

О КРИТЕРИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ И НЕАДИАБАТИЧЕСКИХ ПЕРЕХОДОВ ПРИ АТОМНЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

*К. Ю. Блюх**

*Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины
61002, Харьков, Украина*

С. В. Гринек

*Харьковский национальный университет
61077, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 14 февраля 2001 г.

Получен универсальный критерий эффективности линейной трансформации волн в плавно неоднородных средах при локальном сближении их характеристических показателей. Этот же критерий применим для оценки эффективности неадиабатических переходов при медленных атомных столкновениях. Разработанный формализм анализа линейного взаимодействия волн основан на ВКБ-асимптотике решений скалярного обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка. С помощью полученного критерия в каждой возникающей практической задаче можно делать вывод об эффективности линейного взаимодействия мод, зная только характеристическое уравнение для волн в однородной среде и коэффициенты исходного дифференциального уравнения. Решение задачи в таком случае сводится к элементарным арифметическим расчетам.

PACS: 34.50.Pi, 41.20.Jb, 52.40.Db

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о линейном взаимодействии волн в плавно неоднородных средах хорошо изучена и имеет много приложений (см. обзор [1] и ссылки там), например, в физике плазмы и астрофизике [2–4]. В этой статье мы будем говорить о наиболее часто встречающемся случае, когда взаимодействие волн происходит в области локального сближения их дисперсионных характеристик. Под трансформацией понимается превращение волны, соответствующей одной ветви дисперсионной кривой, в волну, соответствующую другой ветви. Аналогичная ситуация возникает и при медленных атомных столкновениях [5, 6]. Линейной трансформации здесь соответствуют так называемые неадиабатические переходы между квазипересекающимися термами.

Строго говоря, понятие волны, соответствующей данной ветви дисперсионной кривой, справедливо только в однородной среде. Приближение геометрической оптики, или ВКБ-приближение, расширяет его и дает возможность применять для волн в плавно неоднородных средах. В этом приближении волны в плавно неоднородной среде предполагаются локально соответствующими волнам в однородной среде с текущими характеристиками. Волны, соответствующие различным ветвям дисперсионных кривых, считаются независимыми. Таким образом, линейная трансформация волн по сути представляет собой нарушение ВКБ-приближения.

Тем не менее для расчета эффективности линейной трансформации достаточно исследовать уравнения и их решения, соответствующие ВКБ-приближению. При этом, как правило, используется один из следующих двух методов. Во-первых, это метод комплексных фазовых интегралов, позволя-

*E-mail: kostya@bliokh.kharkiv.com

ющий при интегрировании обойти особые точки ВКБ-приближения по контуру в комплексной плоскости [2–5]. Во-вторых, метод, основанный на анализе поляризации волн различных типов [1]. Последний метод обладает наглядным общим формализмом, и с его помощью анализируются уравнения на вещественной оси.

Первый метод представляется более наглядным математически, а второй в большей степени раскрывает качественную физическую картину явления. Однако оба метода не лишены определенной громоздкости в расчетах при использовании их в различных конкретных приложениях. В первом случае это связано с необходимостью оценивать интегралы в комплексной плоскости от довольно сложных функций с особенностями, а во втором — с громоздким матричным представлением линейной алгебры.

Заметим, что во многих практических задачах не требуется точный расчет коэффициентов линейной трансформации и неадиабатических переходов, достаточно лишь получения порядковой оценки их эффективности. При этом универсальные критерии, говорящие об эффективности взаимодействия, фактически отсутствуют. Ясно, что трансформация волн должна быть тем сильнее, чем ближе подходят друг к другу дисперсионные характеристики взаимодействующих мод (условие резонанса). Кроме того, эффективность взаимодействия волн должна увеличиваться с увеличением градиента неоднородности, поскольку именно неоднородность обеспечивает связь между различными модами. Эти два замечания приводят к следующему интуитивному критерию. Часто считается, что линейная трансформация существенна, когда характерный масштаб изменения параметров системы меньше или порядка периода биений между взаимодействующими модами [7]. Если собственные числа (частоты или волновые векторы), отвечающие этим модам, имеют один порядок p , а расстояние между ними порядка δp ($|\delta p| \ll |p|$), то приведенный критерий эффективности можно записать в виде

$$\left| \frac{p \delta p}{p'} \right| \lesssim 1, \quad (1)$$

где штрих обозначает производную по независимой переменной. Аналогичный критерий вводится и в теории атомных столкновений — параметр, соответствующий левой части (1), в этом случае называется параметром Мессе. Однако в реальных ситуациях критерий (1) часто оказывается неверным. Поэтому, как правило, задачу об оценке эффективности

линейной трансформации приходится решать достаточно подробно в каждом конкретном случае.

