

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ИЗЛУЧЕНИЕ НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ ВОДОРОДА И ДЕЙТЕРИЯ

*В. Г. Новиков^a, В. С. Воробьев^b, Л. Г. Дьячков^{*b}, А. Ф. Никифоров^a*

^a *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук
125047, Москва, Россия*

^b *Институт высоких температур Российской академии наук
127412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 5 июля 2000 г.

Рассматривается перенос излучения в неравновесной плазме во внешнем магнитном поле. Система кинетических уравнений, определяющих населенности атомных уровней, записана с учетом совокупности столкновительных и радиационных процессов и решается совместно с кинетическим уравнением для фотонов различных частот, испускаемых и поглощаемых в радиационных переходах из состояний непрерывного и дискретного спектров. Для нахождения формы спектральных линий решена квантовомеханическая задача об излучении атома в электрическом плазменном и внешнем магнитном полях с учетом эффекта Доплера. Развитый подход использован для модельного расчета переноса излучения в условиях, соответствующих периферийной плазме токамака, моделировавшейся однородным плоским слоем дейтериевой плазмы. Показано, что совместное действие внешнего магнитного и электрического плазменного полей оказывает существенное влияние на спектральные и интегральные характеристики излучения.

PACS: 32.60.+i, 32.70.-n

1. ВВЕДЕНИЕ

Для расчета излучения неравновесной плазмы необходимо определить концентрации всех излучающих компонент и решить уравнение переноса излучения для фотонов во всем спектральном интервале. При наличии реабсорбции излучения населенности нелинейно зависят от характеристик поля излучения, поэтому система кинетических уравнений баланса, определяющих населенности уровней, должна решаться совместно с уравнением переноса излучения. При наличии внешних и внутриплазменных полей задача осложняется необходимостью учета влияния этих полей на коэффициенты испускания и поглощения фотонов различных частот. Практическая необходимость в постановке подобных задач возникает, в частности, при исследовании процессов переноса излучения в низкотемпературной периферийной плазме токамака. Так, в дейтериевой пристеночной плазме токамака Alcator

C-Mod [1, 2] при температуре $T_e \sim 1$ эВ, плотности электронов $n_e \approx 3 \cdot 10^{15}$ см⁻³, плотности атомов $n_a \approx 10^{13}$ – 10^{16} см⁻³ и магнитном поле $B \approx 6$ – 8 Тл излучение в спектральных линиях играет определяющую роль в процессе переноса энергии. Из-за интенсивных процессов рекомбинации и выхода излучения с частичной реабсорбцией линий серии Лаймана плазма становится неравновесной. Процессы переноса весьма критичны к форме линий, на которую сильное влияние оказывают магнитное поле токамака и электрические поля, создаваемые ионами и электронами плазмы. В рассматриваемых условиях для нижних линий серий Лаймана и Бальмера эффекты Зеемана, Штарка и Доплера примерно одного порядка и поэтому должны учитываться одновременно.

Данная работа посвящена исследованию радиационных характеристик такой плазмы. Для этого уравнения радиационно-столкновительной кинетики возбужденных состояний решаются совместно с уравнением переноса излучения. Населенности определяются как путем непосредственного числен-

*E-mail: dyachk@mail.ru

ного решения этих уравнений, так и с помощью модифицированного диффузионного приближения [3]. Отдельную проблему представляет расчет контура спектральных линий. Для этой цели в работе получено решение квантовомеханической задачи о форме спектральных линий, испускаемых атомом в электрическом плазменном микрополе и внешнем магнитном поле при наличии эффекта Доплера. Учет влияния электрического микрополя, создаваемого ионами плазмы, проводится в квазистатическом приближении. Вместе с магнитным полем оно снимает вырождение и приводит к расщеплению спектральных линий на компоненты. При фиксированном ионном микрополе уширение компонент обусловлено взаимодействием с электронами плазмы и эффектом Доплера. Суммарные профили линий, найденные таким образом, усредняются по величине и направлению ионного микрополя и используются в уравнениях кинетики и переноса излучения. Рассматривалась простейшая геометрия излучающего объема — однородный плоский слой плазмы. При этом из-за наличия магнитного поля задача не является одномерной, что значительно усложняет расчеты. Учет магнитного поля может изменить энергию излучения, переносимую в спектральных линиях, и оказать существенное влияние на интенсивность и форму линий, выходящих из плазменного объема.

2. НАСЕЛЕННОСТИ УРОВНЕЙ

Населенности возбужденных состояний $n_k = n_k(\mathbf{r}, t)$ можно определить, исходя из уравнений поуровневой кинетики

$$\frac{dn_k}{dt} = \sum_{q=c,r} \sum_{k' \neq k} \left(W_{k'k}^{(q)} n_{k'} - W_{kk'}^{(q)} n_k \right). \quad (1)$$

Здесь k определяет состояние электрона, соответствующее дискретному уровню $k = 1, 2, \dots, k_m$ или непрерывному спектру $k = e$. Предполагается, что населенности уровней $k > k_m$ находятся в равновесии с непрерывным спектром, и эти уровни можно эффективно учесть, приписав их к непрерывному спектру e . Символом q обозначены столкновительные ($q = c$) процессы — возбуждение, ионизация, тушение, трехчастичная рекомбинация и радиационные ($q = r$) процессы — переходы в дискретном спектре, фоторекомбинация и фотоионизация. Вероятности $W_{nm}^{(q)}$ переходов $n \rightarrow m$ процесса q вычислялись по формулам из работы [4].

Образование и разрушение отрицательных и молекулярных ионов при температурах $T \sim 1$ эВ, как показывают оценки, не являются существенными для расчета населенностей возбужденных состояний и переноса излучения, поэтому рассматривалась плазма, состоящая из атомов, электронов и однократных положительных ионов.

В квазистационарном приближении, полагая $dn_k/dt = 0$, получаем систему алгебраических уравнений в столкновительно-радиационном приближении, которая решалась в заданном поле излучения. Кроме того, для сокращения времени счета, использовалось модифицированное диффузионное приближение (МДП), в котором для расчета населенностей были получены аналитические формулы [3]. Это приближение построено на аналогии между движением электрона в дискретном энергетическом пространстве атомных уровней и случайным блужданием броуновской частицы, что приводит к дискретному варианту уравнения Фоккера–Планка. Его решение непосредственно дает значения населенностей с учетом радиационных и столкновительных процессов (см. [3, стр. 133]).

В статье используются атомные единицы.

3. ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ

Спектральная интенсивность излучения на частоте ω с поляризацией ρ в некотором направлении, определяемом единичным вектором Ω ($\Omega = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$, где \mathbf{k} — волновой вектор электромагнитного излучения), в пренебрежении процессами рассеяния удовлетворяет уравнению переноса

$$\frac{dI_{\omega\rho}}{ds} + \kappa_{\omega\rho} I_{\omega\rho} = j_{\omega\rho}, \quad (2)$$

где s — координата по лучу вдоль заданного направления, $j_{\omega\rho}$ — объемная излучательная способность, $\kappa_{\omega\rho}$ — коэффициент поглощения с учетом вынужденного испускания. Решение (2) имеет вид

$$I_{\omega\rho}(s) = \int_{-\infty}^s j_{\omega\rho}(s') \exp\left(-\int_{s'}^s \kappa_{\omega\rho}(s'') ds''\right) ds'. \quad (3)$$

Для изолированной спектральной линии, соответствующей переходу $n \rightarrow m$, в приближении полного перераспределения по частоте и поляризации

$$j_{\omega\rho}^{nm}(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{\omega}{4\pi} A_{nm} n_n(\mathbf{r}) \frac{1}{2} \Phi_{\omega\rho}^{nm}(\mathbf{r}, \Omega), \quad (4)$$

где A_{nm} — коэффициент Эйнштейна для спонтанного испускания фотона, $\Phi_{\omega\rho}^{nm}(\mathbf{r}, \Omega)$ — нормированный

на единицу профиль линии для такого испускания в направлении Ω . В присутствии магнитного поля \mathbf{B} излучательная способность и коэффициент поглощения зависят как от величины магнитного поля, так и от его направления. При наличии выделенного направления существенной может оказаться анизотропия свойств плазмы, поэтому в общем случае электромагнитное излучение определяется четырьмя параметрами Стокса. В оптически неактивной среде при условии полного перемешивания поляризаций достаточно записать уравнения переноса отдельно для каждой поляризации. Для выполнения условий полного перераспределения по частоте и поляризации необходимо, чтобы частота столкновений атома с электронами была много больше частоты излучательных переходов.

