

ДИНАМИКА ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЛН БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В СЛАБОДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ С КВАДРАТИЧНОЙ И ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

А. В. Слюняев*

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603600, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 22 марта 2000 г.

Динамика локализованных волн исследуется в рамках модели, описываемой обобщенным уравнением Кортевега–де Вриза (КдВ) с учетом положительной кубической нелинейности (уравнением Гарднера). В частности, рассмотрен процесс взаимодействия двух солитонов и обсуждена динамика «дышащего» волнового пакета — бризера. Показано, что, в то время как взаимодействие солитонов одинаковой полярности происходит так же, как в случае уравнения КдВ или модифицированного уравнения КдВ, взаимодействие разнополярных солитонов имеет качественные отличия от классического примера. Показан случай «непредсказуемого» поведения бризера уравнения Гарднера.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Yv

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания нелинейных волновых процессов в средах с дисперсией одним из базовых является уравнение Кортевега–де Вриза (КдВ). Оно содержит нелинейный (квадратичный) и дисперсионный члены, возникающие в первом порядке теории возмущений по двум малым параметрам: амплитуде и волновому числу. Уравнение КдВ является одной из основных моделей для описания поверхностных и внутренних волн в океане, а также волн Россби и применимо для описания разнообразных волновых движений в атмосфере, плазме, астрофизике, линиях передач (см., например, [1–3]). В ряде физических приложений нелинейностью низшего порядка является кубическая нелинейность. В таком случае задача сводится к модифицированному уравнению Кортевега–де Вриза (МКдВ). Оно описывает, например, акустические волны в плазме, распространение упругой квазиплоской волны в решетке, внутренние океанические волны при определенной стратификации [4–6]. Если рассматривается решение модифицированного уравнения КдВ на пьедестале (стремя-

щееся на бесконечном удалении к константе), что часто соответствует наличию внешней удерживающей силы или потока, то такая задача описывается эволюционным уравнением с двумя нелинейными членами, являющимся обобщением уравнения КдВ и называемым уравнением Гарднера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (c + \alpha u + \alpha_1 u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (1)$$

Учет двух нелинейных членов в (1) соответствует случаю волн большой амплитуды. Коэффициенты в уравнении (1) могут принимать различные значения в зависимости от конкретного приложения. При решении физической задачи уравнение КдВ должно быть заменено уравнением Гарднера (1), когда коэффициент квадратичной нелинейности становится очень мал. Нелинейные коэффициенты в уравнении (1) могут иметь большую вариативность по величине, а также менять свой знак в реальных физических приложениях (например, в [7] представлен анализ нелинейных коэффициентов для модельных случаев стратификации внутренних волн в океане), что приводит к нетривиальным эффектам в трансформации волны [8–10]. Все три здесь упомянутые модели являются интегрируемыми методом обрат-

*E-mail: avs@appl.sci-nnov.ru

ной задачи рассеяния [11–14], обладают бесконечным набором сохраняющихся во времени интегралов и решениями в виде упруго взаимодействующих и распространяющихся без изменения формы уединенных волн — солитонов. Известно также, что в случае положительной кубической нелинейности уравнение МКдВ и уравнение Гарднера обладают бризерными решениями, соответствующими «дышащим» волновым пакетам [3, 15, 16]. Бризеры наравне с солитонами определяют асимптотику волнового поля. Уравнения КдВ и МКдВ давно стали классическими, и динамика солитонов в их рамках хорошо изучена (см., например, [1–3, 15]). Несмотря на возросший в последнее время интерес к нелинейным эволюционным уравнениям, включающим высшие нелинейные и дисперсионные члены (см., например, [17–19]), полностью интегрируемое уравнение Гарднера не было изучено с точки зрения особенностей солитонного взаимодействия. В работах [20, 21] было представлено исследование взаимодействия солитонов в случае отрицательной кубической нелинейности ($\alpha_1 < 0$). Была продемонстрирована особая роль предельного — «широкого» — солитона в эволюции волнового поля. Эффект особого взаимодействия с «широким» солитоном, при котором второй солитон изменяет свою полярность и движется по хребту «широкого» солитона, был недавно подтвержден в рамках полно-нелинейной модели двухслойной воды [22]. Волновая динамика уравнения Гарднера (1) с положительной кубической нелинейностью ($\alpha_1 > 0$) качественно отлична от таковой в предыдущем случае. Настоящая работа представляет собой исследование взаимодействия солитонов в рамках такого уравнения.

2. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАРДНЕРА

Для упрощения будем использовать безразмерные переменные, тогда (1) записывается для функции $v(y, \tau)$ как

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + 6v(1+v)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = 0. \quad (2)$$

Известно, что уравнение (2) обладает солитонными решениями, имеющими вид

$$v_{sol}(y, \tau) = \frac{\Gamma_1^2}{1 + s_1 \sqrt{1 + \Gamma_1^2} \operatorname{ch} Z_1}, \quad (3)$$

$$Z_1 = \Gamma_1(y - V_1 \tau - y_1), \quad V_1 = \Gamma_1^2, \quad s_1 = \pm 1.$$

Параметр Γ_1 задает размер солитона, выбор знака $s_1 = \pm 1$ определяет его полярность. Положительные

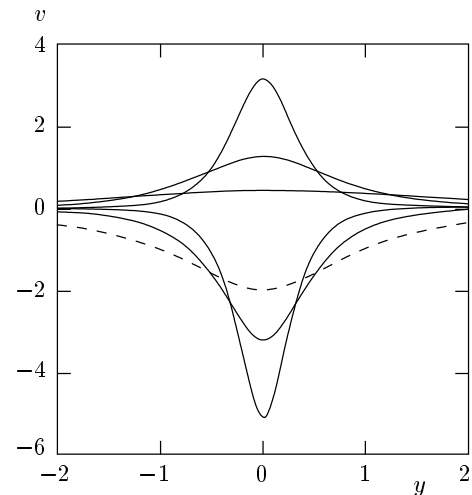


Рис. 1. Солитоны уравнения Гарднера с положительной кубической нелинейностью. Штриховая линия — «алгебраический» солитон

солитоны по форме совпадают с солитонами КдВ в пределе $\Gamma \rightarrow 0$ (малые амплитуды) и стремятся к солитонам МКдВ с ростом Γ (амплитуды) (рис. 1). Отрицательные солитоны не могут иметь амплитуду меньшую по модулю, чем критическая, равная

$$v_{cr} = -2. \quad (4)$$

Солитон с такой амплитудой (для него $\Gamma_1 = 0$, $s_1 = -1$) называется алгебраическим в силу того, что на бесконечности его величина убывает не по экспоненциальному закону, а по степенному (штриховая линия на рис. 1):

$$v_{alg}(y, \tau) = \lim_{\Gamma_1 \rightarrow 0} v_{sol}(y, \tau) = -\frac{2}{1 + y^2}. \quad (5)$$

Такой солитон неподвижен и неустойчив [16]. В пределе $\Gamma_1 \rightarrow \infty$ отрицательные солитоны по форме также стремятся к солитонам МКдВ.

Нужно отметить, что параметр Γ имеет ясный физический смысл: его квадрат равен скорости распространения уединенной волны V . В то время как в моделях КдВ и МКдВ большой солитон всегда являлся и быстрее, для уравнения Гарднера с положительной кубической нелинейностью такое утверждение справедливо лишь при сравнении солитонов одинаковой полярности.