В данной работе предлагается универсальный критерий, который позволит сделать вывод об эффективности линейной трансформации в каждой практической задаче, не прибегая к решению задачи о линейном взаимодействии. Мы предлагаем альтернативный метод анализа линейной трансформации в области сближения показателей преломления волн различных типов, который применим в задачах с монотонной плавной неоднородностью и при отсутствии отражения волн. Наш метод основан на ВКБ-формализме скалярного линейного уравнения n -го порядка на вещественной оси и позволяет получить результат с гораздо меньшими затратами на вычисления¹⁾. Так, в некоторых случаях, для оценки эффективности линейной трансформации достаточно знать только закон дисперсии волн в однородной среде. Это связано с тем, что в скалярных ВКБ-решениях вся информация о волне (в том числе и о ее поляризации) содержится в комплексной фазе и это избавляет от необходимости проведения сложных расчетов собственных векторов-решений волн в матричном методе [1]. Кроме рассмотрения общей задачи, в статье разобрано несколько примеров взаимодействия волн и неадиабатических переходов, решенных ранее другими способами.

2. ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ

2.1. Исходные уравнения

Пусть μ — параметр (или набор параметров), который определяет неоднородность задачи, и пусть он плавно зависит от координаты z :

$$\mu = \mu(\varepsilon z).$$

Здесь $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, характеризующий плавность неоднородности. Учитывая однородность рассматриваемой системы по времени t и поперечным к z координатам \mathbf{r}_\perp , зависимость переменных от этих величин можно исключить из исходных уравнений с помощью множителей $\exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - i\omega t)$. В результате система дифференциальных уравнений, описывающая линейные волны в неоднородной среде, сводится к скалярному линейному обыкновенному дифференциальному уравнению n -го порядка.

¹⁾ Заметим, что в матричном уравнении общего вида присутствуют $2n^2$ различных коэффициентов, в то время как в скалярном уравнении их всего $2n$. (Удвоение возникает за счет того, что в ВКБ-приближении нужно разделять в каждом коэффициенте слагаемые разных порядков малости.)

В приближении геометрической оптики рассматриваются асимптотические по ε решения с точностью до ε^1 . Тогда рассматриваемое дифференциальное уравнение линеаризуется по $\mu' \sim \varepsilon$ (штрих обозначает производную по z), и, отбросив члены более высоких порядков, его можно записать в общем виде как

$$\sum_{j=0}^n [a_j(\varepsilon z) + \mu'(\varepsilon z)b_j(\varepsilon z)] y^{(n-j)}(z) = 0, \quad (2)$$

где $y(z)$ — искомая функция, а a_j и b_j — коэффициенты уравнения, неоднородные вследствие зависимости от μ . Не ограничивая общности, можно положить $a_0 \equiv 1$, $b_0 \equiv 0$. Первые слагаемые под знаком суммы в (2) имеют порядок ε^0 , а вторые — ε^1 .

Уравнению (2) соответствует характеристическое (дисперсионное) уравнение

$$l(p, \varepsilon z) \equiv \sum_{j=0}^n [a_j(\varepsilon z) + \mu'(\varepsilon z)b_j(\varepsilon z)] p^{n-j} = 0. \quad (3)$$

Его корни (характеристические числа) являются плавными функциями z : $p = p(\varepsilon z)$. Асимптотическое ВКБ-решение уравнения (2) для k -ой моды можно записать в виде [8]

$$y_k \approx \exp \left[\int_{z_0}^z \Phi_k(\varepsilon \xi) d\xi \right], \quad (4)$$

$$\Phi_k(\varepsilon \xi) = p_k(\varepsilon \xi) - \frac{1}{2} p_k'(\varepsilon \xi) \frac{l_{pp}(p, \varepsilon \xi)}{l_p(p, \varepsilon \xi)} \Big|_{p=p_k(\varepsilon \xi)}.$$

Здесь и далее индексы p внизу обозначают производные по соответствующему аргументу характеристического уравнения.

Выделим в уравнении (3), его корнях и выражении (4) члены, соответствующие нулевому и первому порядкам малости по ε :

$$\begin{aligned} l &= l^{(0)} + l^{(1)}, \\ p &= p^{(0)} + p^{(1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $l^{(i)} \sim p^{(i)} \sim \varepsilon^i$,

$$l^{(0)}(p, \varepsilon z) \equiv \sum_{j=0}^n a_j(\varepsilon z) p^{n-j} = \prod_{j=1}^n (p - p_j^{(0)}(\varepsilon z)), \quad (6)$$

$$l^{(1)}(p, \varepsilon z) \equiv \mu'(\varepsilon z) \sum_{j=1}^n b_j(\varepsilon z) p^{n-j}. \quad (7)$$

Используя метод возмущений, из (3), (6) и (7) несложно получить

$$p_k^{(1)} = - \frac{l^{(1)}}{l_p^{(0)}} \Big|_{p=p_k^{(0)}} = - \frac{\mu' \sum_{j=1}^n b_j (p_k^{(0)})^{n-j}}{\prod_{j \neq k} (p_k^{(0)} - p_j^{(0)})}. \quad (8)$$

Здесь и далее аргументы известных функций для краткости опускаются. Выражение для ВКБ-фазы (4) примет вид

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \Phi_k^{(0)} + \Phi_{k1}^{(1)} + \Phi_{k2}^{(1)} = \\ &= p_k^{(0)} + p_k^{(1)} - \frac{1}{2} p_k^{(0)'} \frac{l_{pp}^{(0)}}{l_p^{(0)}} \Big|_{p=p_k^{(0)}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где три величины $\Phi_k^{(i)} \sim \varepsilon^i$ равны соответственно трем членам в правой части (9). Подставляя (6) и (8) в (9), получим окончательное выражение для ВКБ-фазы:

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \Phi_k^{(0)} + \Phi_{k1}^{(1)} + \Phi_{k2}^{(1)} = \\ &= p_k^{(0)} - \frac{\mu' \sum_{j=1}^n b_j (p_k^{(0)})^{n-j}}{\prod_{j \neq k} (p_k^{(0)} - p_j^{(0)})} - \sum_{j \neq k} \frac{p_k^{(0)'}}{p_k^{(0)} - p_j^{(0)}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Величина $\Phi_k^{(0)} = p_k^{(0)}$ образует обычную динамическую фазу в ВКБ-решении (4). Величина

$$\Phi_{k1}^{(1)} = - \frac{\mu' \sum_{j=1}^n b_j (p_k^{(0)})^{n-j}}{\prod_{j \neq k} (p_k^{(0)} - p_j^{(0)})}$$

образует поправку порядка ε в ВКБ-решениях, связанную с наличием производных от неоднородного параметра μ в исходном уравнении (2). Величина

$$\Phi_{k2}^{(1)} = - \sum_{j \neq k} \frac{p_k^{(0)'}}{p_k^{(0)} - p_j^{(0)}}$$

образует поправку порядка ε в ВКБ-решениях, связанную с неоднородностью текущих характеристических чисел $p_k^{(0)}$.

2.2. Критерий эффективности взаимодействия волн

Построение асимптотических ВКБ-решений подразумевает, что члены, пропорциональные ε^1 , много меньше членов порядка ε^0 , т. е.

$$\left| \Phi_{k1}^{(1)} + \Phi_{k2}^{(1)} \right| \ll \left| \Phi_k^{(0)} \right|. \quad (11)$$

Нарушение ВКБ-приближения (нарушение условия (11)) можно трактовать как нарушение независимости различных решений, т.е. взаимодействие и трансформацию волн.

Рассмотрим сначала случай, когда членом $\Phi_{k1}^{(1)}$ можно пренебречь: $|\tilde{\Phi}_{k1}^{(1)}| \ll |\tilde{\Phi}_{k2}^{(1)}|$. Тогда волны перестают быть независимыми при $|\Phi_k^{(0)}| \gtrsim |\Phi_{k2}^{(1)}|$, или

$$\left| \sum_{j \neq k} \frac{p_k^{(0)'}}{p_k^{(0)} - p_j^{(0)}} \right| \gtrsim |p_k^{(0)}|. \quad (12)$$

Если расстояние между корнями характеристического уравнения не мало: $|p_k^{(0)} - p_j^{(0)}| \sim |p_k^{(0)}|$, то (12) приводит нас к известной оценке:

$$\left| \frac{p_k^{(0)'}}{p_k^{(0)}} \right| \gtrsim |p_k^{(0)}|. \quad (13)$$

Если же в некоторой области два корня характеристического уравнения сближаются друг с другом на малое расстояние:

$$|p_k^{(0)} - p_m^{(0)}| = 2\delta p \ll |p_k^{(0)}|,$$

то в этом месте ВКБ-приближение нарушается при более слабом для $p_k^{(0)'}$ условии:

$$\left| \frac{p_k^{(0)'}}{\delta p} \right| \gtrsim |p_k^{(0)}|. \quad (14)$$

Это условие и есть приведенный во введении критерий (1). Казалось бы, неравенство (14) и будет условием для эффективной трансформации волн в области сближения их характеристических показателей. Однако при этом не учитывается следующее важное обстоятельство. Дело в том, что взаимодействие двух мод с близкими характеристическими числами имеет резонансную природу, и достаточно даже слабой связи между ними, чтобы они эффективно обменивались энергией. Чтобы учесть это, поступим следующим образом.

Сделаем в уравнении (2) замену

$$y = \tilde{y} \exp(p_{mid} z), \quad p_{mid} = \frac{p_k^{(0)} + p_m^{(0)}}{2} \Big|_{z=z_{min}}, \quad (15)$$

где z_{min} — точка, в которой расстояние между сближающимися корнями $p_k^{(0)}$ и $p_m^{(0)}$ минимально. После такой замены текущие корни нового характеристического уравнения будут равны

$$\tilde{p}_j^{(0)}(\varepsilon z) = p_j^{(0)}(\varepsilon z) - p_{mid}. \quad (16)$$

В новых переменных взаимодействие рассматриваемых мод описывается нерезонансным образом, поскольку два сближающихся корня расположены при $z = z_{min}$ симметрично и имеют по величине тот же порядок, что и расстояние между ними:

$$\tilde{p}_{k,m}^{(0)} = \pm \delta p. \quad (17)$$

Рассматривая нулевое по малому параметру $\delta p/p_{mid}$ приближение, несложно увидеть, что сближающиеся корни удовлетворяют переписанному в новых координатах характеристическому уравнению (3):

$$\tilde{l}(p, \varepsilon z) \equiv \prod_{j=1}^n (p - \tilde{p}_j^{(0)}(\varepsilon z)) + \mu'(\varepsilon z) \tilde{b}_n(\varepsilon z), \quad (18)$$

