

АКУСТИЧЕСКАЯ САМОИНДУЦИРОВАННАЯ ПРОЗРАЧНОСТЬ В РЕЖИМЕ ДЛИННО-КОРОТКОВОЛНОВОГО РЕЗОНАНСА

*С. В. Воронков, С. В. Сазонов**

*Калининградский государственный технический университет
236000, Калининград, Россия*

Поступила в редакцию 29 января 2001 г.

Теоретически исследован эффект акустической самоиндуцированной прозрачности для продольно-поперечных импульсов, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю в системе резонансных парамагнитных примесей с эффективным спином $S = 1/2$. При этом коротковолновая поперечная компонента импульса вызывает квантовые переходы, а длинноволновая продольная составляющая осуществляет динамический сдвиг частоты данных переходов. В случае близости скоростей продольных и поперечных звуковых волн в кристаллической матрице обе компоненты взаимодействуют между собой в режиме длинно-коротковолнового резонанса, что описывается системой нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Показано, что данное взаимодействие приводит, в частности, к модуляции несущей частоты циркулярно-поляризованной поперечной составляющей импульса: вблизи максимума сигнала частота ниже, чем у его краев. Аналитически и численно проанализированы решения в виде бегущих 2π -импульсов, среди которых имеются не сводящиеся к известным поперечным солитонам уравнения синус-Гордона и необходимым образом содержащие продольную компоненту.

PACS: 42.50.Md, 43.25.+y

1. ВВЕДЕНИЕ

Вслед за обнаружением оптической самоиндуцированной прозрачности [1] (СИП) увенчались успехом экспериментальные [2, 3] и теоретические [2, 4] поиски соответствующего акустического резонансного эффекта (АСИП) в низкотемпературных ($T \approx 4$ К) кристаллических образцах, содержащих парамагнитные примеси. Так, в работах [2, 3] АСИП исследована на примесях Fe^{2+} , имеющих эффективный спин $S = 1$ и внедренных соответственно в кристаллические матрицы MgO и LiNbO_3 , при распространении продольного микросекундного акустического импульса под углом к внешнему магнитному полю \mathbf{B} . В [4] проведено теоретическое рассмотрение АСИП для поперечного импульса, распространяющегося параллельно \mathbf{B} в системе спинов $S = 1/2$.

В общем случае практически независимое распространение продольной и поперечной компонент акустического импульса в твердом теле обеспечива-

ется значительной отстройкой их линейных скоростей a_{\parallel} и a_{\perp} . Для большинства кристаллов такая ситуация действительно имеет место [5]. Однако если в упругоизотропном кристалле (скорость продольной и поперечной составляющих упругого поля не зависит от направления) для компонент тензора упругих постоянных выполняется соотношение Коши [6], то скорости продольных a_{\parallel} и поперечных a_{\perp} звуковых волн равны друг другу. Данные условия лучше всего выполняются для ионных кристаллов галогенидов щелочных металлов [6], силы взаимодействия между атомами которых являются центральными [7]. Одним из представителей данной группы кристаллов является NaBr [6].

При распространении в кристалле обе компоненты акустического импульса взаимодействуют с квантовыми парамагнитными примесями, посредством которых при близости значений a_{\parallel} и a_{\perp} между данными компонентами может осуществляться весьма эффективное нелинейное взаимодействие. Последнее может существенным образом влиять на резонансное возбуждение акустическим полем парамагнитных ионов, что сказывается на проявлениях осо-

*E-mail: nst@alg.kaliningrad.ru

бенностей АСИП, не обсуждавшихся ранее и рассмотренных в разд. 4 настоящей статьи.

В работе [8] исследованы солитоноподобные режимы распространения вдоль \mathbf{B} продольно-поперечных акустических импульсов в условиях слабого возбуждения (спектр импульса не перекрывает квантовые переходы) парамагнитных примесей с эффективным спином $S = 1$. Найденная в [8] система связанных уравнений для продольной и поперечной компонент упругого импульса со слабой (степенной) нелинейностью описывает квазисолитонную динамику в режиме длинно-коротковолнового резонанса при условии неприменимости стандартного для квазимонохроматических импульсов приближения медленно меняющихся амплитуд и фаз (ММАФ). Роль длинноволновой составляющей упругого поля играет продольная компонента акустического импульса, роль коротковолновой — поперечная. При использовании ММАФ данная система принимает вид систем длинно-коротковолнового резонанса типа уравнений Захарова [9] и уравнений Ядзимы–Ойкавы [10].

В настоящей работе рассматривается АСИП для квазимонохроматических акустических импульсов с продольно-поперечной структурой, распространяющихся параллельно \mathbf{B} в системе парамагнитных примесей с эффективным спином $S = 1/2$ в условиях длинно-коротковолнового резонанса ($a_{\parallel} \approx a_{\perp}$). При этом частота поперечной компоненты квазимонохроматического импульса ω совпадает с частотой ω_0 зеемановского расщепления крамерсовского дублета.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 на основе полуклассического подхода выводятся самосогласованные волновые и материальные уравнения, описывающие нелинейную динамику продольно-поперечных акустических импульсов, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю в системе парамагнитных примесей. В разд. 3 предлагается асимптотический метод решения материальных уравнений в пренебрежении неоднородным уширением, на этой основе выводится система уравнений длинно-коротковолнового резонанса в режиме сильной нелинейности. В следующем разделе проводится аналитический и численный анализ решений данной системы в виде стационарных бегущих импульсов и отмечаются основные особенности акустической самоиндуцированной прозрачности для продольно-поперечных солитонов. В заключении подведены основные итоги настоящей работы, а также обозначены проблемы в данной области, решение которых, по мнению авторов, представляет интерес.

2. САМОСОГЛАСОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Гамильтониан зеемановского взаимодействия α -го магнитного момента $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(\alpha)}$ с магнитным полем \mathbf{B} имеет вид $\hat{H}_{\alpha}^z = -\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{B}$. В свою очередь компоненты $\hat{\mu}_j^{(\alpha)}$ ($j = x, y, z$) векторного оператора $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(\alpha)}$ связаны с соответствующими компонентами спина $\hat{\mathbf{S}}^{(\alpha)} \equiv \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_{\alpha})$ (\mathbf{r}_{α} — радиус вектор α -го спина) гиромагнитным соотношением $\hat{\mu}_j^{(\alpha)} = -\sum_k \mu_B g_{jk} \hat{S}_k^{(\alpha)}$, где μ_B — магнетон Бора, g_{jk} — компоненты тензора Ланде $\hat{\mathbf{g}}$. Тогда

$$\hat{H}^z = \sum_{\alpha=1}^N \hat{H}_{\alpha}^z = \mu_B \sum_{\alpha} \sum_{j,k} B_j g_{jk} \hat{S}_k^{\alpha}. \quad (1)$$

Здесь N — общее число спинов. В базисе собственных функций оператора \hat{S}_z^{α} компоненты спина $S = 1/2$ выражаются через матрицы Паули следующим образом:

$$\hat{S}_x^{\alpha} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y^{\alpha} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\hat{S}_z^{\alpha} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Направим координаты x, y, z вдоль главных осей тензора Ланде, совпадающих с осями симметрии кристалла. Тогда в отсутствие деформаций $\hat{\mathbf{g}}$ -тензор имеет диагональный вид: $g_{jk} = g_{jk}^{(0)} = g_{jj} \delta_{jk}$ (δ_{jk} — символ Кронекера). Акустическая волна, распространяясь в кристалле, деформирует компоненты тензора Ланде:

$$g_{jk} = g_{jk}^{(0)} + \sum_{p,q} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \right)_0 \mathcal{E}_{pq} + \dots, \quad (3)$$

где \mathcal{E}_{pq} — тензор упругих деформаций кристалла в месте расположения парамагнитного иона, связанный с компонентами его смещений $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ соотношением

$$\mathcal{E}_{pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_p}{\partial x_q} + \frac{\partial U_q}{\partial x_p} \right).$$

(Нижний индекс «0» слагаемых под знаком суммы обозначает взятие производных при $\mathcal{E}_{pq} = 0$.)