Будучи интегрируемым, уравнение Гарднера обладает бесконечным рядом сохраняющихся интегра-

лов. Два простейших из них — интегралы массы и энергии,

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} v(y, \tau) dy, \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(y, \tau) dy, \quad (6)$$

— часто используются для качественных рассуждений и контроля точности численного эксперимента. Для солитонов (3) эти интегралы равны

$$\begin{aligned} M_{sol}^+ &= 2 \operatorname{arctg} \Gamma_1, \\ M_{sol}^- &= M_{sol}^+ - 2\pi, \\ E_{sol}^\pm &= 2\Gamma_{sol} - M_{sol}^\pm, \end{aligned} \quad (7)$$

где знаки «+» или «-» соответствуют полярности солитона.

Простейшее из мультисолитонных — двухсолитонное решение может быть получено как с использованием метода обратной задачи рассеяния, метода Хироты, так и с помощью процедуры преобразований Дарбу (эти методы были адаптированы к уравнению Гарднера с отрицательной кубической нелинейностью соответственно в [14, 23] и [21]). Наиболее компактно двухсолитонное решение уравнения (2) записывается как

$$\begin{aligned} v_{2sol}(y, \tau) &= \frac{i}{2} (\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2) \times \\ &\times \left(\frac{1}{\Gamma_2 \operatorname{cth} Z_{2+} - \Gamma_1 \operatorname{th} Z_{1+}} - \frac{1}{\Gamma_2 \operatorname{cth} Z_{2-} - \Gamma_1 \operatorname{th} Z_{1-}} \right), \\ Z_{j\pm} &= \frac{\Gamma_j}{2} (y - V_j \tau \pm \delta_j - y_j), \\ \operatorname{th}(\Gamma_j \delta_j) &= -i\Gamma_j, \\ V_j &= \Gamma_j^2, \quad j = 1, 2, \quad \Gamma_2 > \Gamma_1 > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение для $v_{2sol}(y, \tau)$ получено с помощью преобразований Дарбу (см. [21]) для уравнения (2) и описывает действительное решение, хотя комплексно по своей записи. Записанное в действительной форме оно, к сожалению, теряет свою простоту и наглядность:

$$\begin{aligned} v_{2sol}(y, \tau) &= (\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2) (\Gamma_2^2 d_{1+} - \Gamma_1^2 d_{2-}) \times \\ &\times [\Gamma_2^2 d_{1+} d_{2+} + \Gamma_1^2 d_{1-} d_{2-} + 2\Gamma_1 \Gamma_2 \times \\ &\times (\Gamma_1 \Gamma_2 - D_1 D_2 \operatorname{sh} Z_1 \operatorname{sh} Z_2)]^{-1}, \\ d_{j+} &= 1 + D_j \operatorname{ch} Z_j, \quad d_{j-} = 1 - D_j \operatorname{ch} Z_j, \\ D_j &= s_j \sqrt{1 + \Gamma_j^2}, \\ Z_j &= \Gamma_j (y - V_j \tau - y_j), \quad V_j = \Gamma_j^2, \\ s_j &= \pm 1, \quad j = 1, 2, \quad \Gamma_2 > \Gamma_1 > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Индекс j нумерует солитоны, знак $s_j = \pm 1$ в выражении для D_j определяет полярность каждого из взаимодействующих солитонов.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ

Полученные выражения (8), (9) описывают и позволяют изучить взаимодействие двух солитонов произвольной полярности. В рамках уравнения (2) невозможно стационарное существование двух солитонов с одинаковой скоростью, они будут немедленно взаимодействовать. Уже отмечалось, что амплитуда каждого из видов солитонов (положительного или отрицательного) монотонно зависит от скорости, однако из равноскоростных разнополярных солитонов отрицательный всегда больше по амплитуде (по ее абсолютной величине), и, соответственно, среди двух разнополярных солитонов одинаковой величины положительный всегда быстрее.