В случае плоского слоя плазмы ($0 \leq z \leq L$) в однородном магнитном поле, направленном под углом β к оси z (перпендикулярной слою), интенсивность излучения (3), выходящего из слоя в направлении $\Omega(\vartheta, \varphi)$ (ϑ — угол между направлением луча Ω и осью z , φ — угол между проекциями Ω и \mathbf{B} на плоскость, перпендикулярную оси z), можно записать в виде

$$I_\omega(\vartheta, \varphi) = \sum_\rho I_{\omega\rho}(z, \vartheta, \varphi) \Big|_{z=L} = \frac{1}{\cos \vartheta} \times \sum_\rho \int_0^L j_{\omega\rho}(z, \chi) \times \exp\left(-\frac{1}{\cos \vartheta} \int_z^L \kappa_{\omega\rho}(z', \chi) dz'\right) dz, \quad (5)$$

где χ — угол между Ω и \mathbf{B} :

$$\cos \chi = \cos \beta \cos \vartheta + \sin \beta \sin \vartheta \cos \varphi. \quad (6)$$

В задаче о потерях энергии плазмы на излучение представляет интерес мощность излучения, выносимая через единичную площадку на поверхности слоя. Для спектральной линии $n \rightarrow m$ выход излучения в полупространство, соответствующее положительному направлению оси z , определяется выражением

$$J_{nm} = \int d\omega \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_\rho I_{\omega\rho}(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta = \frac{\omega_{nm}}{4\pi} A_{nm} \int_0^L dz n_n(z) \int d\omega \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2} \sum_\rho \Phi_{\omega\rho}^{nm}(z, \chi) \times \exp\left(-\int_z^L \frac{\kappa_{\omega\rho}(z', \chi) dz'}{\cos \vartheta}\right), \quad (7)$$

где учтено, что ширина линии много меньше частоты излучения ω_{nm} .

В уравнения поуровневой кинетики (1) процессы излучения и поглощения в спектральной линии $n \rightarrow m$ входят в виде комбинации

$$W_{nm}^{(r)}(\mathbf{r})n_n(\mathbf{r}) - W_{mn}^{(r)}(\mathbf{r})n_m(\mathbf{r}) = A_{nm}n_n(\mathbf{r}) + \frac{1}{c} \int d\omega \int d\Omega \times \sum_\rho \left[B_{nm}n_n(\mathbf{r})\tilde{\Phi}_{\omega\rho}^{nm}(\mathbf{r}, \Omega) - B_{mn}n_m(\mathbf{r})\Phi_{\omega\rho}^{mn}(\mathbf{r}, \Omega) \right] I_{\omega\rho}^{nm}(\mathbf{r}, \Omega). \quad (8)$$

Здесь c — скорость света; B_{mn} , B_{nm} — коэффициенты Эйнштейна для поглощения и индуцированного испускания; $\Phi_{\omega\rho}^{mn}(\mathbf{r}, \Omega)$, $\tilde{\Phi}_{\omega\rho}^{nm}(\mathbf{r}, \Omega)$ — соответствующие этим процессам профили спектральных линий для излучения в направлении Ω ; $d\Omega$ — элемент телесного угла для направления излучения ($d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$). Величина (8) определяет число фотонов, соответствующих переходу $n \rightarrow m$, выходящих из единичного объема плазмы около точки \mathbf{r} в единицу времени. Удобно ввести так называемую эффективную вероятность излучения

$$A_{nm}^*(\mathbf{r}) = A_{nm} - \frac{1}{n_n(\mathbf{r})} \int \frac{d\omega}{\hbar\omega} \int d\Omega \times \sum_\rho \kappa_{\omega\rho}(\mathbf{r}, \Omega) I_{\omega\rho}^{nm}(\mathbf{r}, \Omega), \quad (9)$$

где $\kappa_{\omega\rho}(\mathbf{r}, \Omega)$ — коэффициент поглощения, соответствующий данной изолированной линии,

$$\kappa_{\omega\rho}(\mathbf{r}, \Omega) = -\frac{\omega}{c} \times \left[B_{nm}n_n(\mathbf{r})\tilde{\Phi}_{\omega\rho}^{nm}(\mathbf{r}, \Omega) - B_{mn}n_m(\mathbf{r})\Phi_{\omega\rho}^{mn}(\mathbf{r}, \Omega) \right].$$

Соотношения (8) и (9) носят общий характер и справедливы для произвольной геометрии излучающей системы. Используя (9), для радиационной части уравнений поуровневой кинетики вместо (8) имеем

$$W_{nm}^{(r)}(\mathbf{r})n_n(\mathbf{r}) - W_{mn}^{(r)}(\mathbf{r})n_m(\mathbf{r}) = A_{nm}^*n_n(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Подставляя решение уравнения переноса в виде (3) и излучательную способность (4) в (9), получим

$$A_{nm}^*(\mathbf{r}) = A_{nm} \left[1 - \frac{1}{n_n(\mathbf{r})} \int n_n(\mathbf{r}') \mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right], \quad (11)$$

где интеграл берется по всему объему плазмы и

$$\mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{1}{2} \sum_{\rho} \int \kappa_{\omega\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \Phi_{\omega\rho}^{nm}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}) \times \\ \times \exp \left(- \int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \kappa_{\omega\rho}(\mathbf{r}'', \mathbf{\Omega}) dq \right) d\omega.$$

Здесь точка \mathbf{r}'' пробегает по прямой от точки \mathbf{r} до точки \mathbf{r}' , причем

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad q = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|.$$

Следуя [5], предположим, что $n_n(\mathbf{r})$ является медленно меняющейся функцией \mathbf{r} , по крайней мере, в подавляющей части области интегрирования; тогда $n_n(\mathbf{r}')$ в (11) можно вынести из-под знака интеграла. Как показывают расчеты, для модельной задачи со слоем плазмы толщиной L такое предположение хорошо выполняется, так как на всей толщине слоя $n_n(\mathbf{r})$ слабо меняется за исключением узких приповерхностных областей ($z \approx 0, z \approx L$) толщиной $\Delta z \ll L$, дающих малый вклад в интеграл (см. разд. 5).

В итоге для эффективной вероятности излучения A_{nm}^* в рассматриваемой задаче с плоским слоем получаем

$$A_{nm}^*(z) = A_{nm} [\Theta_{nm}(z, 0) + \Theta_{nm}(z, L)], \quad (12)$$

$$\Theta_{nm}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} - \frac{\delta}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} d\omega \int_{(\pi/2)(1-\delta)}^{\pi/2} \text{tg } \vartheta d\vartheta \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2} \sum_{\rho} \kappa_{\omega\rho}(z_1, \chi) \Phi_{\omega\rho}^{nm}(z, \chi) \times \\ \times \exp \left(- \int_{z_1}^z \frac{\kappa_{\omega\rho}(z', \chi) dz'}{\cos \vartheta} \right), \quad (13)$$

где $\delta = 1$ при $z_2 > z_1$ и $\delta = -1$ при $z_1 > z_2$.

В отсутствие магнитного поля

$$\Theta_{nm}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int d\omega \kappa_{\omega}(z_1) \times$$

$$\times \int_{z_<}^{z_>} \Phi_{\omega}^{nm}(z) E_1 \left(\left| \int_{z_1}^z \kappa_{\omega}(z') dz' \right| \right) dz, \quad (14)$$

где $z_<, z_>$ — соответственно меньшее и большее из z_1 и z_2 , $E_1(y)$ — интегральная экспонента:

$$E_1(y) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-yt}}{t} dt.$$

4. ПРОФИЛЬ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Задача об атоме водорода в скрещенных электрическом и магнитном полях рассматривалась в целом ряде работ как аналитически в рамках теории возмущений [6–9], так и путем численного решения уравнений для случая сверхсильных магнитных полей [10, 11]. Значительно более сложная проблема уширения спектральных линий, когда излучающий атом находится под действием внешнего магнитного поля и внутриплазменного флуктуирующего электрического микрополя, детально исследована в [12–14] в квазистатическом приближении для ионов, рассчитаны первые две лаймановские и одна бальмеровская линия. В [14] учтено доплеровское уширение. В недавней работе [15] исследовано влияние ионной динамики.