Следовательно, гамильтониан \hat{H}^z можно представить в виде суммы

$$\hat{H}^z = \hat{H}_s + \hat{H}_{int}, \quad (4)$$

где гамильтонианы спиновой подсистемы и спин-фононного взаимодействия имеют вид

$$\hat{H}_s = \sum_{\alpha} \sum_j \mu_B g_{jj} B_j \hat{S}_j^{(\alpha)}, \quad (5)$$

$$\hat{H}_{int} = \sum_{\alpha} \sum_{j,k,p,q} \mu_B B_j F_{jkpq} \mathcal{E}_{pq} \hat{S}_k^{(\alpha)}. \quad (6)$$

Здесь $F_{jkpq} \equiv (\partial g_{jk} / \partial \mathcal{E}_{pq})_0$ — постоянные спин-фононной связи [11, 12].

Гамильтонианы (5) и (6) дополним гамильтонианом акустического поля

$$H_a = \int \left(\frac{1}{2\rho} \sum_j p_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l,m} \lambda_{jklm} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) d^3 \mathbf{r}, \quad (7)$$

где ρ — средняя плотность кристалла, p_j ($j = x, y, z$) — компоненты плотности импульса, возникающие при динамических смещениях, λ_{jklm} — тензор модулей упругости кристалла [13]. Интегрирование в (7) ведется по всему кристаллическому объему. Здесь, следуя [8], применяется полуклассический подход, при котором динамика спинов описывается квантовомеханически, а поле упругого импульса — классическим образом. По этой причине гамильтониан (7), в отличие от (5) и (6), представляет собой не оператор, а C -числовой функционал.

С микроскопической точки зрения спин-фононная связь в случае $S = 1/2$ возникает за счет модуляции упругим полем спин-орбитального взаимодействия в условиях «замораживания» орбитального момента [14]. В системах с высшими спинами доминирующий вклад в спин-фононное взаимодействие вносят квадратичные по спиновым операторам члены $\sim \hat{S}_j \hat{S}_k + \hat{S}_k \hat{S}_j$, соответствующие механизмам Валлера и Ван-Флека [12, 14]. Для $S = 1/2$ эти слагаемые исчезают [11, 14] из-за антикоммутиативного свойства операторов Паули.

Согласно правилам полуклассического подхода [8, 15], для эволюции оператора плотности $\hat{\rho}^{(\alpha)}$ α -го спина справедливо уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}^{(\alpha)}}{\partial t} = [\hat{H}^z, \hat{\rho}^{(\alpha)}], \quad (8)$$

где $\hat{\rho}^{(\alpha)}$ представляется в виде

$$\hat{\rho}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \rho_{22} & \rho_{21} \\ \rho_{12} & \rho_{11} \end{pmatrix},$$

в то время как поле упругого импульса подчиняется классическим уравнениям Гамильтона для сплошной среды:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{p}}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \mathbf{U}}, \quad (9)$$

где $H = H_a + \langle \hat{H}_{int} \rangle$, $\langle \dots \rangle$ — операция квантовомеханического усреднения. Используя (9), классический гамильтониан взаимодействия $\langle \hat{H}_{int} \rangle$ удобно представить в виде

$$\langle \hat{H}_{int} \rangle = \sum_{j,k,p,q} \int \mu_B n B_j F_{jkpq} \mathcal{E}_{pq}(\mathbf{r}) \langle \hat{S}_k(\mathbf{r}) \rangle d^3 \mathbf{r}. \quad (10)$$

Здесь $n = \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha})$ — концентрация парамагнитных ионов, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha})$ — дельта-функция Дирака.

Пусть продольно-поперечный акустический импульс распространяется в кубическом кристалле параллельно \mathbf{V} и одной из осей симметрии четвертого порядка, совпадающей с осью z . Рассмотрим одномерный случай, когда все динамические переменные зависят только от z и t . Преобразованиями симметрии в этом случае являются поворот на 90° вокруг оси z ($x \rightarrow y, y \rightarrow -x, z \rightarrow z$), а также отражения $x \rightarrow -x$, и $y \rightarrow -y$. Принимая во внимание аксиальный характер векторов \mathbf{V} и \mathbf{S} (при инверсии одной из координатных осей соответствующие компоненты \mathbf{V} и \mathbf{S} остаются неизменными, а две другие меняют знак на противоположный), перепишем при рассматриваемых условиях выражения для \hat{H}_s и \hat{H}_{int} в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}_s &= \sum_{\alpha} \hbar \omega_0 \hat{S}_z^{(\alpha)}, \\ \hat{H}_{int} &= \sum_{\alpha} \frac{\hbar \omega_0}{g} \times \\ &\times \left\{ F_{11} \mathcal{E}_{zz} \hat{S}_z^{(\alpha)} + F_{44} (\mathcal{E}_{xz} \hat{S}_x^{(\alpha)} + \mathcal{E}_{yz} \hat{S}_y^{(\alpha)}) \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\omega_0 = g \mu_B B / \hbar$ — частота зеемановского расщепления крамеровского дублета, $g = g_{xx} = g_{yy} = g_{zz}$, \hbar — постоянная Планка.

При указанных предположениях гамильтониан H_a принимает вид

$$\begin{aligned} H_a &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{\rho} + \lambda_{11} \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \lambda_{44} \left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} d^3 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (12)$$

В (10) и (11) для индексов тензоров четвертого порядка приняты обозначения Фохта: $xx \rightarrow 1, yy \rightarrow 2, zz \rightarrow 3, yz \rightarrow 4, xz \rightarrow 5, xy \rightarrow 6$.

Из (8)–(12) и (2) получим

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\perp}}{\partial t^2} - a_{\perp}^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\perp}}{\partial z^2} = \frac{n G_{\perp}}{\rho} \frac{\partial^2 S_{\perp}}{\partial z^2}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\parallel}}{\partial t^2} - a_{\parallel}^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\parallel}}{\partial z^2} = \frac{n G_{\parallel}}{2\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial S_{\perp}}{\partial t} = i \left(\omega_0 + \frac{G_{\parallel} \mathcal{E}_{\parallel}}{\hbar} \right) S_{\perp} - i \frac{G_{\perp} \mathcal{E}_{\perp}}{\hbar} W, \quad (15)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\text{Im} \left(\frac{G_{\perp} \mathcal{E}_{\perp}}{\hbar} S_{\perp}^* \right), \quad (16)$$

где $G_{\parallel} = \hbar \omega_0 F_{11}/g$, $G_{\perp} = \hbar \omega_0 F_{44}/g$, $\mathcal{E}_{\parallel} = \mathcal{E}_{zz}$, $\mathcal{E}_{\perp} = \mathcal{E}_{xz} + i\mathcal{E}_{yz}$, $a_{\parallel} = \sqrt{\lambda_{11}/\rho}$, $a_{\perp} = \sqrt{\lambda_{44}/\rho}$ — скорости соответственно продольных и поперечных звуковых волн, $W = (\rho_{22} - \rho_{11})/2$ — инверсия населенностей в системе крамерсовских дублетов, S_{\perp} выражается через поперечные компоненты вектора Блоха $U = (\rho_{21} + \rho_{12})/2$ и $V = (\rho_{21} - \rho_{12})/2i$ как $S_{\perp} = U + iV = \rho_{21}$.