Солитоны одинаковой полярности качественно взаимодействуют аналогично солитонам КдВ или однополярным солитонам МКдВ: если их амплитуды различаются значительно, то происходит обгон с образованием одногорбого симметричного профиля; в противном случае — обмен энергией

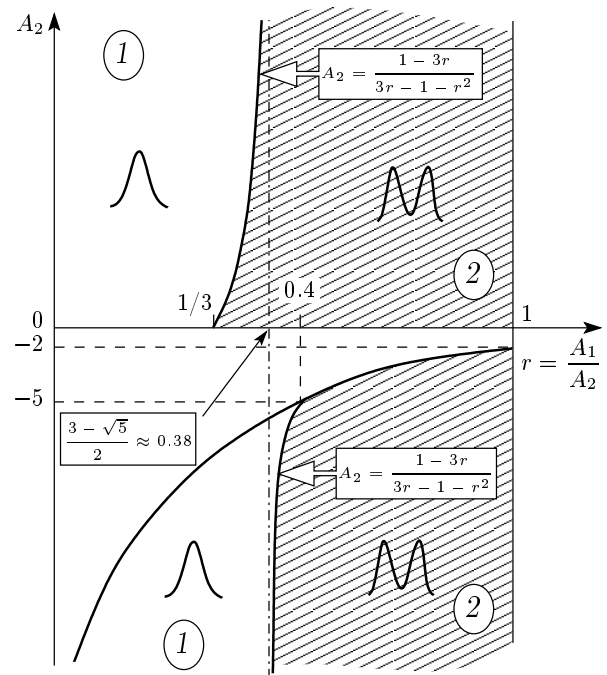


Рис. 2. Области параметров солитонов уравнения Гарднера, взаимодействующих по сценарию обгона (область 1) и обмена (область 2)

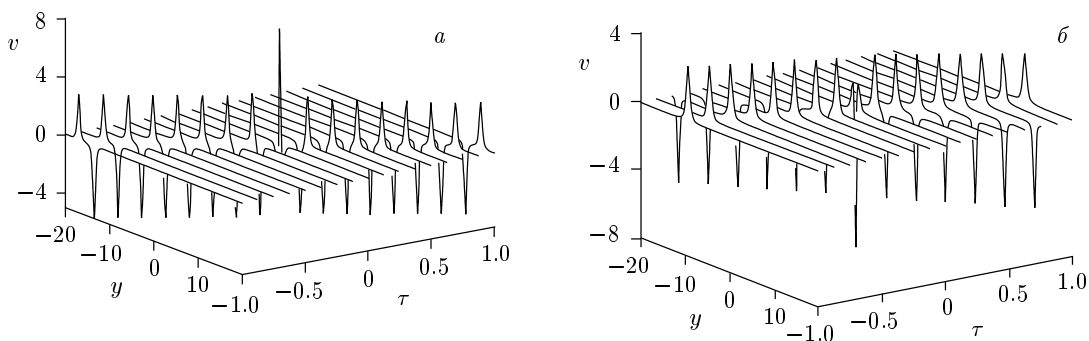


Рис. 3. Моделирование взаимодействия разнополярных солитонов уравнения Гарднера (а) в модифицированном уравнении КдВ с сохранением амплитуд солитонов (б). Параметры солитонов: $\Gamma_1 = 3.8$, $\Gamma_2 = 4$, $A_1 = -4.9$, $A_2 = 3.1$

без образования единого горба. Здесь удобно ввести в рассмотрение параметр отношения амплитуд $r = A_1/A_2$, где солитон с индексом 2 — быстрее, $\Gamma_2 > \Gamma_1$ (для однополярных солитонов $A_2 > A_1$, поэтому $0 < r < 1$). Тогда граничное значение такого параметра, разделяющее два возможных сценария взаимодействия, может быть найдено из двухсолитонного решения (9). Оно зависит от амплитуды взаимодействующих солитонов; график этой зависимости представлен на рис. 2. Кривая $A_2 = -2/r$, ограничивающая на рисунке область возможных параметров, появилась из-за наличия минимального из отрицательных солитонов — алгебраического. Для большей наглядности на рис. 2 не соблюдены масштабы построенных зависимостей. На самом деле для различных амплитуд A_2 параметр r имеет очень малый разброс значений, $0.33 < r < 0.38$ для положительных и $0.38 < r < 0.40$ для отрицательных солитонов, стремясь в пределе к величинам, соответствующим случаям уравнений КдВ (малые амплитуды) и МКдВ (бесконечно большие амплитуды). Поэтому учет в уравнении двух нелинейных членов не имеет качественного значения для описания взаимодействия однополярных солитонов.