Внешнее магнитное поле и электрические поля, создаваемые ионами и электронами плазмы, оказывают сильное влияние на форму спектральных линий. Как правило, ионы можно рассматривать в квазистатическом приближении, в то время как электроны — в ударном приближении [16]. В скрещенных электрическом и магнитном полях снимается вырождение и спектральные линии, соответствующие переходам между уровнями с главными квантовыми числами \bar{n} и n , расщепляются на отдельные компоненты. Структура этого расщепления является более сложной, чем в присутствии одного из полей. Сдвиг каждой компоненты и ее интенсивность зависят от величины магнитного поля \mathbf{B} , величины квазистатического ионного микрополя \mathbf{E} и угла между векторами \mathbf{E} и \mathbf{B} . Кроме того, интенсивность компоненты (но не сдвиг) зависит от направления распространения излучения $\mathbf{\Omega}$, точнее, от углов между $\mathbf{\Omega}$ и векторами \mathbf{E} и \mathbf{B} . Профиль каждой компоненты определяется эффектом Доплера и взаимодействием атома со свободными электронами. Суммарный профиль линии для перехода $\bar{n} \rightarrow n$ можно вычис-

лить путем усреднения по величине и направлению квазистатического ионного микрополя:

$$\Phi_{\omega\rho}^{\bar{n}n}(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int P(E) \times \sum_{\bar{\nu}\nu} R_{\bar{\nu}\nu\rho}(\mathbf{E}) \phi_{\bar{\nu}\nu\rho}(\omega, \mathbf{E}) d\mathbf{E}. \quad (15)$$

Здесь $P(E)$ — функция распределения вероятностей электрического ионного (квазистатического) микрополя, которая предполагается изотропной; $R_{\bar{\nu}\nu\rho}(\mathbf{E})$, $\phi_{\bar{\nu}\nu\rho}(\omega, \mathbf{E})$ — относительная интенсивность и контур отдельной компоненты $\bar{\nu} \rightarrow \nu$, на которые расщепляется переход $\bar{n} \rightarrow n$ в заданных магнитном \mathbf{B} и электрическом \mathbf{E} полях (здесь и далее в этом разделе зависимость от магнитного поля и от \mathbf{r} в явном виде не отражается). Через $\bar{\nu}, \nu$ обозначены наборы квантовых чисел, определяющих начальное и конечное состояния каждой компоненты (см. ниже).

В данной работе, в отличие от [12–14], где энергетическая матрица диагонализировалась численно в базисе собственных состояний момента количества движения, развит подход, использующий для расщепления уровней аналитические результаты [6]. Это позволяет в аналитическом виде представить дипольные матричные элементы между базисными волновыми функциями.

Профиль каждой компоненты определяется эффектом Доплера и взаимодействием атома со свободными электронами, эти механизмы считаются статистически независимыми и результирующий контур $\phi_{\bar{\nu}\nu\rho}(\omega, \mathbf{E})$ вычисляется в виде свертки соответствующих профилей

$$\phi_{\bar{\nu}\nu\rho}(\omega, \mathbf{E}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} D_{\bar{\nu}\nu}} \times \int \psi_{\bar{\nu}\nu\rho}(\omega - \omega_{\bar{\nu}\nu} - s, \mathbf{E}) \exp[-(s/D_{\bar{\nu}\nu})^2] ds, \quad (16)$$

где $\omega_{\bar{\nu}\nu}$ — положение центра компоненты $\bar{\nu} \rightarrow \nu$,

$$D_{\bar{\nu}\nu} = (\omega_{\bar{\nu}\nu}/c)(2T_a/M)^{1/2}$$

— доплеровский параметр уширения, T_a — температура атомов, M — масса атома. Для электронного профиля $\psi_{\bar{\nu}\nu\rho}(\omega, \mathbf{E})$ используется приближение, предложенное Ситоном [17] для расчета уширения штарковских компонент электронами. В данном случае расщепление линий связано с комбинацией эффектов Штарка и Зеемана, что накладывает определенную специфику на их профили и требует некоторой модификации теории [17]. Этот вопрос рассмотрен в Приложении.

Относительные интенсивности компонент $\bar{\nu} \rightarrow \nu$ в дипольном приближении определяются выражением

$$R_{\bar{\nu}\nu\rho} = \frac{|\mathbf{e}_\rho \langle \nu | \mathbf{r} | \bar{\nu} \rangle|^2}{\sum_{\bar{\nu}\nu} |\mathbf{e}_\rho \langle \nu | \mathbf{r} | \bar{\nu} \rangle|^2} = \frac{2\omega_{\bar{n}n}}{n^2 f_{n\bar{n}}} |\mathbf{e}_\rho \langle \nu | \mathbf{r} | \bar{\nu} \rangle|^2, \quad (17)$$

где \mathbf{e}_ρ — единичный вектор поляризации фотона, $f_{n\bar{n}}$ — полная сила осциллятора перехода $n \rightarrow \bar{n}$.

Линии полагаются изолированными, для этого характерная ширина линии должна быть меньше расстояния между ними, что при заданной линии накладывает ограничения на величину магнитного поля и плотность плазмы:

$$B < c/\bar{n}^4, \quad n_e < 0.05/\bar{n}^{15/2}. \quad (18)$$

Заметим, что обычное в теории уширения атомных спектральных линий приближение прямолинейности классических траекторий возмущающих электронов не приводит к дополнительному ограничению на величину магнитного поля. Действительно, это условие требует, чтобы ларморовская частота была меньше плазменной или $B < \sqrt{8\pi c^2 n_e}$. Но последнее неравенство, как легко проверить, всегда выполняется, если справедливы (18). Спин-орбитальным взаимодействием можно пренебречь, так как расщепление тонкой структуры при температурах $T \sim 1$ эВ, характерных для диверторной плазмы, меньше доплеровской ширины уровней.

Как было показано в рамках старой боровской теории Эпштейном (см. [18, 19]), совместное влияние магнитного и электрического полей на орбиту электрона в состоянии с главным квантовым числом n и орбитальным квантовым числом ℓ в первом приближении по полю может быть описано как равномерная и независимая прецессия векторов

$$\frac{3}{2} n \mathbf{L} \mp \mathbf{r}_a$$

(\mathbf{L} — момент количества движения, \mathbf{r}_a — радиус-вектор электрона, усредненный по орбитальному движению) с угловыми скоростями соответственно

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2c} \mathbf{B} \mp \frac{3}{2} n \mathbf{E}. \quad (19)$$

В этом же приближении получены поправки к энергии электрона [18]. Квантовомеханическое рассмотрение дает в первом порядке теории возмущений тот же самый результат [6]. Гамильтониан \mathcal{H} записывается в виде суммы

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$$

невозмущенного гамильтониана

$$\mathcal{H}_0 = -\Delta/2 - r^{-1}$$

и возмущения

$$\mathcal{H}_1 = (2c)^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{r},$$

которое в подпространстве состояний с заданным n можно представить в виде

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} - \frac{3}{2} n \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \omega_1 \mathbf{I}_1 + \omega_2 \mathbf{I}_2,$$

где

$$\mathbf{I}_{1,2} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} \pm \mathbf{A}),$$

\mathbf{A} — вектор Рунге–Ленца, удовлетворяющий в этом подпространстве соотношению [6]

$$\mathbf{A} = -2\mathbf{r}/3n.$$

Операторы $\mathbf{I}_{1,2}$ коммутируют с \mathcal{H}_0 и подчиняются обычным перестановочным соотношениям для оператора углового момента. Отсюда следует, что

$$I_1^2 = I_2^2 = j(j+1),$$

где j определяется числом возможных состояний, т. е. $2(2j+1)^2 = 2n^2$, и следовательно, $j = (n-1)/2$, причем проекции \mathbf{I}_1 на ось ω_1 и \mathbf{I}_2 на ось ω_2 (будем обозначать их через n' и n'' , соответственно) могут принимать $2j+1$ целых или полуцелых значений $-j, -j+1, \dots, j-1, j$.

В первом порядке теории возмущений

$$\varepsilon_{nn'n''m_s} = -\frac{1}{2n^2} + \omega_1 n' + \omega_2 n'' + \frac{1}{c} B m_s, \quad (20)$$

где $m_s = \pm 1/2$ — проекция спина на ось, направленную вдоль магнитного поля.