где

$$\tilde{b}_n(\varepsilon z) \approx \sum_{j=1}^n b_j(\varepsilon z) p_{mid}^{n-j}(\varepsilon z). \quad (19)$$

Сопоставляя (18) с (5)–(7) и (10), с учетом (19) получим выражение для ВКБ-фазы в новых переменных:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_k &= \tilde{\Phi}_k^{(0)} + \tilde{\Phi}_{k1}^{(1)} + \tilde{\Phi}_{k2}^{(1)} \approx \\ &\approx \tilde{p}_k^{(0)} - \frac{\mu' \sum_{j=1}^n b_j p_{mid}^{n-j}}{\prod_{j \neq k} (\tilde{p}_k^{(0)} - \tilde{p}_j^{(0)})} - \sum_{j \neq k} \frac{\tilde{p}_k^{(0)'}}{\tilde{p}_k^{(0)} - \tilde{p}_j^{(0)}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь условием эффективности линейного взаимодействия волн будет

$$\left| \tilde{\Phi}_{k1}^{(1)} + \tilde{\Phi}_{k2}^{(1)} \right| \gtrsim \left| \tilde{\Phi}_k^{(0)} \right|. \quad (21)$$

Из (20) с учетом (17) получим

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\Phi}_k^{(0)} \right| &= \delta p, \\ \left| \tilde{\Phi}_{k1}^{(1)} \right| &\approx \left| \frac{\mu' \sum_{j=1}^n b_j p_{mid}^{n-j}}{2\delta p \prod_{j \neq k, m} (\tilde{p}_k^{(0)} - \tilde{p}_j^{(0)})} \right|, \\ \left| \tilde{\Phi}_{k2}^{(1)} \right| &\approx \left| \frac{p_k^{(0)'}}{2\delta p} \right|. \end{aligned} \quad (22)$$

В случае, когда $\left| \tilde{\Phi}_{k1}^{(1)} \right| \ll \left| \tilde{\Phi}_{k2}^{(1)} \right|$, будет действовать оценка

$$\left| \frac{p_k^{(0)'}}{\delta p} \right| \gtrsim |\delta p|. \quad (23)$$

Это условие говорит о том, что благодаря резонансной природе взаимодействия трансформация

волн становится эффективной при более плавных неоднородностях, чем в случаях (1) и (14). При $|\tilde{\Phi}_{k2}^{(1)}| \ll |\tilde{\Phi}_{k1}^{(1)}|$ критерием эффективности трансформации будет

$$\left| \frac{\mu' \sum_{j=1}^n b_j p_{mid}^{n-j}}{\delta p \prod_{j \neq k, m} (\tilde{p}_k^{(0)} - \tilde{p}_j^{(0)})} \right| \gtrsim |\delta p|. \quad (24)$$

В общем случае условие (21) можно переписать в виде

$$\left| \frac{1}{\delta p} \left(p_k^{(0)'} + \frac{\mu' \sum_{j=1}^n b_j p_{mid}^{n-j}}{\prod_{j \neq k, m} (\tilde{p}_k^{(0)} - \tilde{p}_j^{(0)})} \right) \right| \gtrsim |\delta p|. \quad (25)$$

Таким образом, мы получили критерии (23)–(25) эффективности линейного взаимодействия волн в общем случае, и оценка эффективности линейной трансформации волн в каждом конкретном случае теперь сводится к элементарным вычислениям, в которых используются только коэффициенты исходного дифференциального уравнения и корни дисперсионного уравнения.

3. ПРИМЕРЫ

3.1. Случай $|\tilde{\Phi}_{k1}^{(1)}| \ll |\tilde{\Phi}_{k2}^{(1)}|$. Линейная трансформация волн в магнитосферах пульсаров

Рассмотрим исследованную в [9] задачу о взаимодействии волн в неоднородной замагниченной ультрарелятивистской электрон-позитронной плазме магнитосферы пульсара. Основные уравнения этой системы запишем в виде

$$\begin{aligned} y_1' &= iy_2, \\ y_2' &= i(1 - \vartheta^2)y_1 + i\vartheta y_3, \\ y_3' &= iy_4, \\ y_4' &= -i\vartheta \frac{\mu}{4\gamma^4} y_1 - \left[i \left(\beta^2 - \frac{\mu}{4\gamma^4} \right) + \beta \frac{\mu'}{\mu} \right] y_3 + \\ &+ \left(2i\beta + \frac{\mu'}{\mu} \right) y_4, \end{aligned} \quad (26)$$

где y_j — полевые переменные, координата приведена к безразмерному виду с помощью характерной длины волны $l = c/\omega$, $\vartheta \ll 1$ — угол между волновым вектором и внешним магнитным полем, $\gamma \gg 1$ —

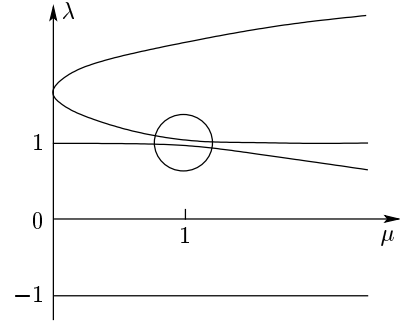


Рис. 1. Зависимость показателей преломления от плотности плазмы для квазипродольных волн в электрон-позитронной замагниченной плазме. Здесь и на следующих рисунках кружком обведена область возможного взаимодействия мод

лоренц-фактор, β^{-1} — отношение скорости течения плазмы к скорости света, а $\mu = \mu(\varepsilon z)$ — параметр, характеризующий неоднородность плазмы и пропорциональный ее плотности.