Разнополярные солитоны уравнения Гарднера, так же как и в модели МКдВ, проходят друг через друга при взаимодействии, образуя в момент $\tau = 0$ одnogорбую симметричную фигуру. Для взаимодействующих солитонов уравнения Гарднера справедливо соотношение

$$v_2(y = 0, \tau = 0) = A_2 - A_1. \tag{10}$$

Для разнополярных солитонов это означает, что в момент образования симметричного профиля волны высота центральной точки равна разности амплитуд солитонов, поэтому разнополярные солитоны,

взаимодействуя, увеличивают амплитуду волны. Полярность такой суммарной волны определяется наиболее быстрым солитоном, что отличает эту задачу от аналогичной в модели МКдВ, где больший солитон был и быстрее. Отказ от учета квадратичной нелинейности в уравнении (2) при рассмотрении взаимодействующих разнополярных солитонов, т. е. попытка описания задачи уравнением МКдВ, может давать качественно другой результат (см. рис. 3). На рис. 3а приведен результат взаимодействия двух солитонов в рамках уравнения Гарднера (2), когда меньший (положительный) является более быстрым (параметры солитонов: $\Gamma_1 = 3.8$, $\Gamma_2 = 4$, $A_1 = -4.9$, $A_2 = 3.1$). В соответствии с вышесказанным при взаимодействии образуется положительная волна суммарной амплитуды (рис. 3а). Теперь промоделируем эту же задачу модифицированным уравнением КдВ. На рис. 3б приведен результат взаимодействия МКдВ-солитонов, амплитуды которых равны амплитудам солитонов уравнения Гарднера на рис. 3а. Величину суммарной волны в этом случае определяет больший солитон, и она имеет отрицательную полярность.

Наличие двух нелинейных членов в уравнении Гарднера также ведет к интересным особенностям в случае взаимодействия солитонов разных полярностей с малыми скоростями. Так как с уменьшением скорости амплитуда положительного солитона стремится к нулю, а отрицательного — остается не менее v_{cr} , то малый положительный солитон может быть неразличим на фоне большого отрицательного (рис. 4а). Однако если положительный солитон имеет большую скорость, то это повлечет резкую смену полярности волны в момент обгона (рис. 4б), а затем полярность волны восстанавливается.

В результате взаимодействия солитоны получа-

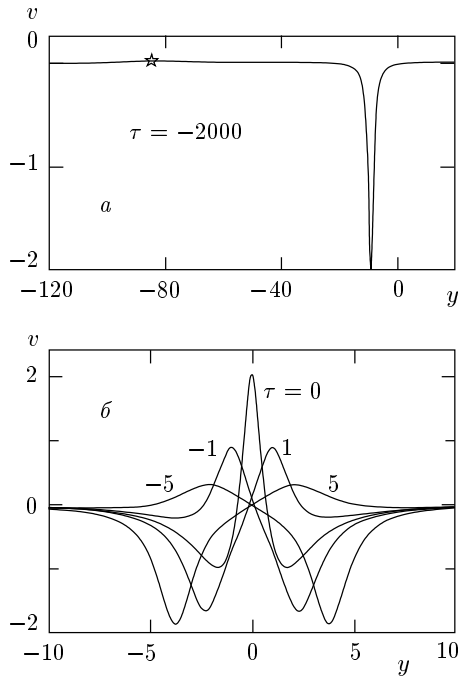


Рис. 4. Взаимодействие отрицательного солитона с положительным малой амплитуды, но большей скорости («непредсказуемый» солитон): *a* — до взаимодействия (положительный солитон отмечен звездочкой); *b* — резкое изменение полярности волны при взаимодействии

ют сдвиг координат (фаз), равный

$$\Delta y_{1,2} = \pm \frac{2}{\Gamma_{1,2}} \ln \frac{\Gamma_2 + \Gamma_1}{\Gamma_2 - \Gamma_1}, \quad (11)$$

как и в случаях уравнений КдВ и МКдВ.