Соответствующую волновую функцию $\psi_{nn'n''}$ можно записать в виде линейной комбинации волновых функций в параболических координатах с осью z , направленной вдоль электрического поля \mathbf{E} :

$$\psi_{nn'n''} = \sum_{i_1=-j}^j \sum_{i_2=-j}^j d_{n'i_1}^j(\alpha_1) d_{n''i_2}^j(\alpha_2) \psi_{ni_1i_2}, \quad (21)$$

где $d_{kk'}^j(\alpha) = D_{kk'}^j(0, \alpha, 0)$ — функция Вигнера [20], соответствующая повороту вокруг оси z на угол α , $\psi_{ni_1i_2} \equiv \psi_{n_1n_2m}$ — волновые функции в параболических координатах. В данном случае эти функции удобно характеризовать квантовыми числами i_1, i_2 , которые являются проекциями операторов $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ на

ось z и связаны с обычными параболическими квантовыми числами n_1, n_2 и магнитным квантовым числом m ($n_1 + n_2 + |m| + 1 = n$) следующими соотношениями:

$$i_1 + i_2 = m, \quad i_1 - i_2 = n_2 - n_1.$$

Углы α_1 и α_2 — это углы между \mathbf{E} и соответственно векторами ω_1 и ω_2 , т. е.

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{(1/2c)B \cos \vartheta' \mp (3/2)nE}{\omega_{1,2}},$$

где ϑ' — угол между \mathbf{E} и \mathbf{B} .

Сдвиг компоненты $\bar{\nu} \rightarrow \nu$ (ν обозначает совокупность квантовых чисел $nn'n''$) относительно центра линии, пренебрегая спин-орбитальным взаимодействием, получим из (20):

$$\omega_{\bar{\nu}\nu} - \omega_{\bar{n}n} = \bar{\omega}_1 \bar{n}' + \bar{\omega}_2 \bar{n}'' - \omega_1 n' - \omega_2 n''.$$

Дипольные матричные элементы, входящие в (17), с волновыми функциями (21) могут быть представлены в виде линейных комбинаций матричных элементов, вычисленных в параболических координатах. Пусть $e_{\rho x}, e_{\rho y}, e_{\rho z}$ — декартовы координаты единичного вектора поляризации \mathbf{e}_ρ в системе координат с осью z вдоль \mathbf{E} и осью x , лежащей в плоскости векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} . Тогда

$$\mathbf{e}_\rho \langle \nu | \mathbf{r} | \bar{\nu} \rangle = \sum_{a=x,y,z} e_{\rho a} \langle \nu | a | \bar{\nu} \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle \nu | a | \bar{\nu} \rangle &\equiv \langle nn'n'' | a | \bar{n}\bar{n}'\bar{n}'' \rangle = \\ &= \sum_{i_1=-j}^j \sum_{i_2=-j}^j \sum_{\bar{i}_1=-\bar{j}}^{\bar{j}} \sum_{\bar{i}_2=-\bar{j}}^{\bar{j}} d_{n'i_1}^j(\alpha_1) \times \\ &\times d_{n''i_2}^j(\alpha_2) d_{\bar{n}'\bar{i}_1}^{\bar{j}}(\bar{\alpha}_1) d_{\bar{n}''\bar{i}_2}^{\bar{j}}(\bar{\alpha}_2) \times \\ &\times \langle n_1 n_2 m | a | \bar{n}_1 \bar{n}_2 \bar{m} \rangle, \quad (22) \end{aligned}$$

где матричные элементы в параболических координатах $\langle n_1 n_2 m | a | \bar{n}_1 \bar{n}_2 \bar{m} \rangle$ вычисляются по формулам Гордона [21].

Один из векторов поляризации \mathbf{e}_1 направим по нормали к плоскости векторов Ω и \mathbf{B} , а другой, \mathbf{e}_2 , выберем лежащим в этой плоскости и перпендикулярным Ω . Усреднение по направлениям \mathbf{E} в (15) удобно провести в системе координат, связанной с магнитным полем. Пусть φ' — угол между проекциями векторов Ω и \mathbf{E} на плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{B} . Тогда

$$e_{1x} = \cos \vartheta' \sin \varphi', \quad e_{1y} = \cos \varphi', \quad e_{1z} = \sin \vartheta' \sin \varphi';$$

$$e_{2x} = -\cos \chi \cos \vartheta' \cos \varphi' - \sin \chi \sin \vartheta',$$

$$e_{2y} = \cos \chi \sin \varphi',$$

$$e_{2z} = -\cos \chi \sin \vartheta' \cos \varphi' + \sin \chi \cos \vartheta',$$

где угол χ определен в (6).

Функция Вигнера $d_{kk'}^j(\alpha)$ в (21) и (22) может быть выражена через полиномы Якоби [20]:

$$d_{kk'}^j(\alpha) = \xi_{kk'} \left[\frac{s!(s+\mu+\nu)!}{(s+\mu)!(s+\nu)!} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^\mu \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^\nu P_s^{(\mu,\nu)}(\cos \alpha),$$

где

$$\mu = |k - k'|, \quad \nu = |k + k'|, \quad s = j - \frac{1}{2}(\mu + \nu),$$

$$\xi_{kk'} = \begin{cases} 1 & \text{при } k' \geq k, \\ (-1)^{k'-k} & \text{при } k' < k. \end{cases}$$

Полиномы Якоби $P_s^{(\mu,\nu)}$ удобно вычислять с помощью рекуррентных соотношений [22].

В расчете уширения электронами мы используем приближение, при котором профили отдельных компонент не зависят от угла φ' (см. Приложение). В этом случае интегрирование по φ' в (15) проводится аналитически, что в итоге дает

$$\Phi_{\omega\rho}^{\bar{n}n} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dE P(E) \times$$

$$\times \sum_{\nu\bar{\nu}} \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' \phi_{\bar{\nu}\nu\rho}(\omega, \vartheta') \langle R_{\bar{\nu}\nu\rho} \rangle, \quad (23)$$

$$\langle R_{\bar{\nu}\nu\rho} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{\bar{\nu}\nu\rho} d\varphi'. \quad (24)$$

При $\rho = 1$ имеем

$$\langle R_{\bar{\nu}\nu 1} \rangle = \frac{\omega_{\bar{n}n}}{n^2 f_{n\bar{n}}} [(x_\nu^{\bar{\nu}} \cos \vartheta' + z_\nu^{\bar{\nu}} \sin \vartheta')^2 + (y_\nu^{\bar{\nu}})^2],$$

а при $\rho = 2$

$$\langle R_{\bar{\nu}\nu 2} \rangle = \frac{\omega_{\bar{n}n}}{n^2 f_{n\bar{n}}} \{ 2 \sin^2 \chi (x_\nu^{\bar{\nu}} \sin \vartheta' - z_\nu^{\bar{\nu}} \cos \vartheta')^2 +$$

$$+ \cos^2 \chi [(x_\nu^{\bar{\nu}} \cos \vartheta' + z_\nu^{\bar{\nu}} \sin \vartheta')^2 + (y_\nu^{\bar{\nu}})^2] \},$$

где матричные элементы $a_\nu^{\bar{\nu}} \equiv \langle \nu | a | \bar{\nu} \rangle$ ($a = x, y, z$) определяются выражением (22).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассматривался плоский слой однородной дейтериевой плазмы при температуре $T_e = 1$ эВ, плотности электронов $n_e = 3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ и плотностях атомов $n_a = 10^{13} - 10^{16} \text{ см}^{-3}$, моделирующий плазму различной оптической плотности. Хотя полная плотность атомов для определенности полагалась фиксированной, населенности отдельных уровней зависят, в частности, от оптической плотности слоя и являются функцией координаты z (ось z перпендикулярна плоскости слоя). Чтобы выяснить степень влияния магнитного поля на перенос излучения, были проведены расчеты как без магнитного поля ($B = 0$), так и с магнитным полем $B = 8$ Тл, направленным под разными углами к плоскости слоя. В рассматриваемых условиях эффекты Зеемана, Штарка и Доплера для нижних линий серий Лаймана и Бальмера одного порядка, что требует их одновременного учета. Соответствующие величины приведены в таблице; электронная ширина оценена по приближенной формуле [23, 24], штарковский сдвиг — как второй член справа в формуле (19) для верхнего уровня перехода в нормальном (хольцмарковском) поле ионов, сдвиг в магнитном поле — как первый член в той же формуле.