Из материальных уравнений типа уравнений Блоха (15), (16) следует, что поперечная компонента деформации при распространении импульса в геометрии Фарадея вызывает квантовые переходы внутри зеемановского дублета, а продольная вызывает динамический сдвиг частоты данных переходов.

Система уравнений (13)–(16) описывает самосогласованную динамику парамагнитных примесей и акустических импульсов при распространении последних вдоль оси четвертого порядка кубического кристалла, параллельно внешнему магнитному полю.

3. УРАВНЕНИЯ САМОИНДУЦИРОВАННОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ ДЛЯ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Пусть циркулярно-поляризованная поперечная компонента акустического поля представляет собой квазимонохроматический импульс длительностью τ_p с частотой заполнения ω , так что $\omega \tau_p \gg 1$. Тогда данная компонента представима в виде

$$\frac{G_{\perp} \mathcal{E}_{\perp}}{\hbar} = \Omega_{\perp} \exp[i(\omega t - kz)], \quad (17)$$

где k — волновое число, а $\Omega_{\perp}(z, t)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда:

$$\left| \frac{\partial \Omega_{\perp}}{\partial t} \right| \ll \omega |\Omega_{\perp}|, \quad \left| \frac{\partial \Omega_{\perp}}{\partial z} \right| \ll k |\Omega_{\perp}|. \quad (18)$$

В материальных же уравнениях перейдем к представлению вращающейся волны:

$$S_{\perp} = R \exp[i(\omega t - kz)]. \quad (19)$$

Подставляя (17) и (19) в (13), (15), (16), пренебрегая при этом вследствие (18) вторыми производными от Ω_{\perp} (т. е. используя ММАФ), а также считая, что $k = \omega/a_{\perp}$, получим

$$\frac{\partial \Omega_{\perp}}{\partial t} + a_{\perp} \frac{\partial \Omega_{\perp}}{\partial z} = i \frac{n G_{\perp}^2 \omega}{8 \hbar \rho a_{\perp}^2} R, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &= i(\Delta + \Omega_{\parallel})R - i\Omega_{\perp}W, \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\text{Im}(\Omega_{\perp}R^*), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\Delta = \omega_0 - \omega$ — отстройка несущей частоты импульса от резонансной частоты квантового перехода, $\Omega_{\parallel} = G_{\parallel} \mathcal{E}_{\parallel}/\hbar$.

Продольная компонента акустического импульса по-прежнему описывается уравнением (14).

Решения материальных уравнений (21) будем искать при условии точного резонанса ($\Delta = 0$). Существование неоднородного уширения, вообще говоря, нарушает данное условие. Полагая $\Delta \sim 1/T_2^*$ (T_2^* — время обратимой релаксации в системе зеемановских дублетов за счет неоднородного уширения), из (21) найдем, что при условиях $T_2^*/\tau_p \sim \Omega_{\parallel} T_2^* \sim |\Omega_{\perp}| T_2^* \gg 1$ неоднородным уширением можно пренебречь и положить в (21) $\Delta = 0$. Взяв [2, 12] $T_2^* \sim 10^{-8}$ с, найдем $\tau_p \sim 10^{-9}$ с, $\Omega_{\parallel}, |\Omega_{\perp}| \sim 10^9$ с⁻¹. С другой стороны, $\Omega_{\parallel}, |\Omega_{\perp}| \sim \omega_0 F \mathcal{E}$, где F и \mathcal{E} — некоторые средние значения константы спин-фононного взаимодействия и относительной деформации. Полагая $\omega_0 \sim 10^{11}$ – 10^{12} с⁻¹, $F \sim 10$ – 10^2 [11, 12], находим $\mathcal{E} \sim 10^{-4}$, что соответствует интенсивности акустических импульсов $I \approx \rho a^3 \mathcal{E}^2 \approx 10$ – 10^2 Вт/см² (здесь принято $\rho \sim 2$ г/см³, $a \sim 3 \cdot 10^5$ см/с).

Для решения при отмеченных условиях системы (21) последнюю удобно переписать в матричной форме

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = i \hat{A} \mathbf{Y}, \quad (22)$$

где

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} R \\ R^* \\ W \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \Omega_{\parallel} & 0 & -\Omega_{\perp} \\ 0 & -\Omega_{\parallel} & \Omega_{\perp}^* \\ -\Omega_{\perp}^*/2 & \Omega_{\perp}/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значения компонент вектора \mathbf{Y} ограничены: $0 \leq |R|^2, |W| \leq 1/2$. Поэтому, как видно из (22), с уменьшением длительности импульсного воздействия растут ненулевые компоненты матрицы \hat{A} (в пределе $\Omega_{\parallel}, |\Omega_{\perp}| \rightarrow \infty$ при $\tau_p \rightarrow 0$). Тогда компоненты \hat{A} являются большими динамическими параметрами и здесь, следовательно, применим метод Вентцеля–Бриллюэна–Крамерса–Джеффри

(WBKJ) [16]. Из (23) видно, что в нашем случае матрица $\hat{A}(t)$ не коммутирует сама с собой в разные моменты времени, т.е. $[\hat{A}(t), \hat{A}(t')] \neq 0$, поэтому решение (22) может быть символически записано в виде хронологической экспоненты. Однако в пределе $t \rightarrow t_0$, $\|\hat{A}\| \rightarrow \infty$ ($\|\dots\|$ — норма оператора) элементы \hat{A} за время $\Delta t = t - t_0$ не успевают заметно измениться. Следовательно, при $\Delta t \rightarrow 0$, $\|\hat{A}\| \rightarrow \infty$ имеем $[\hat{A}(t), \hat{A}(t')] \rightarrow 0$ и

$$\mathbf{Y}(t) = \hat{U}(t, t_0)\mathbf{Y}(t_0), \quad (24)$$

где оператор эволюции [17]

$$\hat{U}(t, t_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ \|\hat{A}\| \rightarrow \infty}} \exp\left(i \int_{t_0}^t \hat{A}(t') dt'\right). \quad (25)$$

При условии, что все собственные значения λ_j ($j = 1, \dots, N$) матрицы

$$\hat{\theta} \equiv \int_{t_0}^t \hat{A}(t') dt'$$

различны, для вычисления экспоненты в (25) можно воспользоваться, например, формулой Сильвестра [18, 19]

$$e^{i\hat{\theta}} = \sum_j \prod_{k \neq j} \frac{\hat{\theta} - \lambda_k \hat{I}}{\lambda_j - \lambda_k} e^{i\lambda_j}, \quad (26)$$

где \hat{I} — единичная матрица.