4. НЕЛИНЕЙНЫЙ ВОЛНОВОЙ ПАКЕТ (БРИЗЕР)

Кроме солитонов уравнение Гарднера с положительной кубической нелинейностью обладает еще одним уединенным решением, соответствующим «дышащему» волновому пакету, — бризером. Бризер может возникнуть, например, в результате прохождения солитоном области смены знака квадратичной нелинейности [10], возмущения алгебраического солитона [16], либо из подходящего начального возмущения (в работе [24] рассмотрено возникновение бризера в рамках МКдВ-уравнения из начального антисимметричного возмущения). Выражение для бризера уравнения (2) было получено в [16] путем решения обратной задачи рассеяния. Бризерное решение также может быть получено из двухсолитонно-

го решения (8). Волновой пакет соответствует двум связанным разнополярым солитонам, параметры которых выбраны следующими:

$$\Gamma_2 = a + ib, \quad \Gamma_1 = a - ib, \quad (12)$$

$$a > 0, \quad b > 0.$$

Наиболее компактно бризер представляется выражением

$$v_{br}(y, \tau) = -2 \operatorname{Im}(\gamma^2) \times \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\gamma \operatorname{th} \left[\frac{\gamma}{2}(z + \delta) \right] - \gamma^* \operatorname{th} \left[\frac{\gamma^*}{2}(z^* - \delta^*) \right]} \right), \quad (13)$$

где

$$\delta = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{i + \gamma}{i - \gamma}, \quad \gamma = a + ib, \quad z = y - y_0 - \gamma^2 \tau.$$

В действительном виде (13) может быть записано как

$$v_{br}(y, \tau) = 2ab \times \frac{\operatorname{ch} \eta \cos \psi + \cos \theta \operatorname{ch} \varphi}{a \sin \theta \operatorname{ch} \varphi + b \operatorname{sh} \eta \cos \psi} + \frac{\operatorname{sh} \eta \sin \psi + \sin \theta \operatorname{sh} \varphi}{a \cos \theta \operatorname{sh} \varphi - b \operatorname{ch} \eta \sin \psi} \times \frac{b \operatorname{ch} \eta \sin \psi - a \cos \theta \operatorname{sh} \varphi}{b \operatorname{sh} \eta \cos \psi + a \sin \theta \operatorname{ch} \varphi} - \frac{b \operatorname{sh} \eta \cos \psi + a \sin \theta \operatorname{ch} \varphi}{a \sin \theta \operatorname{ch} \varphi + b \operatorname{sh} \eta \cos \psi} - \frac{a \cos \theta \operatorname{sh} \varphi - b \operatorname{ch} \eta \sin \psi}{a \cos \theta \operatorname{sh} \varphi - b \operatorname{ch} \eta \sin \psi}, \quad (14)$$

где

$$\eta = a(y - V_{br}\tau - y_{br}), \quad \theta = b(y - \omega\tau - y_{ph}),$$

$$V_{br} = a^2 - 3b^2, \quad \omega = 3a^2 - b^2,$$

$$\varphi = \operatorname{Re}(\gamma\delta), \quad \psi = \operatorname{Im}(\gamma\delta).$$

Движение бризера как целого происходит со скоростью V_{br} , величина ω отвечает скорости изменения заполняющей бризера, y_{br} и y_{ph} — произвольные действительные константы. При $b \gg a$ в волновом пакете присутствует большое число волновых сгустков (рис. 5а). Через время

$$T_{br} = \frac{\pi}{b(a^2 + b^2)} \quad (15)$$

бризер повторяет свою форму. Волновой пакет уравнения Гарднера стремится к кубическому бризеру МКдВ с ростом величины $(a^2 + b^2)$ (большие амплитуды или частое заполнение). Наличие в уравнении квадратичной нелинейности лишь сделало его несимметричным относительно уровня $v = 0$ (рис. 5).