В расчетах полагалось, что профили спектральной линии, соответствующие спонтанному испусканию, поглощению и индуцированному испусканию одинаковы, что соответствует приближению полного перераспределения фотонов по частоте [25]. Статическое приближение для ионов игнорирует участие столкновений с ними в этом перераспределении. Однако в рассматриваемых условиях достаточно полное перераспределение достигается за счет ударных столкновений с электронами и эффекта Доплера. Частота столкновений с электронами намного превосходит вероятность спонтанного излучения, а перекрытие зееман-штарковских компонент обеспечивает перераспределение по частотам в пределах всего профиля линии (см. таблицу).

Заметим, что в центральной области спектральных линий использование квазистатического приближения для ионов является некорректным. В отсутствие магнитного поля для линии $Ly-\alpha$ ширина этой области порядка ширины самой линии. Поэтому точность расчета профиля $Ly-\alpha$ меньше, чем для других линий. Однако при наличии магнитного поля ширина линии существенно увеличивается и относительная роль ионной динамики снижается. Поэтому «включение» магнитного поля несколько улучшает точность расчета профиля линий, а

Параметры уширения линий (в эВ) для различных механизмов, ответственных за уширение, в плазме дейтерия при $T_e = 1$ эВ, $n_e = 3 \cdot 10^{15}$ см⁻³, $n_a = 3 \cdot 10^{15}$ см⁻³, $B = 8$ Тл

Линия	Электронная ширина	Параметр Доплера	Штарковский сдвиг	Сдвиг в магнитном поле
<i>Ly-α</i>	$4.1 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$
<i>Ly-β</i>	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$
<i>Ly-γ</i>	$4.7 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$
<i>D-α</i>	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$6.2 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$

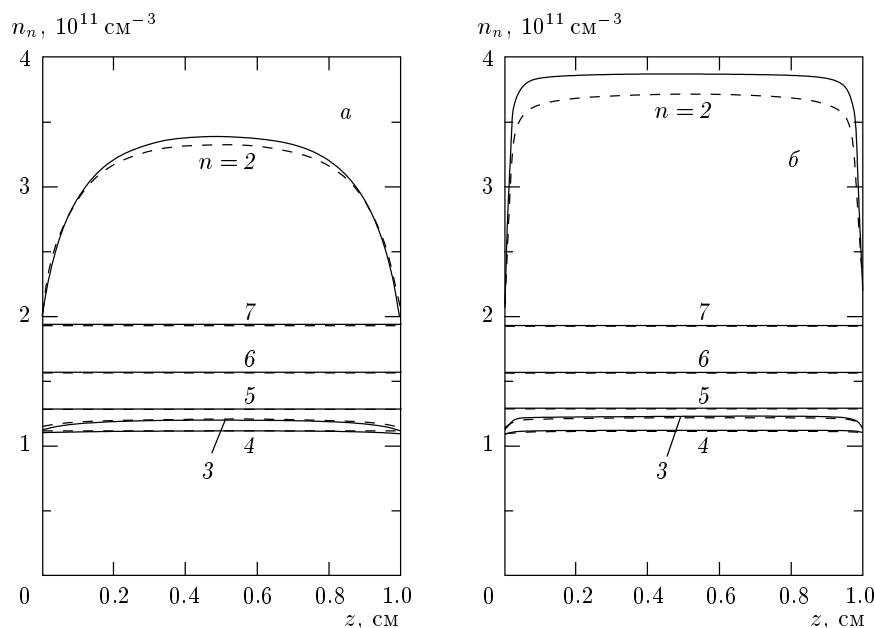


Рис. 1. Населенности возбужденных уровней дейтерия в слое плазмы толщиной 1 см при $T_e = 1$ эВ, $n_e = 3 \cdot 10^{15}$ см⁻³, $n_a = 3 \cdot 10^{14}$ см⁻³ (а) и $3 \cdot 10^{15}$ см⁻³ (б) в зависимости от координаты z , перпендикулярной слою плазмы

учет ионной динамики становится относительно менее важным [15]. Подобный вывод о снижении чувствительности формы линии к механизмам уширения в присутствии магнитного поля был сделан еще в [14].

Распределение населенностей по слою плазмы вычислялось методом итераций. Вначале населенности полагались равновесными $n_n = n_n^{(0)}$ и использовалось модифицированное диффузионное приближение. На последнем этапе (третья–четвертая итерация) решалась система (1). Для описания спектра понадобилось выбрать 3100 групп на специальной неравномерной сетке по ω (по 100–200 точек на каждую из основных линий дейтерия). Расчеты проводились с использованием многопроцессорной вычислительной техники. Распараллеливание осуществля-

лось путем разбиения задачи по спектру с учетом равномерной загрузки процессоров.

Распределение атомов дейтерия по уровням в слое плазмы толщиной 1 см показано на рис. 1. Роль выхода излучения в линиях серии Лаймана резко возрастает по мере приближения к краю слоя, поэтому населенность первого возбужденного уровня ($n = 2$) на краю слоя резко падает. Ширина области падения Δz соответствует оптической толщине $\kappa_\omega \Delta z \sim 1$. Для других уровней этот эффект менее заметен, а их населенности быстро приближаются к равновесным (по Саха) с ростом n (рис. 2). При этом магнитное поле на них практически не влияет. «Включение» поля $B = 8$ Тл приводит к изменению населенностей менее чем на 0.3%, а зависимость от его направления еще более слабая. Населенности

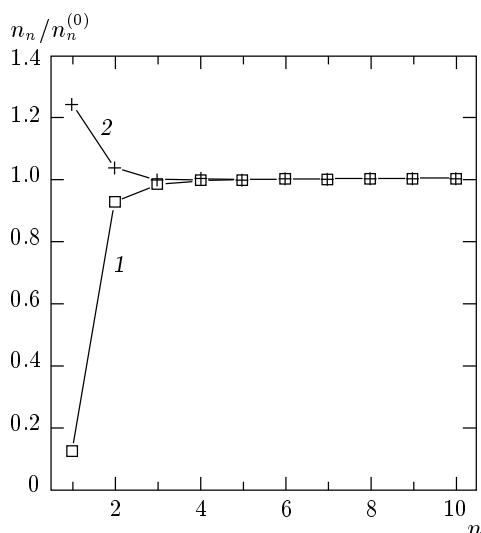


Рис. 2. Населенности уровней дейтерия в центре слоя, отнесенные к их равновесным значениям при $T_e = 1$ эВ, $n_e = 3 \cdot 10^{15}$ см⁻³, $n_a = 3 \cdot 10^{14}$ см⁻³ (1) и $3 \cdot 10^{15}$ см⁻³ (2)

всех уровней оказываются слабо зависящими от координаты z , за исключением уровня $n = 2$, для которого имеет место значительное снижение населенностей в приповерхностных областях (рис. 1).

Задавая концентрацию атомов n_a ниже или выше равновесного значения (которое при $n_e = 3 \cdot 10^{15}$ см⁻³ и $T_e = 1$ эВ составляет $n_a^{(0)} = 2.4 \times 10^{15}$ см⁻³), мы моделируем, соответственно, рекомбинационный или ионизационный режим в неравновесной плазме. Это приводит к недозаселенности ($n_n/n_n^{(0)} < 1$) или перезаселенности ($n_n/n_n^{(0)} > 1$) нижних уровней атома, тогда как верхние всегда находятся в равновесии со свободными электронами. Фактически, сильное отклонение от равновесной населенности в рассматриваемых условиях имеет место только для основного уровня $n = 1$ (рис. 2). На рис. 1 приведены также результаты расчетов в модифицированном диффузионном приближении, которое дает практически ту же точность, что и численное решение, однако время вычислений существенно сокращается, что немаловажно при численной реализации сложных вычислительных алгоритмов при расчетах переноса излучения в неравновесной плазме в двумерной и трехмерной геометриях.