Собственные значения λ матрицы $\hat{\theta}$ находятся из уравнения

$$\det(\theta_{jk} - \lambda \delta_{jk}) = 0. \quad (27)$$

Элементы θ_{jk} матрицы $\hat{\theta}$ выражаются через соответствующие элементы матрицы \hat{A} как

$$\theta_{jk} = \int_{t_0}^t A_{jk} dt' \approx A_{jk} \Delta t$$

(при $\Delta t \rightarrow 0$). Полагая, кроме того, в (27)

$$\lambda \approx p \Delta t \approx \int_{t_0}^t p dt',$$

для матрицы \hat{A} размерности $N \times N$ получим

$$\begin{aligned} \det(\theta_{jk} - \lambda \delta_{jk}) &\approx \det(A_{jk} \Delta t - p \delta_{jk} \Delta t) = \\ &= (\Delta t)^N \det(A_{jk} - p \delta_{jk}) = 0. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее уравнение с (27), приходим к выводу, что если $\{\lambda_j\}$ — множество собственных значений матрицы

$$\hat{\theta} = \int_{t_0}^t \hat{A} dt',$$

то в пределе $t \rightarrow t_0$, $\|\hat{A}\| \rightarrow \infty$ собственные значения матрицы \hat{A} образуются множеством $\{p_j\}$, причем

$$\{\lambda_j\} = \left\{ \int_{t_0}^t p_j dt' \right\}.$$

Полагая в (26)

$$\hat{\theta} \approx \hat{A} \Delta t, \quad \lambda_j \approx p_j \Delta t \approx \int_{t_0}^t p_j dt'$$

и используя (25), найдем оператор эволюции

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_{j=1}^N \exp\left(i \int_{t_0}^t p_j dt'\right) \prod_{k \neq j} \frac{\hat{A} - p_k \hat{I}}{p_j - p_k}. \quad (28)$$

Таким образом, выражениями (24) и (28) определяется решение системы (22) произвольной размерности N при условиях справедливости WBKJ-приближения: $\Delta t \rightarrow 0$, $\|\hat{A}\| \rightarrow \infty$.

В нашем случае $N = 3$ и, как видно из (23),

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -p_3 = \sqrt{\Omega_{\parallel}^2 + |\Omega_{\perp}|^2}.$$

Физически предел $\Delta t \rightarrow 0$ означает $\tau_p/T_2^* \ll 1$ (см. выше), т.е. соответствует пренебрежению неоднородным уширением. В этом случае оператор эволюции для системы (22) (или (21) при $\Delta = 0$) запишется в виде

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{I} - 2 \frac{\hat{A}^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + i \frac{\hat{A}}{\Omega} \sin \theta, \quad (29)$$

где

$$\Omega = \sqrt{\Omega_{\parallel}^2 + |\Omega_{\perp}|^2}, \quad \theta = \int_{t_0}^t \Omega dt'. \quad (30)$$

Полагая формально $t_0 \rightarrow -\infty$ и учитывая, что $\mathbf{Y}^\dagger(-\infty) = (0, 0, W_\infty)$, из выражений (29), (30) и (24) получим

$$R = -iW_\infty \frac{\Omega_{\perp}}{\Omega} \sin \theta + 2W_\infty \frac{\Omega_{\parallel} \Omega_{\perp}}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (31)$$

$$W = W_\infty \left(1 - 2 \frac{|\Omega_{\perp}|^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (32)$$

Непосредственная подстановка (31) и (32) в (21) при $\Delta = 0$ показывает, что решения (31), (32) справедливы, если пренебречь производными от Ω_{\perp}/Ω и $\Omega_{\parallel}\Omega_{\perp}/\Omega^2$ по сравнению с производными от θ . Медленное изменение коэффициентов при периодических функциях $\sin\theta$ и $\sin^2(\theta/2)$ по сравнению с самими периодическими функциями соответствует основным положениям WBKJ-метода [16].

При $\Omega_{\parallel} = 0$ уравнения (21) переходят в систему, использованную в [20]. Полагая в (31) и (32) $\Omega_{\parallel} = 0$ ($\Omega = |\Omega_{\perp}|$), получаем соответствующие решения, найденные в [20] другим методом. Данное обстоятельство является важным аргументом в пользу общих выражений (24), (28), определяющих асимптотическое решение системы (22) при $\|\hat{A}\| \rightarrow \infty$.

После подстановки (31), (32) в (20) и (14) получим

$$\frac{\partial\Omega_{\perp}}{\partial t} + a_{\perp} \frac{\partial\Omega_{\perp}}{\partial z} = -\alpha_{\perp} \frac{\Omega_{\perp}}{\Omega} \left(\sin\theta + 2i \frac{\Omega_{\parallel}}{\Omega} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2\Omega_{\parallel}}{\partial t^2} - a_{\parallel}^2 \frac{\partial^2\Omega_{\parallel}}{\partial z^2} = \alpha_{\parallel} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{|\Omega_{\perp}|^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (34)$$

где

$$\alpha_{\perp} = -\frac{W_{\infty} n G_{\perp}^2 \omega_0}{8 \hbar \rho a_{\perp}^2}, \quad \alpha_{\parallel} = -\frac{2 W_{\infty} n G_{\parallel}^2}{\hbar \rho},$$

а Ω и θ определяются согласно (30).

Так как $|\Omega_{\perp}| \sim 1/\tau_p$, то $|\partial\Omega_{\perp}/\partial t| \sim \tau_p^{-2}$. Тогда, из (33) видно, что при условии $\alpha_{\perp} \tau_p^2 \ll 1$ скорость импульса v мало отличается от a_{\perp} . Если к тому же строго выполнено условие длинно-коротковолнового резонанса ($a_{\parallel} = a_{\perp} = a$), то при $\alpha_{\parallel} a_{\parallel}^{-2} \tau_p \ll 1$ в (34) можно провести редукцию по производным в обеих частях с помощью приближения однонаправленного распространения [21] (или медленно изменяющегося профиля). В термодинамически равновесном случае начальная инверсия $W_{\infty} = -0.5 \text{ th}(\hbar\omega_0/2k_B T)$, где k_B — постоянная Больцмана. При $\omega_0 \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$ и $T < 1 \text{ К}$ можно считать $W_{\infty} \approx -0.5$. Тогда

$$\alpha_{\perp} \tau_p^2 \approx \frac{n \hbar \omega_0 F_{44}^2 (\omega_0 \tau_p)^2}{16 g^2 \rho a_{\perp}^2}.$$

При $F_{44} \sim 10$, $\tau_p \sim 10^{-9} \text{ с}$, $g = 2$, $\rho = 2 \text{ г/см}^3$, $a_{\perp} = 3 \cdot 10^5 \text{ см/с}$ получим $\alpha_{\perp} \tau_p^2 \sim 10^{-4} \ll 1$. Аналогично при $F_{11} \sim 10$ получаем $\alpha_{\parallel} a_{\parallel}^{-2} \tau_p \sim 10^{-4}$. Введем, согласно приближению однонаправленного распространения, «локальное» время $\tau = t - z/a$ и «медленную» координату $\zeta = \epsilon z$, где $\epsilon \sim \alpha_{\perp} \tau_p^2$, $\alpha_{\parallel} a_{\parallel}^{-2} \tau_p$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{2\epsilon}{a} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta}.$$

В последнем выражении мы пренебрегли слагаемым $\sim \epsilon^2$. Правая часть уравнения (34) $\sim \alpha_{\parallel} \sim \epsilon$, поэтому полагаем в ней

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx a^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2},$$

после чего уравнение один раз интегрируем по τ . В результате вместо (33), (34) будем иметь

$$\frac{\partial\Omega_{\perp}}{\partial z} = -\mu_{\perp} \frac{\Omega_{\perp}}{\Omega} \left(\sin\theta + 2i \frac{\Omega_{\parallel}}{\Omega} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (35)$$

$$\frac{\partial\Omega_{\parallel}}{\partial z} = \mu_{\parallel} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{|\Omega_{\perp}|^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (36)$$

Здесь $\mu_{\perp} = \alpha_{\perp}/a$, $\mu_{\parallel} = \alpha_{\parallel} a/2$, а θ определяется согласно (30) с точностью до замены в верхнем пределе интеграла $t \rightarrow \tau$, а в нижнем $-t_0 \rightarrow -\infty$.

