - 2S^2\beta dy + 2\alpha^2(1 - 2S)q. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Подстановка (П.14) в уравнение (19) и его решение относительно  $d$  дает после ряда несложных преобразований следующее явное выражение функции  $F(y, q)$  при  $d \geq 0$ :

$$F(y, q) = \frac{1}{E} \times \left[ S^2 \beta y + \alpha \sqrt{(2S-1)(2Eq - Ly^2)} \right], \quad (\text{П.15})$$

где введены обозначения

$$E = S^2 - 2S\alpha + \alpha, \quad L = (S-1)^2 \beta.$$

Коэффициенты  $E$  и  $L$  положительны. Положительность  $E$  видна из тождественного преобразования

$$E = S^2 - 2S\alpha + \alpha = (S-\alpha)^2 + \alpha\beta.$$

Докажем, что  $Z(y, q, d)$  при фиксированных значениях  $y$  и  $q$  — возрастающая функция от  $d$ . Для этого достаточно показать, что частная производная от  $Z$  по  $d$  положительна. Результат дифференцирования с учетом нормировки  $\alpha + \beta = 1$  можно представить в виде

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial Z}{\partial d} \right)_{y,q} = (S-1)^2 \alpha d + S^2 \beta (d-y). \quad (\text{П.16})$$

Положительность правой части (П.16) очевидна, так как по условию задачи  $d > 0, y \leq d, \alpha \geq 0$ .

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Докажем независимость скорости детонации от  $K$  при малых  $K$ .

При тождественной замене переменной  $y \equiv x + \Delta$  уравнение (10) принимает вид

$$\frac{d^2}{2} = [d - (\beta\Delta + x)] Sx - \alpha q + \frac{x^2}{2} + \beta \frac{\Delta^2}{2} + \beta x \Delta. \quad (\text{П.17})$$

(Напомним, что тепловыделение  $q$  — монотонная функция времени, см. (14).) При малых значениях  $K$  и, соответственно, при  $-\Delta/x \ll 1$  уравнение (П.17) с точностью до членов более высокого порядка малости по  $-\Delta/x$  преобразуется к виду

$$\frac{d^2}{2} = Sdx - (S-1)\beta x_e \Delta - \alpha q - \left( S - \frac{1}{2} \right) x^2. \quad (\text{П.18})$$

Введем в рассмотрение функцию тепловыделения

$$q_1 \equiv q + \frac{1}{\alpha} (S-1)\beta x_e \Delta = q_0 \left[ Q + 2K \left( 1 - Q - \gamma \sqrt{1-Q} \right) \right]. \quad (\text{П.19})$$

В правой части равенства (П.19)  $x_e$  и  $\Delta$  выражены в виде (32), (33) и введено обозначение  $Q = q/q_0$ . Функция  $q_1$  при малых  $K$  монотонно возрастает со временем и так же, как  $q$ , имеет максимальное значение  $q_0$ . (Поскольку  $\gamma > 1$ , для монотонности  $q_1$  во всем диапазоне изменения  $Q$  от 0 до 1 достаточно условия  $K \leq 3/2$ ).

Уравнение (П.18) преобразуется с помощью тождества (П.19) в уравнение классической теории детонации с монотонной функцией тепловыделения  $q_1$ :

$$\frac{d^2}{2} = Sdx - \alpha q_1 - (S-1/2)x^2. \quad (\text{П.20})$$

При любых достаточно малых значениях  $K$ , при которых функция тепловыделения  $q_1$  монотонна и имеет, соответственно, независящее от  $K$  максимальное значение равное  $q_0$ , из (П.20) следует один и тот же результат (25) для минимальной скорости детонации.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Выведем асимптотическую формулу (35). Правая часть равенства (30) выражает производную  $dy/dq$  вдоль линии (29), т.е. вдоль направления, в котором  $dF(y, q) = 0$ . Дифференцирование (П.15) вдоль этого направления дает

$$\frac{dy}{dq} = - \frac{\Lambda E}{S^2 \beta \sqrt{2Eq - Ly^2} - \Lambda Ly}, \quad (\text{П.21})$$

$$\Lambda \equiv \alpha \sqrt{2S-1}.$$

При  $K \gg 1$  все величины в правой части (П.21) слабо зависят от  $K$  и близки к своим асимптотическим значениям, отвечающим  $K = \infty$ :

$$q = q_0, \quad y = d_\infty, \quad (\text{П.22})$$

где  $d_\infty$  определено формулой (34). При таких значениях  $q$  и  $y$  после несложных преобразований с учетом (34) и равенств

$$\alpha + \beta = 1, \quad S = \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