Характер влияния магнитного поля на профили первых линий лаймановской ($Ly-\alpha$) и бальмеровской ($D-\alpha$) спектральных серий дейтерия показан на рис. 3. Каждый профиль является результатом усреднения профилей (23) для поляризаций $\rho = 1, 2$

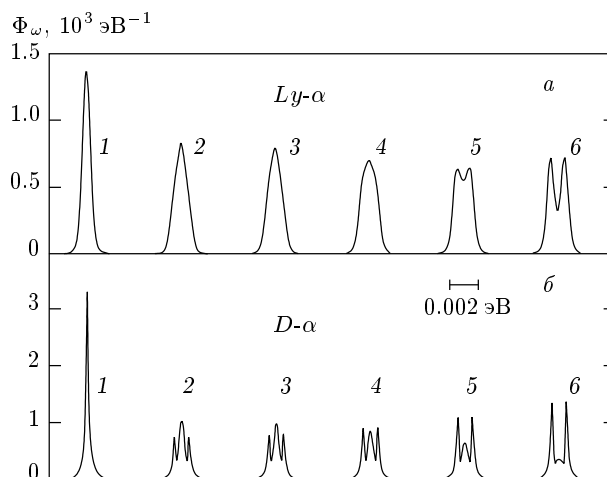


Рис. 3. Профили спектральных линий дейтерия $Ly-\alpha$ и $D-\alpha$ (без учета реабсорбции) при $T_e = 1$ эВ, $n_e = 3 \cdot 10^{15}$ см⁻³, $B = 0$ (1) и 8 Тл (2–6) при разных направлениях магнитного поля относительно направления наблюдения: $\cos \chi = 0$ (2), $\cos \chi = 1/4$ (3), $\cos \chi = 1/2$ (4), $\cos \chi = 3/4$ (5), $\cos \chi = 1$ (6)

и нормирован условием

$$\int \Phi_{\omega}^{\bar{n}} d\omega = 1.$$

Для результирующего профиля значение имеет не только интенсивность магнитного поля, но и его направление; профиль линии существенно изменяется в зависимости от угла χ между направлением магнитного поля и направлением распространения излучения (направлением наблюдения). Результаты расчетов находятся в согласии с [12–14].

Совместное действие реабсорбции излучения и магнитного поля различной ориентации демонстрируется на рис. 4–6, где показано, как изменяются профили спектральных линий, излучаемых плоским слоем плазмы в направлении нормальном слою, для различных толщин слоя. Приведены результаты расчета по формуле (5) для двух значений плотности атомов $n_a = 3 \cdot 10^{14}$ см⁻³ (рис. 4а, 5а, 6а) и $3 \cdot 10^{15}$ см⁻³ (рис. 4б, 5б, 6б). На каждом рисунке для пяти значений толщины показаны профили трех лаймановских и одной бальмеровской линии — слева направо: $Ly-\alpha$, $Ly-\beta$, $Ly-\gamma$, $D-\alpha$, центры которых разнесены на 0.005 эВ. Все линии даны в одном масштабе как по интенсивности, так и по шкале энергий относительно центра линий.

Из рисунков видно, что при $n_a = 3 \cdot 10^{15}$ см⁻³ линия $Ly-\alpha$ заперта в слое толщиной $L = 0.1$ см, а

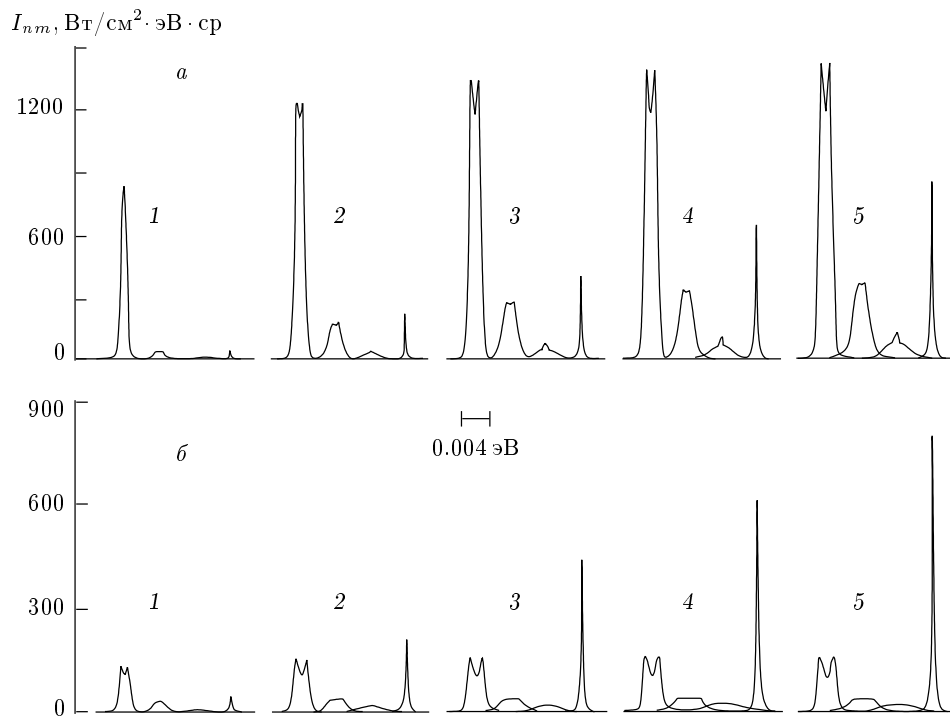


Рис. 4. Профили спектральных линий $Ly-\alpha$, $Ly-\beta$, $Ly-\gamma$, $D-\alpha$, излучаемых плоским слоем плазмы дейтерия без магнитного поля в направлении, нормальном слою, при $T_e = 1$ эВ, $n_e = 3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $n_a = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ (а) или $3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ (б); толщина слоя плазмы 0.1 (1), 0.6 (2), 1.1 (3), 1.6 (4), 2.1 см (5). При каждом значении толщины слоя центры линий разнесены друг от друга на 0.005 эВ

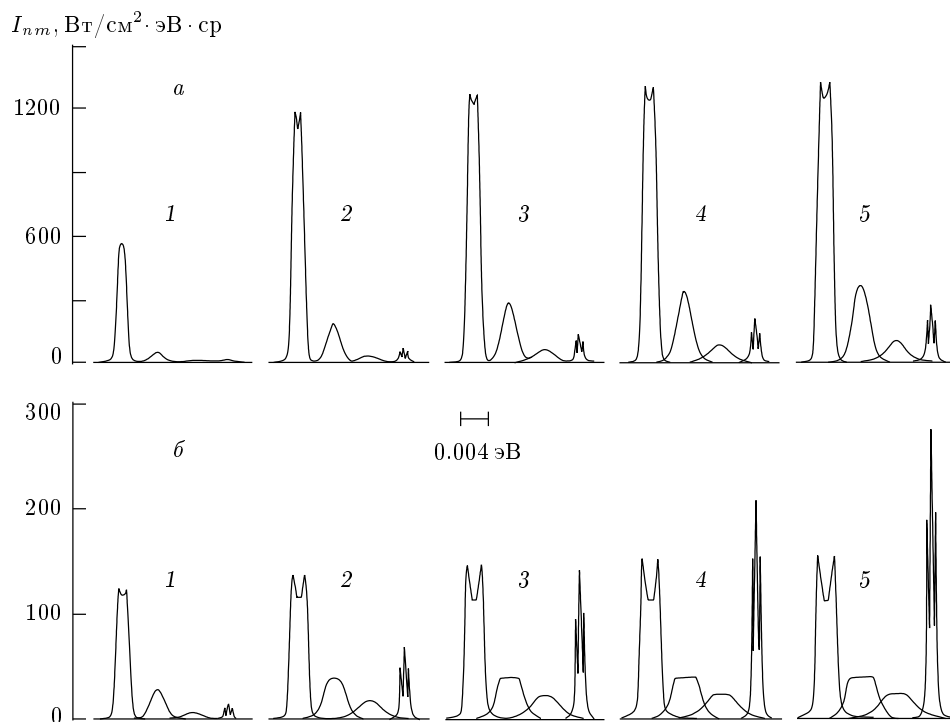


Рис. 5. То же, что на рис. 4, но с магнитным полем $B = 8$ Тл, перпендикулярным направлению наблюдения