Данная интегро-дифференциальная система описывает акустическую самоиндуцированную прозрачность в режиме длинно-коротковолнового резонанса при сильной спин-фононной нелинейности. Роль коротковолновой компоненты упругого поля играет комплексная огибающая Ω_{\perp} поперечной составляющей импульса, а длинноволновой — продольная составляющая. Следует отметить, что переход от «двухсторонней» системы (33), (34) к «односторонней» (35), (36) аналогичен соответствующему переходу от неинтегрируемых уравнений Захарова [9] к интегрируемой системе Ядзимы–Ойкавы [10].

4. ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ САМОИНДУЦИРОВАННОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ ДЛЯ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Запишем комплексную огибающую Ω_{\perp} в виде

$$\Omega_{\perp}(z, t) = |\Omega_{\perp}| e^{i\phi(z, t)}. \quad (37)$$

Подставляя (37) в (33) и разделяя действительную и мнимую части, находим

$$\frac{\partial|\Omega_{\perp}|}{\partial t} + a_{\perp} \frac{\partial|\Omega_{\perp}|}{\partial z} = -\alpha_{\perp} \frac{|\Omega_{\perp}|}{\Omega} \sin\theta, \quad (38)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + a_{\perp} \frac{\partial\phi}{\partial z} = -2\alpha_{\perp} \frac{\Omega_{\parallel}}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (39)$$

Для чисто поперечного импульса ($\Omega_{\parallel} = G_{\parallel} = 0$, $\Omega = \partial\theta/\partial t = |\Omega_{\perp}|$) уравнение (39) показывает отсутствие фазовой модуляции, а (38) сводится к уравнению синус-Гордона для θ , найденному в [4]:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z \partial \tau} = -\mu_{\perp} \sin\theta.$$

Таким образом, фазовая модуляция обусловлена наличием продольной составляющей у акустического импульса.

Общий анализ системы (34) (или (36)), (38), (39) представляется весьма сложным. Не претендуя на общность, будем искать решение системы в виде локализованного бегущего импульса. Далее будем называть такой импульс солитоном, вкладывая в это понятие обобщенный смысл, не подразумевая обязательно упругое взаимодействие импульса с себе подобным. Согласно сказанному, ищем решение в виде: $\Omega_{\parallel} = \Omega_{\parallel}(\xi)$, $\Omega_{\perp} = \Omega_{\perp}(\xi)$, $\phi = \phi(\xi)$, где $\xi = t - z/v$, v — скорость распространения импульса. Тогда из (34), (38), (39) с учетом того, что $|\Omega_{\perp}|$, Ω_{\parallel} , $d\Omega_{\parallel}/d\xi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$, получим

$$\begin{aligned} \Omega_{\parallel} &= -\beta \frac{|\Omega_{\perp}|^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ \frac{d|\Omega_{\perp}|}{d\xi} &= \alpha \frac{|\Omega_{\perp}|}{\Omega} \sin \theta, \\ \frac{d\phi}{d\xi} &= 2\alpha \frac{\Omega_{\parallel}}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\beta = \frac{\alpha_{\parallel}}{a_{\parallel}^2 - v^2}, \quad \alpha = \frac{\alpha_{\perp}}{a_{\perp}/v - 1}.$$

Выведем уравнение фазовой траектории, выражающее взаимную зависимость между продольной Ω_{\parallel} и поперечной $|\Omega_{\perp}|$ компонентами импульса. Рассматривая θ как параметр, от которого зависит $|\Omega_{\perp}|$, можно записать

$$\frac{d|\Omega_{\perp}|}{d\xi} = \frac{d|\Omega_{\perp}|}{d\theta} \frac{d\theta}{d\xi} = \Omega \frac{d|\Omega_{\perp}|}{d\theta}.$$

После подстановки данного выражения во второе уравнение (40) и последующего интегрирования с учетом условий на бесконечности найдем

$$\int_0^{|\Omega_{\perp}|} \frac{|\Omega_{\perp}|^2 + \Omega_{\parallel}^2}{|\Omega_{\perp}|} d|\Omega_{\perp}| = 2\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Выражая из первого уравнения (40) $\sin^2(\theta/2)$ и подставляя его в последнее соотношение, после дифференцирования по $|\Omega_{\perp}|$ будем иметь

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = \frac{\sigma^2 + \sigma\Phi^2 + \Phi^3}{\sigma^2 + 3\sigma\Phi^2}. \quad (41)$$

Здесь осуществлен переход к безразмерным переменным $\sigma = (|\Omega_{\perp}|/\delta)^2$, $\Phi = -\Omega_{\parallel}/\delta$, где $\delta = 4\alpha/\beta$.

Ниже (41) будем называть уравнением фазовой траектории.

Из первых двух уравнений (40) легко находим

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = 2\sqrt{\alpha\Phi \left[\sigma - \frac{\delta}{\beta}(\sigma + \Phi^2)\Phi \right]}. \quad (42)$$

Интегрируя систему (41), (42), можно найти Ω_{\parallel} и $|\Omega_{\perp}|$ как функции $t - z/v$. В общем случае найти аналитическое решение (41) не представляется возможным, однако это можно сделать в двух противоположных пределах.

1. Пусть $|\Omega_{\perp}|^2 \gg \Omega_{\parallel}^2$. В переменных σ и Φ это соответствует условию $\Phi^2/\sigma \ll 1$. Тогда в числителе и знаменателе (41) сохраняются только первые слагаемые и $d\Phi/d\sigma = 1$. Отсюда, учитывая, что $\Phi \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$, получаем $\Phi = \sigma$. Пренебрегая затем в круглых скобках подкоренного выражения (42) Φ^2 по сравнению с σ и переходя от безразмерных величин к исходным $|\Omega_{\perp}|$ и Ω_{\parallel} , найдем

$$\begin{aligned} |\Omega_{\perp}| &= \frac{2}{\tau_p} \operatorname{sech} \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right), \\ \Omega_{\parallel} &= -\Omega_{\parallel m} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right), \\ \frac{d\phi}{d\xi} &= -\frac{\Omega_{\parallel m}}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right), \end{aligned} \quad (43)$$

где скорость v связана с длительностью τ_p импульса соотношением

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{a_{\perp}} (1 + \alpha_{\perp} \tau_p^2), \quad (44)$$

а амплитуда продольной компоненты $\Omega_{\parallel m} = \beta = \alpha_{\parallel}/(a_{\parallel}^2 - v^2)$.