Система (26) сводится к скалярному дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\begin{aligned} y_1^{(4)} - \left(2i\beta + \frac{\mu'}{\mu} \right) y_1^{(3)} + \\ + \left(1 - \vartheta^2 + \frac{\mu}{4\gamma^4} - \beta^2 + i\beta \frac{\mu'}{\mu} \right) y_1^{(2)} - \\ - \left(2i\beta + \frac{\mu'}{\mu} \right) (1 - \vartheta^2) y_1^{(1)} + \\ + \left\{ (1 - \vartheta^2) \left[\frac{\mu}{4\gamma^4} - \beta^2 + i\beta \frac{\mu'}{\mu} \right] + \frac{\vartheta^2 \mu}{4\gamma^4} \right\} y_1 = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Сравнивая (27) с (2), видим, что здесь

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{\mu}, \quad b_2 = i\frac{\beta}{\mu}, \\ b_3 &= -\frac{1 - \vartheta^2}{\mu}, \quad b_4 = i\frac{\beta(1 - \vartheta^2)}{\mu}. \end{aligned} \quad (28)$$

В нулевом по ε приближении уравнению (27) соответствует дисперсионное уравнение

$$(\lambda - \beta)^2 (\lambda^2 + \vartheta^2 - 1) = \frac{\mu}{4\gamma^4} (\lambda^2 - 1), \quad (29)$$

где $i\lambda \equiv p^{(0)}$.

Зависимость $\lambda(\mu)$ показана на рис. 1. В районе $\mu = 1$ хорошо видно сближение двух корней со значениями вблизи единицы (область в круге). При переходе к $\vartheta = 0$ два корня совпадают в точке $\mu = 1$ и происходит перезамыкание дисперсионных ветвей:

они представляют собой в этой области две пересекающиеся прямые. При прохождении области $\mu \approx 1$ изображающая точка волны с конечным ϑ двигается вдоль кривой рис. 1 и переходит с одной асимптоты на другую, а изображающая точка волны с $\vartheta = 0$ движется по прямой и остается на той же асимптоте. Но при достаточно малых $\vartheta \ll 1$ изображающая точка волны переходит с одной кривой на другую, оставаясь, как и при $\vartheta = 0$, на одной асимптоте, что обеспечивает непрерывность предельного перехода $\vartheta \rightarrow 0$. Это и есть линейная трансформация волны. При эффективной трансформации (когда имеют место сильные неравенства (23)–(25)) волна, соответствующая одной кривой, практически на 100% превращается в волну, соответствующую другой кривой, но той же асимптоте, что и исходная волна. В этом и следующем примерах, как и в большинстве реальных случаев, волны, соответствующие одной асимптоте, имеют близкие поляризации, а соответствующие разным асимптотам — существенно различные. Это является физической причиной линейной трансформации волн.

Оценим величину угла ϑ , при которой линейная трансформация будет достаточно эффективной. Следующие выражения приближенно описывают поведение сближающихся корней (29) вблизи области взаимодействия:

$$\lambda_{1,2} \approx 1 + \frac{1-\mu}{8\gamma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\mu}{8\gamma^2}\right)^2 + \frac{\vartheta^2}{8\gamma^2}}.$$

Эти выражения верны при

$$\vartheta \ll \frac{1}{\gamma}. \quad (30)$$

Проводя подобно (15)–(17) переход к новым характеристическим показателям ($\lambda_{mid} = 1$), получим

$$\tilde{\lambda}_{1,2} \approx \frac{1-\mu}{8\gamma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\mu}{8\gamma^2}\right)^2 + \frac{\vartheta^2}{8\gamma^2}}. \quad (31)$$

В точке максимального сближения $\mu = 1$:

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = \pm \delta\lambda = \pm \frac{\vartheta}{2\sqrt{2}\gamma}. \quad (32)$$

Из (29) несложно получить также значения двух других корней при $\mu = 1$ в нулевом по ϑ приближении:

$$\lambda_3 \approx -1, \quad \lambda_4 \approx \beta + \frac{1}{2\gamma^2} \approx 1 + \frac{1}{\gamma^2}$$

или

$$\tilde{\lambda}_3 \approx -2, \quad \tilde{\lambda}_4 \approx \frac{1}{\gamma^2}. \quad (33)$$