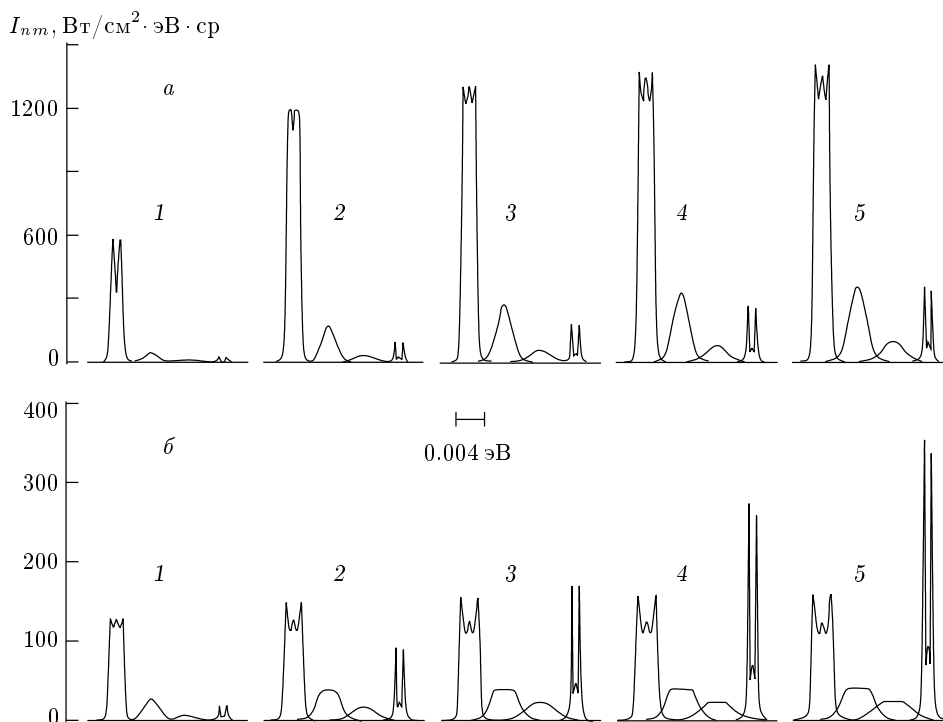


Рис. 6. То же, что на рис. 4, но с магнитным полем $B = 8 \text{ Тл}$, параллельным направлению наблюдения

при $n_a = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ — в слое $L = 0.6 \text{ см}$. При дальнейшем увеличении толщины слоя ее интенсивность меняется слабо. Линия $Ly-\beta$ запирается при $L \approx 2 \text{ см}$, если $n_a = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, а если плотность атомов на порядок величины больше, — то при толщине слоя на порядок меньшей; действительно, населенности поглощающего уровня серии Лаймана $n = 1$ различаются в этих двух случаях почти на порядок (рис. 2). Для $Ly-\gamma$ признаки самопоглощения появляются только при $n_a = 3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, а при $n_a = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ интенсивность линии растет пропорционально толщине слоя, что характерно для оптически прозрачной плазмы. Для линии $D-\alpha$ слой плазмы оптически прозрачен, причем при изменении n_a на порядок величины интенсивность линии практически не меняется, поскольку населенности как верхнего ($n = 3$), так и нижнего ($n = 2$) уровней в обоих случаях близки (рис. 1, 2).

Характерный для самопоглощения провал в центре линии появляется только на контуре $Ly-\alpha$, так как населенность излучающего эту линию уровня $n = 2$ заметно падает вблизи поверхности слоя (см. рис. 1). Это видно на рис. 4 ($B = 0$) и рис. 5 (B перпендикулярно направлению наблюдения), где линия $Ly-\alpha$ не расщеплена магнитным полем. В случае магнитного поля, параллельного направлению

наблюдения, линия $Ly-\alpha$ расщеплена магнитным полем и эффекты самопоглощения возникают на каждом из двух пиков (рис. 6, ср. с рис. 3). Центральная часть линий $Ly-\beta$ и $Ly-\gamma$ при их реабсорбции остается плоской, так как населенности излучающих их уровней практически не изменяются в приповерхностных областях.

Магнитное поле влияет на ширину линии и структуру ее профиля, причем для последнего большее значение имеет направление магнитного поля. Но интегральная характеристика — выход излучения с поверхности слоя — от направления поля практически не зависит, так как при изменении направления не происходит существенного перераспределения интенсивности между центром линии и ее крыльями (рис. 3). Выход излучения вычислялся по формуле (7) с учетом зависимости населенностей уровней от поля излучения в соответствии с системой кинетических уравнений (1) и соотношений (10), (12)–(14).

На рис. 7 приведен выход излучения с одной из двух поверхностей плоского слоя плазмы в зависимости от его толщины для двух значений плотности атомов как при отсутствии магнитного поля, так и в поле $B = 8 \text{ Тл}$, направленном перпендикулярно ($\beta = 0$) или параллельно ($\beta = \pi/2$) слою плазмы.

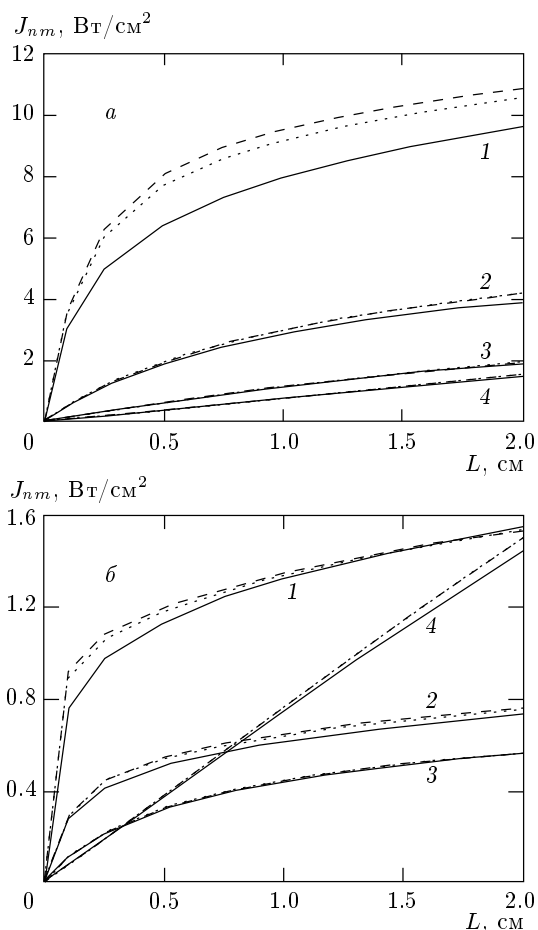


Рис. 7. Выход излучения для спектральных линий $Ly-\alpha$ (1), $Ly-\beta$ (2), $Ly-\gamma$ (3), $D-\alpha$ (4) в зависимости от толщины слоя плазмы при $T_e = 1$ эВ, $n_e = 3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $n_a = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ (а) и $3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ (б); сплошные кривые — $B = 0$; штриховые — $B = 8$ Тл, $\beta = 0$; пунктирные — $B = 8$ Тл, $\beta = \pi/2$

Кривые для двух последних случаев почти сливаются. Магнитное поле приводит к росту выхода излучения частично запертых спектральных линий вследствие увеличения их ширины. Для линии $D-\alpha$ слой плазмы оптически прозрачен, поэтому на ее выход магнитное поле не влияет. На выход запертой линии $Ly-\alpha$ при $n_a = 3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $L > 1$ см влияние магнитного поля также незначительно. Относительная роль магнитного поля в уширении линий снижается при переходе к более высоким членам спектральной серии. Наличие поля $B = 8$ Тл практически не сказывается уже на выходе излучения для $Ly-\gamma$ при обоих рассмотренных значениях n_a , хотя влияние реабсорбции в этих двух случаях различно.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен расчет формы спектральных линий дейтерия и выхода излучения из плоского слоя дейтериевой плазмы различной толщины при $T = 1$ эВ, $n_e \approx n_a \approx 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $B = 8$ Тл.

Показано, что как величина, так и направление магнитного поля оказывают существенное влияние на форму спектральных линий. Возможно появление структур на контуре спектральных линий. Например, при направлении наблюдения, параллельном магнитному полю, в центре линии $Ly-\alpha$ появляется глубокий провал. С увеличением главных квантовых чисел нижнего и верхнего состояний перехода структура контура усложняется. Следует заметить, что с целью выявления влияния именно магнитного поля и, по возможности, упрощения расчетов не учитывалась динамика ионов. Очевидно, что ее учет должен привести к частичному сглаживанию полученных структур.

Профиль спектральной линии может быть значительно деформирован вследствие реабсорбции. В наибольшей степени этот эффект проявляется, очевидно, для первых линий лаймановской серии и зависит от оптической толщины слоя плазмы. Действуя совместно с магнитным полем, он может приводить либо к дополнительному усложнению, либо к упрощению наблюдаемого контура спектральной линии. В первую очередь, это определяется характером пространственной зависимости населенностей верхнего и нижнего уровней перехода вблизи поверхности излучающего слоя.