Согласно (44) и приведенным выше оценкам, скорость v солитоноподобного образования очень незначительно отличается от a_{\perp} . Если a_{\parallel} сильно отличается от a_{\perp} ($a_{\parallel} > a_{\perp}$), то $\Omega_{\parallel m} \approx \alpha_{\parallel}/(a_{\parallel}^2 - a_{\perp}^2)$ (здесь положено $v \approx a_{\perp}$) и практически не зависит от τ_p и от амплитуды поперечной компоненты, что говорит о слабом влиянии друг на друга продольной и поперечной компонент при существенной отстройке скоростей продольных и поперечных звуковых волн. В то же время, как было сказано выше, влияние продольной и поперечной компонент друг на друга наиболее эффективно при $a_{\perp} = a_{\parallel} = a$ (длинно-коротковолновый резонанс). Тогда

$$\Omega_{\parallel m} \approx \frac{\alpha_{\parallel}}{2a^2(1 - v/a)} \approx \frac{\alpha_{\parallel}}{2\alpha_{\perp}\tau_p^2} = \frac{8\omega_0(F_{11}/F_{44})^2}{(\omega_0\tau_p)^2}.$$

Данное приближение эквивалентно переходу от системы (33), (34) к (35), (36). Ниже все численные оценки будем проводить для случая $a_{\perp} = a_{\parallel} = a$,

при этом общие аналитические выражения будем записывать для $a_{\perp} \neq a_{\parallel}$ (т. е. применительно к системе (33), (34)). Как видно из (43), амплитуда поперечной компоненты $|\Omega_{\perp}|_m = 2/\tau_p$. Отсюда получаем, что условие $|\Omega_{\perp}|_m^2 \gg \Omega_{\parallel m}^2$ эквивалентно неравенству

$$(\omega_0 \tau_p)^2 \gg (2F_{11}/F_{44})^2. \quad (45)$$

В большинстве кристаллов $F_{11} > F_{44}$ [11, 14]. Условие справедливости приближения ММАФ записывается в виде $(\omega_0 \tau_p)^2 \gg 1$, что не противоречит (45). При $\omega_0 \tau_p \sim 10^3$, $F_{44} \sim 10$, $g = 2$ имеем для амплитуды относительной поперечной деформации

$$|\mathcal{E}_{\perp}|_m = \frac{g|\Omega_{\perp}|_m}{\omega_0 F_{44}} = \frac{2g}{\omega_0 \tau_p F_{44}} \sim 4 \cdot 10^{-4},$$

что соответствует интенсивностям ($\rho = 2$ г/см³, $a = 3 \cdot 10^5$ см/с) $I \approx \rho a^3 |\mathcal{E}_{\perp}|^2 \sim 10^3$ Вт/см².

Из (43) и (32) находим динамику инверсии населенностей при прохождении через среду исследуемого импульса:

$$W = W_{\infty} \left[1 - \frac{2|\Omega_{\perp}|_m^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t-z/v}{\tau_p} \right)}{|\Omega_{\perp}|_m^2 + \Omega_{\parallel m}^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t-z/v}{\tau_p} \right)} \right]. \quad (46)$$

Отсюда видно, что из-за наличия продольной составляющей ($\Omega_{\parallel m} \neq 0$) инверсия спинов в максимуме амплитуды солитона не является полной ($W \neq -W_{\infty}$). Данное обстоятельство находит простое объяснение в рамках используемой модели. Действительно, увеличение Ω_{\parallel} (а вместе с ней и $|\Omega_{\perp}|$) все больше выводит квантовую систему из резонанса (см. (15) и (21)), чем и затрудняет дальнейшее ее возбуждение.

Решения (43), (44) носят поправочный характер к соответствующим решениям, найденным в [4] для чисто поперечных импульсов, и поэтому могут быть получены из (40) методом последовательных приближений по Ω_{\parallel} . Ясно, что таким образом нельзя получить принципиально новых решений. В этом смысле более интересным представляется другой предельный случай, рассмотренный ниже.

2. Пусть теперь $|\Omega_{\perp}|^2 \ll \Omega_{\parallel}^2$. Данное условие эквивалентно неравенству $\Phi^2/\sigma \gg 1$, поэтому в числителе и знаменателе (41) пренебрежем первыми слагаемыми. Тогда

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\Phi}{\sigma} \right).$$

Решение данного уравнения, удовлетворяющее условию $\Phi = 0$ при $\sigma = 0$, имеет вид $\Phi = \sigma/2$. Пренебрегая затем в круглых скобках правой части (42)

величиной σ по сравнению с Φ^2 , после интегрирования и возвращения от безразмерных переменных к исходным будем иметь

$$\begin{aligned} |\Omega_{\perp}| &= |\Omega_{\perp}|_m \operatorname{sech}^{1/2} \left(\frac{t-z/v}{\tau_p} \right), \\ \Omega_{\parallel} &= -\Omega_{\parallel m} \operatorname{sech} \left(\frac{t-z/v}{\tau_p} \right), \\ \frac{d\phi}{d\xi} &= -\frac{\Omega_{\parallel m}}{4} \operatorname{sech} \left(\frac{t-z/v}{\tau_p} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$|\Omega_{\perp}|_m = \frac{4}{\sqrt{2\beta\tau_p^3}}, \quad \Omega_{\parallel m} = \frac{2}{\tau_p},$$

а связь между скоростью солитона и его длительностью определяется выражением

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{a_{\perp}} (1 + 2\alpha_{\perp} \tau_p^2). \quad (48)$$

Полагая в (32) $\Omega^2 \approx \Omega_{\parallel}^2$, а также используя (47), найдем для инверсии населенностей

$$W = W_{\infty} \left[1 - 2 \frac{|\Omega_{\perp}|_m}{\Omega_{\parallel m}} \operatorname{sech} \left(\frac{t-z/v}{\tau_p} \right) \right]. \quad (49)$$

В силу условия $|\Omega_{\perp}|_m^2 \ll \Omega_{\parallel m}^2$ начальная инверсия, как видно из (49), при прохождении продольно-поперечного импульса меняется незначительно. В рассматриваемом пределе вызывающая квантовый переход поперечная компонента является слабее сильной продольной компоненты, выводящей данный переход из резонанса с несущей частотой поперечной составляющей импульса. Этим и объясняется ослабление степени возбуждения квантовой системы при уменьшении отношения $|\Omega_{\perp}|/\Omega_{\parallel}$.