находим

$$2Eq - Ly^2 = \frac{2q_0}{(\gamma-1)^2}, \quad (\text{П.23})$$

$$\Lambda Ly = \sqrt{2q_0} \alpha \beta \frac{\gamma+1}{(\gamma-1)^2}.$$

Левая часть равенства (30) выражает производную  $dy/dq$  вдоль интегральной кривой. Эта производная

удовлетворяет уравнению (16), в котором скорость газа  $x$  при выполнении равенств (П.22) связана с  $d_\infty$  соотношением

$$x = \gamma \frac{d_\infty}{\gamma + 1}.$$

(Оно аналогично известному в теории нормальной детонации соотношению между скоростью газа и скоростью детонационной волны и может быть получено из уравнения (10).) При этом

$$y - x = \frac{d_\infty}{\gamma + 1}.$$

В итоге для производной вдоль интегральной кривой имеем

$$\frac{dy}{dq} = -\frac{d_\infty}{K(\gamma + 1)(q_0 - q)}. \quad (\text{П.24})$$

Приравнявая в соответствии с (30) производные (П.21) и (П.24) и учитывая (П.23), получаем (35) (см. разд. 5). Вследствие использования при выводе (35) асимптотических формул (П.23), (П.24) полученный результат верен с точностью до  $O[(Q^* - 1)^2]$ , или, что то же самое, до  $O(1/K^2)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. E. Youguet, *J. Mathem.* **6**, 5 (1904).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, Москва (1954).
3. Я. Б. Зельдович, С. Б. Ратнер, *ЖЭТФ* **11**, 170 (1941).
4. Я. Б. Зельдович, А. С. Компанец, *Теория детонации*, Гостехиздат, Москва (1955).
5. Н. М. Кузнецов, *ЖЭТФ* **52**, 309 (1967).
6. А. Н. Дремин, С. Д. Савров, В. С. Трофимов, К. К. Шведов, *Детонационные волны в конденсированных средах*, Наука, Москва (1970).
7. Л. В. Альтшулер, В. Т. Рязанов, М. П. Сперанская, *ЖПМТФ* № 1, 122 (1972).
8. Н. М. Кузнецов, *Хим. физика* **16**, 85 (1997).
9. Н. М. Кузнецов, *Хим. физика* **17**, 62 (1998).
10. О. Н. Давыдова, Н. М. Кузнецов, В. В. Лавров, К. К. Шведов, *Хим. физика* **18**, 53 (1999).
11. Л. В. Альтшулер, В. С. Жученко, И. С. Меньшов, *Ударные волны в конденсированных средах: тез. докл. СПб.* (1998), с. 116.
12. А. И. Ивандаев, А. Г. Кутушев, Р. И. Нигматулин, *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа*, ВИНТИ, Москва **16**, 209 (1981).
13. А. Б. Гагиев, Н. М. Кузнецов, *Современные вопросы гидродинамики, аэрофизики и прикладной механики*, Изд-во МФТИ, Москва (1986), с. 15.
14. Н. М. Кузнецов, К. К. Шведов, *Хим. физика* **18**, 82 (1999).
15. A. N. Dremin, *Towards Detonation Theory*, Springer, New York (1999).
16. С. П. Дьяков, *ЖЭТФ* **27**, 283 (1954).
17. Г. М. Арутюнян, *ДАН СССР* **185**, 778 (1969).
18. Р. И. Нигматулин, *Динамика многофазных сред, часть II*. Наука, Москва (1987).