Подставляя (28) и (31)–(33) в (22) (с учетом того, что $i\tilde{\lambda} \equiv \tilde{p}^{(0)}$), вычислим ВКБ-фазы для рассматриваемых волн при $\mu = 1$:

$$\left| \tilde{\Phi}_k^{(0)} \right| \approx \delta\lambda = \frac{\vartheta}{2\sqrt{2}\gamma}, \quad \left| \tilde{\Phi}_{k1}^{(1)} \right| \approx \frac{\vartheta\gamma\mu'}{2\sqrt{2}},$$

$$\left| \tilde{\Phi}_{k2}^{(1)} \right| \approx \frac{\mu'}{4\sqrt{2}\vartheta\gamma}.$$

В силу условия (30) $\left| \tilde{\Phi}_{k1}^{(1)} \right| \ll \left| \tilde{\Phi}_{k2}^{(1)} \right|$. Используя оценку (25) или (23), получим

$$\frac{\vartheta}{\gamma} \gtrsim \frac{\mu'}{\vartheta\gamma}.$$

Учитывая, что $\mu' \sim l/L$ (где L — характерный масштаб неоднородности), получим, что линейная трансформация эффективна для волн, распространяющихся под углами

$$\vartheta \lesssim \sqrt{\frac{l}{L}}. \quad (34)$$

Эта оценка совпадает с полученной методом Цвана в работе [9].

3.2. Случай $\left| \tilde{\Phi}_{k2}^{(1)} \right| \ll \left| \tilde{\Phi}_{k1}^{(1)} \right|$. Трансформация волн в солнечной короне

Рассмотрим, следуя [3, § 24], трансформацию квазипоперечных волн в магнитоактивной плазме с неоднородным внешним магнитным полем. Эта ситуация реализуется в солнечной короне. Основными уравнениями являются

$$\begin{aligned} F_1'' + (C + B)F_1 &= -iAF_2, \\ F_2'' + (C - B)F_2 &= iAF_1, \end{aligned} \quad (35)$$

где F_i — комплексные полевые переменные, в качестве независимой переменной используется безразмерная $\zeta = \omega z/c$, и

$$\begin{aligned} A &= -\frac{v\omega_y^2}{2\omega_y^2 - (1-v)(1-\omega_z^2)}, \\ B &= -\frac{v(1-v)\omega_z}{2\omega_y^2 - (1-v)(1-\omega_z^2)}, \\ C &= 1 - \frac{v(\omega_y^2 - 1 + v)}{2\omega_y^2 - (1-v)(1-\omega_z^2)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь величина $\omega_z = \omega_z(\varepsilon\zeta)$ предполагается монотонно изменяющейся и проходящей нулевое значение.

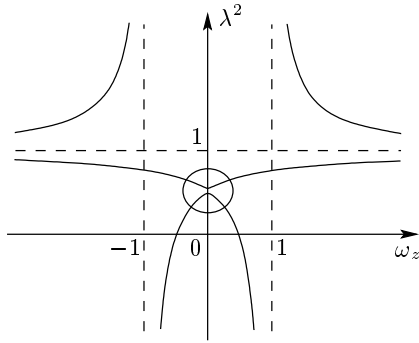


Рис. 2. Зависимость квадратов показателей преломления от величины продольной составляющей внешнего магнитного поля для квазиперечных волн в плазме солнечной короны

Система (35) сводится к уравнению

$$F_1^{(4)} - \frac{2A'}{A}F_1^{(3)} + 2CF_1^{(2)} + 2\left(C' + B' - (C + B)\frac{A'}{A}\right)F_1^{(1)} + (C^2 - B^2 - A^2)F_1 = 0. \quad (37)$$

Сравнивая (37) с (2), видим, что здесь

$$\begin{aligned} b_1\mu' &= -\frac{2A'}{A}, \\ b_3\mu' &= 2\left(C' + B' - (C + B)\frac{A'}{A}\right), \\ b_2 &= b_4 = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

В нулевом по ε приближении уравнению (37) соответствует дисперсионное уравнение

$$\lambda^4 - 2C\lambda^2 + (C^2 - B^2 - A^2) = 0, \quad (39)$$

где, как и раньше, $i\lambda \equiv p^{(0)}$.

Зависимость $\lambda^2(\omega_z)$ представлена на рис. 2. В обведенной окрестности $\omega_z = 0$ две дисперсионные кривые сближаются и становится возможной трансформация волн. Малым параметром, ответственным за сближение двух кривых, является

$$\omega_y^2 \ll 1. \quad (40)$$

Кроме того, предполагается, что

$$v \ll 1. \quad (41)$$

При $\omega_y^2 \rightarrow 0$ наблюдается аналогичная примеру предыдущего пункта ситуация: происходит перезамыкание дисперсионных кривых, а при достаточно малом ω_y^2 линейная трансформация волн, проходящих

область $\omega_z \approx 0$, обеспечивает непрерывность этого предельного перехода.

Заметим, что наклон дисперсионных кривых в точке их максимального сближения равен нулю ($\lambda' = 0$) и третье слагаемое в ВКБ-фазе (20) для них обращается в нуль: $\tilde{\Phi}_{k2}^{(1)} = 0$. Таким образом, ВКБ-приближение может нарушаться в окрестности $\omega_z = 0$ только за счет второго члена в (20) $\tilde{\Phi}_{k1}^{(1)}$. Оценим его величину.