Полагая $a_{\parallel} = a_{\perp} = a$, для амплитуды поперечной компоненты найдем

$$|\Omega_{\perp}|_m = \frac{F_{44}}{F_{11}} \sqrt{\frac{2\omega_0}{\tau_p}}.$$

Тогда условие $|\Omega_{\perp}|_m^2 \ll \Omega_{\parallel m}^2$ совместно с условием применимости приближения ММАФ ($\omega_0 \tau_p \gg 1$) запишется в виде

$$1 \ll \omega_0 \tau_p \ll (2F_{11}/F_{44})^2. \quad (50)$$

Для парамагнитных вкраплений Co^{2+} в матрице ионного кристалла отношение $2F_{11}/F_{44}$ может достигать 10 [11]. Следовательно, $1 \ll \omega_0 \tau_p \ll 100$. Учитывая, что приближение ММАФ становится справедливым при $\omega_0 \tau_p > 10$, заключаем, что солитоноподобное образование типа (47) может быть

зарегистрировано в эксперименте с акустическими импульсами, поперечная составляющая которых является квазимонохроматической с несущей частотой ω близкой к ω_0 . Несмотря на то что $\Omega_{\parallel}^2 \gg |\Omega_{\perp}|^2$, величины относительных деформаций $|\mathcal{E}_{\perp}|$ и \mathcal{E}_{\parallel} могут быть сравнимы по величине, а неравенство $\Omega_{\parallel}^2 \gg |\Omega_{\perp}|^2$ в этом случае выполняется за счет того, что $F_{11}^2 \gg F_{44}^2$. Взяв $F_{11} \sim 10^2$, $\omega_0 \tau_p \approx 40$, $g = 2$, найдем

$$\mathcal{E}_{\parallel} \approx \frac{2g}{F_{11}\omega_0\tau_p} \approx 10^{-3},$$

$$|\mathcal{E}_{\perp}| \approx \frac{\sqrt{2}g}{F_{11}\sqrt{\omega_0\tau_p}} \approx 5 \cdot 10^{-3},$$

что соответствует интенсивностям $I \approx \rho a_{\perp}^3 |\mathcal{E}_{\perp}|^2 \sim \sim 10^5$ Вт/см² (здесь принято $\rho = 2$ г/см³, $a_{\perp} \approx \approx 3 \cdot 10^5$ см/с). Таким образом, для возбуждения солитона вида (47) необходимы интенсивности гиперзвуковых импульсов, примерно на два порядка превосходящие интенсивность солитона (43). Выше отмечалось, что солитоноподобное решение типа (43) лишь слегка возмущает чисто поперечный солитон уравнения синус-Гордона, найденный в [4]. Решение же (47) является в этом смысле принципиально новым и обязательно содержит продольную акустическую составляющую. В этой связи заметим, что данное решение может быть получено непосредственно из (34), (38), (39), если в этих уравнениях положить $\Omega \approx |\Omega_{\parallel}|$.

Из (43), (47), (37) и (17) следует, что в окрестности солитонного максимума несущая частота поперечной компоненты меньше соответствующей частоты на периферийных участках. Если до импульсного воздействия среда находилась в состоянии термодинамического равновесия, то $\alpha_{\parallel}, \alpha_{\perp} > 0$, а скорость импульса $v < a_{\perp}, a_{\parallel}$. Тогда из (40) следует $\alpha, \beta > 0$, $\Omega_{\parallel}, d\phi/d\xi < 0$. Таким образом, частота поперечной компоненты стационарного бегущего импульса в равновесной среде уменьшается от его периферии к центру, где наиболее существенно влияние продольной составляющей, при произвольных отношениях $|\Omega_{\perp}|/|\Omega_{\parallel}|$ (рис. 1).

В случае равновесной среды для стационарных решений $\Omega_{\parallel} < 0$, тогда, согласно (15) (или (21)), продольная компонента импульса уменьшает частоту квантового перехода, чем выводит спиновую подсистему из резонанса с поперечной составляющей. Спиновая подсистема, стремясь остаться в резонансе, соответствующим образом модулирует частоту поперечной компоненты. В этом можно заметить одно из проявлений принципа Ле-Шателье-Брауна [22].

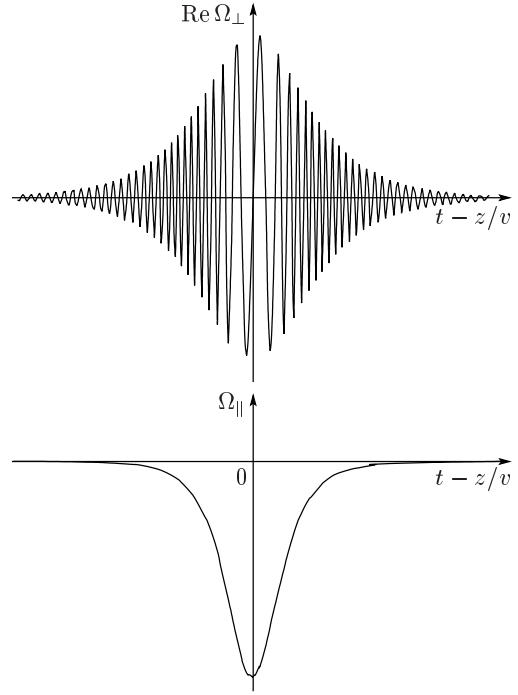


Рис. 1. Схематический вид двухкомпонентного солитона акустической самоиндуцированной прозрачности, распространяющегося параллельно магнитному полю

В промежуточном случае $|\Omega_{\perp}| \sim \Omega_{\parallel}$ система (41), (42) не поддается аналитическому анализу, а потому в настоящей работе исследована численно. Результаты данного исследования при различных отношениях

$$\frac{\Phi_m^2}{\sigma_m} \equiv \left(\frac{\Omega_{\parallel m}}{|\Omega_{\perp m}|} \right)^2$$

приведены на рис. 2. В двух предельных случаях (рис. 2а и 2б) полученные численно зависимости $\Omega_{\parallel}(\xi)$, $|\Omega_{\perp}(\xi)|$ и $W(\xi)$ хорошо согласуются с соответствующими приведенными выше аналитическими выражениями (43), (46) и (47), (49). Промежуточный случай, когда $\Omega_{\parallel m}$ и $|\Omega_{\perp m}|$ близки друг к другу по величине, изображен на рис. 2б. Как и следовало ожидать, степень возбуждения квантовой системы в этом случае также лежит в промежутке между двумя отмеченными пределами (рис. 2а и 2б). Во всех случаях продольная компонента бегущего импульса локализована сильнее, чем поперечная, а полная площадь импульса

$$\theta_{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega dt = 2\pi.$$

Наиболее отчетливо это видно из выражения (32) для инверсии и из графиков, представленных на

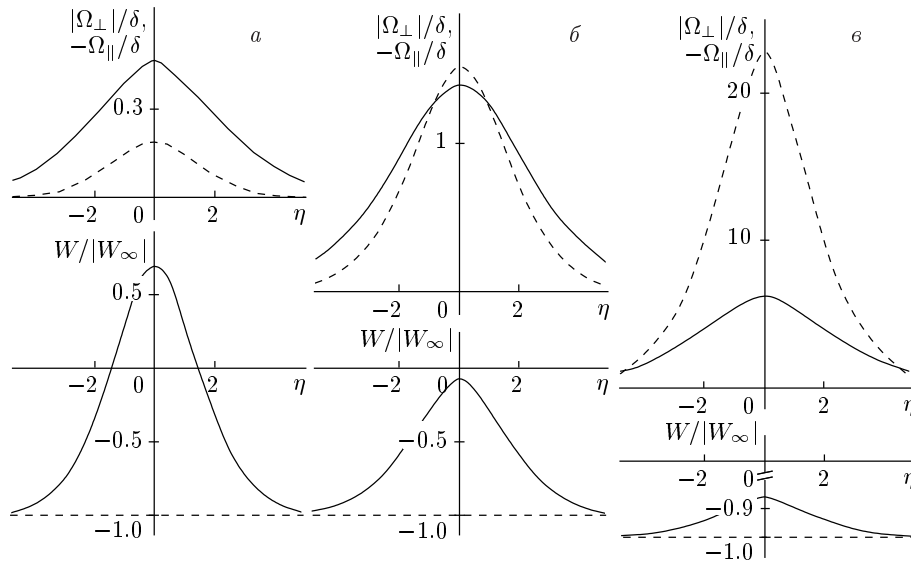


Рис. 2. Результаты численного решения системы (41), (42) после возвращения к исходным переменным Ω_{\parallel} и $|\Omega_{\perp}|$: $(\Omega_{\parallel}/|\Omega_{\perp}|)^2 = 0.18$ (а), 1.17 (б), 13 (в); $\eta = 2(t - z/v)/\tau_p$. На верхних графиках зависимости $|\Omega_{\perp}(\eta)|$ изображены сплошными кривыми, а $\Omega_{\parallel}(\eta)$ — штриховыми. Значения инверсии W находились с помощью (32)