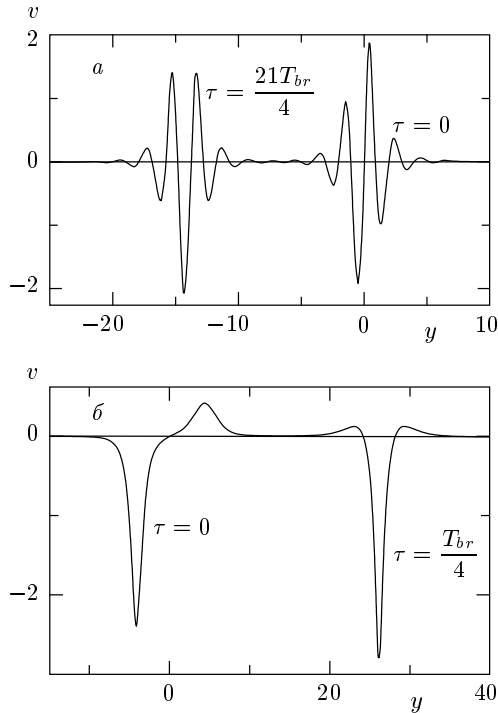


Рис. 5. Бризеры уравнения Гарднера: *a* — большое число волновых сгустков в пакете ($a = 1, b = 3$), *б* — два связанных солитона ($a = 1, b = 0.3$)

Интересен случай $a \gg b$: при этом движение бризера очень похоже на поочередный обгон друг друга, совершаемый двумя разнополярными солитонами (рис. 4, 5б). Из решения (14) следует, что в результате такого колебания двух разнополярных солитонов в составе бризера они расходятся на расстояние

$$L = \frac{2}{a} \ln \frac{2a}{b}. \tag{16}$$

Если рассматривать два солитона с близкими параметрами $\Gamma_{1,2} \approx a$ (близкие скорости), различающимися на малую величину b , то выражение (16) определяет фазовый сдвиг, приобретаемый такими солитонами в результате взаимодействия (ср. с формулой (11)). Таким образом, при $a \gg b$ бризер представляет собой два связанных разнополярных солитона с близкими скоростями. Они взаимодействуют, получая обычный для обгона сдвиг фаз, а затем догоняющий меняется с обогнанным ролями. До момента обгона догоняющий солитон в составе бризера ускоряется, а обгоняемый тормозится, после — наоборот — более быстрый солитон затормаживается, а медленный разгоняется (как при обычном взаимодействии). В такой интерпретации случай, когда один из солитонов в составе волнового пакета бли-

зок к алгебраическому, а другой очень широкий и маленький по амплитуде (a и b малы), также интересен: хорошо различимый отрицательный солитон в составе бризера периодически будет резко менять свою амплитуду из-за плохо различимого положительного, как в задаче взаимодействия двух солитонов (рис. 4, 5б).