При $\omega_z = 0$ величина $B = 0$ и значения сближающихся корней дисперсионного уравнения (39) равны

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{C \pm A}.$$

Переходя к симметричным относительно среднего переменным (15)–(17), имеем

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = \pm\delta\lambda = \pm\left(\sqrt{C + A} - \sqrt{C - A}\right). \quad (42)$$

Подставляя сюда выражения (36), в первом приближении по v получим

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = \pm\frac{v\omega_y^2}{1 - 2\omega_y^2}. \quad (43)$$

Для двух далеких корней дисперсионного уравнения (39) в нулевом приближении по v положим $A = B = 0, C = 1$ (см. (36)) и получим $\lambda_{3,4} = -1$ или

$$\tilde{\lambda}_{3,4} = -2. \quad (44)$$

Подставив теперь (38) и (42)–(44) в первые два выражения (22) с учетом того, что $i\lambda \equiv p^{(0)}$, найдем величины ВКБ-фаз в точке $\omega_z = 0$:

$$\left|\tilde{\Phi}_k^{(0)}\right| \approx \delta\lambda = \frac{v\omega_y^2}{1 - 2\omega_y^2}, \quad \left|\tilde{\Phi}_{k1}^{(1)}\right| \approx \frac{|\omega'_z|}{4\omega_y^2}.$$

Отсюда, используя (40) и учитывая, что $\omega'_z = (c/\omega)d\omega_z/dz$, получим оценку соотношения параметров, при котором эффективна трансформация:

$$\frac{\omega v \omega_y^4}{c \left|\frac{d\omega_z}{dz}\right|} \lesssim 1. \quad (45)$$

Эта оценка с точностью до множителей порядка единицы совпадает с полученной в [3] с помощью метода фазовых интегралов.

3.3. Общий случай $\left|\tilde{\Phi}_{k1}^{(1)}\right| \sim \left|\tilde{\Phi}_{k2}^{(1)}\right|$.

Неадиабатические переходы Ландау–Зинера

Рассмотрим согласно [10, § 90] квантовую систему из двух сталкивающихся атомов с квазипересече-

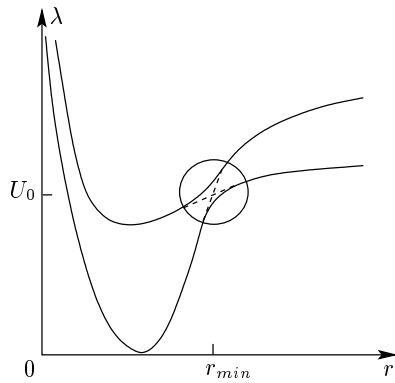


Рис. 3. Зависимость термов квазимолекулы, состоящей из двух сталкивающихся атомов, от расстояния между атомами

нием термов (рис. 3). В окрестности точки $r = r_{min}$ она описывается уравнениями

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dy_1}{dt} &= U_1 y_1 + V y_2, \\ i\hbar \frac{dy_2}{dt} &= U_2 y_2 + V y_1, \end{aligned} \quad (46)$$

где $U_{1,2} = U_{1,2}(r)$, $r = \varepsilon t$ — расстояние между атомами, ε — скорость их относительного движения, являющаяся малым параметром медленности, и $|V| \ll |U_{1,2}|$. Уравнения (46) приводятся к виду

$$y_1'' + i(U_1 + U_2)y_1' + (V^2 - U_1 U_2 + iU_1')y_1 = 0. \quad (47)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной $\hbar^{-1}t$. Сравнивая (47) с (2) видим, что здесь

$$b_1 = 0, \quad b_2 \mu' = iU_1'. \quad (48)$$

В нулевом по ε приближении уравнению (47) соответствует дисперсионное уравнение

$$\lambda^2 - (U_1 + U_2)\lambda + (V^2 - U_1 U_2) = 0, \quad (49)$$

где $-i\lambda \equiv p^{(0)}$.

Корнями уравнения (49) являются

$$\lambda_{1,2} = \frac{U_1 + U_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(U_1 - U_2)^2}{4} + V^2}. \quad (50)$$

Нетрудно видеть, что точке r_{min} минимального расстояния между термами отвечает условие $U_1(r_{min}) = U_2(r_{min}) = U_0$. При этом

$$\lambda_{mid} = U_0, \quad \delta\lambda = V. \quad (51)$$

Переходя к симметричным относительно среднего переменным (15)–(17), получим

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = \frac{(U_1 + U_2) - 2U_0}{2} \pm \sqrt{\frac{(U_1 - U_2)^2}{4} + V^2}. \quad (52)$$

Подставив теперь (48), (51) и (52) в выражения (20), (22) с учетом того, что $-i\lambda \equiv p^{(0)}$, найдем величины ВКБ-фаз в точке r_{min} :

$$\tilde{\Phi}_k^{(0)} = \pm V, \quad \tilde{\Phi}_{k_1}^{(1)} \approx \pm \frac{U_1'}{2V}, \quad \tilde{\Phi}_{k_2}^{(1)} \approx \mp \frac{U_1' + U_2'}{4V}.$$