рис. 2. Значения W до подачи импульса ($\theta = 0$) и после его прохождения ($\theta = 2\pi$) равны W_{∞} . Важным здесь представляется тот факт, что вклад в площадь импульса вносят как резонансная поперечная, так и низкочастотная продольная компоненты акустического импульса. С другой стороны, как видно из (32), чисто продольный импульс ($\Omega_{\perp} = 0$) не вызывает квантовых переходов (а потому не изменяет инверсии) в геометрии Фарадея, что и было отмечено выше.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследована структура продольно-поперечных солитоноподобных акустических импульсов, взаимодействующих с парамагнитными крамерсовскими дублетами в режиме АСИП и распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля (геометрия Фарадея). При этом поперечная компонента импульса вызывает резонансные квантовые переходы внутри дублетов, а роль продольной компоненты сводится к динамическому сдвигу частоты данных переходов. В результате квазимонохроматическая поперечная компонента выводится из резонанса низкочастотной продольной составляющей, вследствие чего уменьшается степень возбуждения квантовой подсистемы (крамерсовских дублетов). Кроме того, наличие продольной компоненты упругого поля приводит к модуляции несущей частоты поперечной состав-

ляющей импульса: вблизи солитонного максимума частота меньше, чем в периферийных областях. Таким образом, длинноволновая (продольная) и коротковолновая (поперечная) компоненты нелинейным образом взаимодействуют между собой посредством квантовой подсистемы. Данное взаимодействие оказывается наиболее эффективным при равенстве линейных скоростей продольных и поперечных звуковых волн. Тогда справедлива система интегро-дифференциальных уравнений (35) и (36), которая описывает длинно-коротковолновый резонанс в режиме сильной нелинейности. В этом смысле она отличается от систем Захарова [9], Ядзимы–Ойкавы [10] и их обобщений [8, 23, 24], где нелинейность является слабой (в виде разложений по степеням амплитуд обеих компонент). Поэтому дальнейшее более глубокое математическое исследование системы (35), (36), на наш взгляд, не лишено смысла. Найденное здесь асимптотическое ($\Omega_{\parallel}^2 \gg |\Omega_{\perp}|^2$) солитоноподобное решение вида (47) является принципиально новым и никоим образом не сводится к хорошо известным [4] чисто поперечным солитонам уравнения синус-Гордона.

В качестве квантовых парамагнитных вкраплений нами рассмотрены ионы с эффективным спином $S = 1/2$. Данная модель отличается особой простотой и наглядностью интерпретации полученных результатов. Однако хорошо известно, что значительно более сильную динамическую связь с

колебаниями кристаллической решетки испытывают парамагнитные ионы группы железа, обладающие эффективным спином $S = 1$. Гамильтониан спин-фононного взаимодействия в этом случае квадратичен по спиновым операторам. Как следствие, значительно возрастают трудности математического характера, но с точки зрения возможных экспериментов модель с $S = 1$ является более предпочтительной. Система парамагнитных примесей с $S = 1$ любопытна еще и по другой причине. При распространении акустического импульса в направлении, перпендикулярном к \mathbf{B} (геометрия Фохта), обе компоненты импульса (продольная и поперечная) вызывают квантовые переходы внутри земановского триплета. Причем поперечная компонента возбуждает переходы на частотах ω_0 и $2\omega_0$, а продольная — на частоте $2\omega_0$ [25]. В этом случае представление медленно меняющейся огибающей применимо к обеим компонентам, и режим длинно-коротковолнового резонанса уступает место двухчастотной АСИП. На наш взгляд, соответствующее исследование представляет интерес.

Развитый в настоящей работе метод получения асимптотических решений системы материальных уравнений типа (22), базирующийся на использовании формул (24) и (28), справедлив для микрообъектов с произвольным числом квантовых уровней. Поэтому использование данного метода в случае парамагнитных примесей, обладающих высшими эффективными спинами, выглядит многообещающим. В то же время при менее мощных импульсах, когда необходим учет неоднородного уширения, обсуждаемый метод несправедлив. В этом случае необходим поиск новых подходов для решения материальных уравнений, содержащих как продольную, так и поперечную компоненты импульса. Учет неоднородного уширения принципиален для вывода теоремы площадей [2]. В этой связи весьма желательным является ответ на вопрос о модификации данной теоремы для двухкомпонентных импульсов в сравнении со случаями чисто продольных или поперечных солитонов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-02-17436а).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. Lett. **18**, 908 (1967).

2. N. S. Shiren, Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
3. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974).
4. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2269 (1971).
5. О. Андерсон, в сб. *Физическая акустика, т. 3, часть Б: Динамика решетки*, под ред. У. Мэзона, Мир, Москва (1968), с. 62.
6. Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Физматлит, Москва (1963).
7. C. Zener, Phys. Rev. **71**, 323 (1947).
8. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **118**, 20 (2000).
9. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **62**, 1745 (1972).
10. N. Yadjima and M. Oikawa, Progr. Theor. Phys. **56**, 1719 (1976).
11. Дж. Такер, Р. Рэмpton, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, Москва (1975).
12. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловаров, Б. М. Хабибулин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, Москва (1977).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1987).
14. С. А. Альтшулер, Б. М. Козырев, *Электронный парамагнитный резонанс соединений элементов промежуточных групп*, Наука, Москва (1972).
15. S. V. Sazonov, J. Phys.: Cond. Matter **6**, 6295 (1994).
16. Н. Н. Моисеев, *Асимптотические методы нелинейной механики*, Наука, Москва (1981).
17. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, КЭ **27**, 139 (1999).
18. Я. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва (1966).
19. У. Х. Копвиллем, С. В. Пранц, *Поляризационное эхо*, Наука, Москва (1985).
20. S. V. Sazonov and E. V. Trifonov, J. Phys. B **27**, L7 (1994).
21. Б. М. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1990).
22. Р. Кубо, *Термодинамика*, Мир, Москва (1970).
23. E. S. Benilov and S. P. Burtzev, Phys. Lett. A **98**, 256 (1983).
24. В. Г. Маханьков, Ю. П. Рыбаков, В. И. Санюк, УФН **164**(2), 121 (1994).
25. В. Ю. Маньков, С. В. Сазонов, ФТТ **41**, 623 (1999).