Интегралы массы и энергии (6) для бризера определяются выражениями

$$\begin{aligned} M_{br} &= \int_{-\infty}^{\infty} v_{br}(y, \tau) dy = -4\psi - 2\pi, \\ E_{br} &= \int_{-\infty}^{\infty} v_{br}^2(y, \tau) dy = 4a - M_{br}. \end{aligned} \tag{17}$$

Энергия бризера увеличивается с ростом a и уменьшается с ростом b (с увеличением заполнения волнового пакета). Увеличение частоты заполнения волнового пакета приводит также к уменьшению массы по абсолютной величине, которая стремится к нулю при больших b . Масса бризера всегда отрицательна и максимальна по абсолютной величине (равна 2π) при a и b , стремящихся к нулю.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Детально изучено солитонное взаимодействие в рамках уравнения Гарднера, являющегося естественным обобщением уравнения КдВ и включающего члены квадратичной и положительной кубической нелинейностей одновременно. Для такого анализа используется найденное аналитическое двухсолитонное решение уравнения. Получено, что для описания динамики взаимодействия солитонов одной полярности учет двух нелинейных членов в уравнении не вносит качественных изменений по сравнению с рассмотрением волновой динамики в рамках классического или модифицированного уравнений Кортевега–де Вриза, достаточно учета в эволюционном уравнении лишь одного (доминирующего) нелинейного члена. Учет двух нелинейных слагаемых в уравнении имеет принципиальное значение при описании взаимодействия разнополярных солитонов, особенно солитонов с малыми скоростями. Полярность суммарной волны, образующейся при взаимодействии, определяется быстрее солитоном, поэтому большой солитон может резко менять свою полярность под действием малой волны противоположной полярности (рис. 4). «Дышащий» волновой пакет (бризер) становится

несимметричным при учете квадратичной нелинейности и также может демонстрировать сложное поведение, аналогичное поведению двух связанных солитонов (рис. 5, 4).

Работа проведена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-05-65576) и INTAS (грант № 99-1068). Автор благодарен Е. Н. Пелиновскому и Т. Г. Талиповой за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Мир, Москва (1980).
2. М. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia (1981).
3. Дж. Л. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, Москва (1983).
4. Т. Kakutani and H. Оно, *J. Phys. Soc. Jap.* **26**, 1305 (1969).
5. N. J. Zabusky, *Nonlinear Partial Differential Equations*, Academic, New York (1967).
6. И. С. Павлов, в сб. *Науч. тр. НГТУ*, Н. Новгород (1998), с. 18.
7. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, and T. Talipova, *Nonlin. Proc. Geophys.* **4**, 237 (1997).
8. C. J. Knickerbocker and A. C. Newell, *Phys. Lett. A* **75**, 326 (1980).
9. Т. Г. Талипова, Е. Н. Пелиновский, Р. Гримшоу, *Письма в ЖЭТФ* **65**, 113 (1997).
10. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, and T. Talipova, *Physica D* **132**, 40 (1999).
11. C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and K. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095 (1967).
12. В. Е. Захаров, А. В. Шабат, *ЖЭТФ* **61**, 118 (1971).
13. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, *Stud. Appl. Math.* **53**, 249 (1974).
14. J. W. Miles, *Tellus* **31**, 456 (1979).
15. M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jap.* **34**, 1289 (1973).
16. D. Pelinovsky and R. Grimshaw, *Phys. Lett. A* **229**, 165 (1997).
17. A. S. Fokas, *Physica D* **87**, 145 (1995).
18. T. R. Marchant and N. F. Smyth, *J. Appl. Math.* **56**, 157 (1996).
19. H. Michallet and E. Barthelemy, *J. Fluid Mech.* **366**, 159 (1998).
20. Е. Н. Пелиновский, А. В. Слюняев, *Письма в ЖЭТФ* **67**, 628 (1998).
21. А. В. Слюняев, Е. Н. Пелиновский, *ЖЭТФ* **116**, 318 (1999).
22. M. Miyata, *A Note on Broad and Narrow Solitary Waves. IPRC Report 00-01 SOEST 00-05*, Honolulu, Hawaii (2000).
23. Y. Chen and P. L.-F. Liu, *Wave motion* **24**, 169 (1996).
24. R. Grimshaw, P. Miller, E. Pelinovsky, and T. Talipova, *Chaos* **10**, 383 (2000).