Как видно, здесь фазы $\tilde{\Phi}_{k_1}^{(1)}$ и $\tilde{\Phi}_{k_2}^{(1)}$ являются величинами одного порядка, и надо пользоваться оценкой (25). В результате, переходя к производным по r , получим, что неадиабатические переходы между рассматриваемыми термами эффективны при

$$\frac{V^2}{\hbar\varepsilon \left| \frac{dU_1}{dr} - \frac{dU_2}{dr} \right|_{r=r_{min}}} \lesssim 1. \quad (53)$$

Эта формула с точностью до множителя порядка единицы описывает неадиабатические переходы в модели Ландау–Зинера. Если выполнена оценка (53), то вероятность неадиабатического перехода между термами при прохождении точки $r = r_{min}$ близка к единице, в обратном случае — экспоненциально мала.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше был предложен метод оценки эффективности линейной трансформации волн в плавно неоднородной среде при локальном сближении их характеристических показателей (фактически, показателей преломления). Этот же метод пригоден для оценки эффективности неадиабатических переходов при медленных атомных столкновениях. Он основан на ВКБ-формализме для скалярного линейного обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка [8]. По сравнению с известными методами комплексных фазовых интегралов [2–5] и векторным методом [1] он имеет следующие преимущества и недостатки.

1. Оценка эффективности взаимодействия волн предлагаемым методом практически не требует вычислений. В каждой конкретной ситуации необходимо знать лишь дисперсию волн в области взаимодействия и значения коэффициентов уравнения, чтобы воспользоваться условием (25) эффективности взаимодействия волн. Для часто встречающихся более простых случаев можно пользоваться оценками (23), (24). Так, если в уравнении отсутствуют члены, пропорциональные производным от параметров ($b_j \equiv 0$, $\tilde{\Phi}_{k_1}^{(1)} = 0$), то для оценки эффективности трансформации волн необходимо знать только дисперсию взаимодействующих волн (пример та-

кой задачи можно найти в [11]). Или если зависимости показателей преломления от координаты в точке их максимального сближения имеют горизонтальные касательные, то $\tilde{\Phi}_{k_2}^{(1)} = 0$ и можно использовать оценку (24) (пример п. 3.2).

2. Предлагаемый метод практически без изменений переносится на случай трех и более взаимодействующих волн (см. [11]).

3. Кроме того, этим методом столь же легко оценивается взаимодействие волн, когда плавно изменяются несколько параметров. Все формулы при этом остаются без изменений, только теперь под μ подразумевается набор s меняющихся параметров: $\mu \equiv (\mu_1, \dots, \mu_s) \in \mathbf{R}^s$, величины b_j также являются векторами в \mathbf{R}^s , которые сворачиваются в скалярном произведении с μ' .

4. Недостатком данного метода является то, что оценивая эффективность взаимодействия, он не указывает прямо на перераспределение энергии между взаимодействующими волнами. Однако, во-первых, в некоторых задачах достаточно только оценить эффективность взаимодействия (как, например, в [9]), а во-вторых, наличие перераспределения энергии обычно легко определить из других физических соображений (например, вида поляризации волн). Так, если выполнены обратные к (23)–(25) сильные неравенства, то взаимодействием волн можно пренебречь и использовать приближение геометрической оптики. Когда имеет место сильное неравенство в одном из условий (23)–(25), можно использовать приближение резкого скачка параметров и сшивать решения с близкими поляризациями (см. [11]).

5. Необходимо отметить, что существуют ситуации, когда данный метод неприменим, в то время как справедлив метод комплексных фазовых интегралов. Такая ситуация наблюдается, когда взаимодействие волн происходит вблизи точек отражения, где показатели преломления обращаются в нуль или бесконечность (см., например, взаимодействие квазипродольных волн в магнитоактивной плазме [2, 3]).

Возможно, общий формализм предлагаемого метода покажется более сложным и менее наглядным по сравнению, например, с методом [1]. Это естественно, поскольку если в других методах все вычисления необходимо проделывать каждый раз заново,

начиная с исходных уравнений, то здесь все основные расчеты выполнены при получении универсальных оценок (23)–(25). Приведенные примеры позволяют говорить о полном соответствии результатов, полученных данным методом, результатам, полученным классическими способами.

Помимо указанных приложений полученные результаты могут также применяться в механике и теории динамических систем. Условия (23)–(25) являются условиями нарушения адиабатического приближения при сближении собственных чисел системы общего вида (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский, УФН **141**, 2, 257 (1983).
2. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Наука, Москва (1967).
3. В. В. Железняков, *Радиоизлучение Солнца и планет*, Наука, Москва (1964).
4. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, Вопросы теории плазмы, вып. 7, Атомиздат, Москва (1973).
5. Е. А. Соловьев, УФН **157**, 3, 437 (1989).
6. Е. Е. Никитин, Б. М. Смирнов, *Медленные атомные столкновения*, Энергоатомиздат, Москва (1990).
7. В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский, Физическая энциклопедия, т. 2, Советская энциклопедия, Москва (1990), с. 584.
8. М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва (1983).
9. К. Ю. Блюх, Ю. Э. Любарский, Письма в АЖ **22**, 7, 539 (1996).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматгиз, Москва (1963).
11. К. Ю. Блюх, Радиофизика и радиоастрономия **3**, 49 (1998).