Интегральный (по спектру) выход излучения из слоя плазмы для данной линии зависит от величины магнитного поля, но практически не зависит от его направления, так как направление магнитного поля сказывается на структуре профиля спектральной линии, но не на ее ширине. Это позволяет в радиационно-столкновительной кинетике использовать усредненные по направлениям характеристики излучения и упрощает учет влияния магнитного поля на баланс энергии в пристеночной области токамака. Факторы, приводящие к уширению спектральных линий, в частности, сильные магнитные поля, существенно влияют на выход излучения частично реабсорбированных линий. В предельных случаях малой или большой оптической толщины выход излучения практически не зависит от ширины и формы линии.

Авторы благодарны А. В. Недоспасову, привлечшему внимание авторов к данной проблеме,

Л. М. Биберману], принимавшему участие в обсуждении постановки задачи, а также А. Ю. Пигарову за многочисленные полезные обсуждения. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 99-02-17640, 99-01-00121, 00-15-96529). Расчеты проводились в Межведомственном вычислительном комплексе РАН.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уширение электронами

Простая модель расчета электронного уширения водородных линий предложена в работе [17]. Она основана на бете-борновском приближении для бинарного взаимодействия излучающего атома с возмущающим электроном, обрезании по орбитальному моменту и аналитической аппроксимации профиля линии с учетом его нормировки на единицу. Эта аппроксимация обеспечивает правильную частотную зависимость как в ядре профиля, где она соответствует ударному приближению, так и на крыльях в переходной области от ударного приближения к статическому. Статическое электронное крыло при рассматриваемых параметрах плазмы попадает в область частот, где нарушается приближение изолированности линий, и в данной работе не рассматривается. Профиль, обусловленный электронным уширением, аппроксимируется выражением

$$\psi_\xi(u) = \frac{\gamma_\xi(u)/2\pi}{u^2 + g_\xi^2(u)/4}, \quad (\text{П.1})$$

где ξ обозначает компоненту $\bar{\nu} \rightarrow \nu$ ($\bar{n}\bar{n}'\bar{n}'' \rightarrow nn'n''$) линии $\bar{n} \rightarrow n$, $u = \omega - \omega_{\bar{\nu}\nu}$ — расстояние от центра данной компоненты.

Профиль (П.1) симметричен, поэтому далее будем полагать $u > 0$. Для функций $\gamma_\xi(u)$, $g_\xi(u)$ имеют место следующие формулы, полученные в [17] для плазмы водорода без магнитного поля,

$$\gamma_\xi(u) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} n_e F_\xi w(u), \quad (\text{П.2})$$

$$g_\xi(u) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} n_e F_\xi u \int_u^\infty \frac{w(u')}{u'^2} du'. \quad (\text{П.3})$$

Здесь функция $w(u)$ зависит только от главных квантовых чисел перехода и является одной и той же для всех компонент, а фактор F_ξ , наоборот, определяется всеми квантовыми числами начального и

конечного состояний и не зависит от u . При наличии магнитного поля функция $w(u)$ остается такой же, как в [17], а фактор F_ξ должен измениться. Для $w(u)$ имеем

$$w(u) = \begin{cases} w_0, & u < u_1, \\ w_\infty(u), & u > u_1, \end{cases}$$

где u_1 определяется из уравнения

$$w_\infty(u_1) = w_0.$$

В случае нейтрального атома водорода (или дейтерия)

$$w_0 = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{2Tr_D^2}{3\bar{n}^2(\bar{n}^2 - 1)} \right) - \gamma_0 - E_1 \left(\frac{24\bar{n}^2(\bar{n}^2 - 1)}{(5\bar{n}^2 + 1)^2 T} \right) \right],$$

$$w_\infty = \ln \left(1 + \frac{C + Du/T}{1 + Qu/T} \frac{T}{u} \right),$$

где r_D — радиус Дебая, $\gamma_0 = 0.5772$ — постоянная Эйлера. Параметры C, D, Q зависят от \bar{n} и приведены в [17]. Интеграл по u' в (П.3) берется в элементарных функциях.

Диагональная матрица γ аппроксимирует матрицу электрон-атомного взаимодействия $\mathbf{\Gamma}$ и задается таким образом [17], чтобы ее элементы были пропорциональны диагональным элементам матрицы взаимодействия, а произведение матриц $\mathbf{D}^+ \mathbf{\Gamma} \mathbf{D}$ при аппроксимации не изменилось, т. е.

$$\gamma_\xi = b \Gamma_{\xi\xi}, \quad \mathbf{D}^+ \boldsymbol{\gamma} \mathbf{D} = \mathbf{D}^+ \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{D}.$$

Здесь \mathbf{D} — столбцовая матрица, состоящая из амплитуд вероятности переходов D_ξ , квадраты модулей которых равны относительным интенсивностям компонент (17). Поэтому фактор F_ξ является произведением коэффициента пропорциональности b и диагонального элемента $G_{\xi\xi}$ матрицы \mathbf{G} ($F_\xi = bG_{\xi\xi}$), которая связана с $\mathbf{\Gamma}$ так же, как F_ξ связана с γ_ξ соотношением (П.2):

$$\mathbf{\Gamma} = \sqrt{2\pi/T} n_e \mathbf{G} w(u).$$

Коэффициент b определяется выражением

$$b = \frac{\sum_{\xi\xi'} D_\xi^* G_{\xi\xi'} D_{\xi'}}{\sum_{\xi} |D_\xi|^2 G_{\xi\xi}}. \quad (\text{П.4})$$

Явный вид \mathbf{G} задан [17] в представлении состояний $|nlm\rangle$ (обозначим соответствующую матрицу

через $\mathbf{G}^{(L)}$) и указано, как осуществить переход к представлению параболических состояний $|n_1 n_2 m\rangle$. В случае скрещенных электрического и магнитного полей требуется перейти к базису состояний (21). В $n\ell m$ -представлении матричный элемент $G_{s,t}^{(L)}$ (s, t — переходы между состояниями $|\bar{n}\bar{\ell}\bar{m}$ и $n\ell m$) имеет следующий вид:

$$G_{s,t}^{(L)} = C(\bar{\ell}_s, 1, \ell_s; \bar{m}_s, m_s - \bar{m}_s, m_s) \times \\ \times C(\bar{\ell}_t, 1, \ell_t; \bar{m}_t, m_t - \bar{m}_t, m_t) G^{(L)}(\ell_s, \bar{\ell}_s; \ell_t, \bar{\ell}_t) \times \\ \times [(2\ell_s + 1)(2\ell_t + 1)]^{-1/2},$$

где $C(j_1, j_2, j; m_1, m_2, m)$ — коэффициенты Клебша–Гордана, $G^L(\ell_s, \bar{\ell}_s; \ell_t, \bar{\ell}_t)$ — приведенный матричный элемент, который может быть отличен от нуля, только если

$$\bar{\ell}_s - \ell_s = \pm 1, \quad \bar{\ell}_t - \ell_t = \pm 1, \\ \ell_t - \ell_s = 0, \pm 1, \quad \bar{\ell}_t - \bar{\ell}_s = 0, \pm 1.$$

При $\ell_s = \ell_t = \ell$ (при этом и $\bar{\ell}_s = \bar{\ell}_t = \bar{\ell}$)

$$G^{(L)}(\ell, \bar{\ell}; \ell, \bar{\ell}) = \\ = 6[n^2(n^2 - \ell^2 - \ell - 1) + \bar{n}^2(\bar{n}^2 - \bar{\ell}^2 - \bar{\ell} - 1)],$$

а при $\ell_s \neq \ell_t$

$$G^{(L)}(\ell_s, \bar{\ell}_s; \ell_t, \bar{\ell}_t) = \\ = -12 \left\{ \begin{matrix} 1 & \ell_s & \bar{\ell}_s \\ 1 & \bar{\ell}_t & \ell_t \end{matrix} \right\} d(n, \ell_s, \ell_t) d(\bar{n}, \bar{\ell}_s, \bar{\ell}_t),$$

где

$$d(n, \ell, \ell') = (\ell - \ell') [n\ell_{>} (n^2 - \ell_{>}^2)]^{1/2},$$

$\ell_{>}$ — большее из ℓ, ℓ' .

Переход к представлению (21) осуществляется с помощью матрицы преобразования \mathbf{Y} , которая строится из коэффициентов разложения состояний $|nn'n''\rangle$ по состояниям $|n\ell m\rangle$:

$$\mathbf{G} = \mathbf{Y} \mathbf{G}^{(L)} \mathbf{Y}^+,$$

$$Y(\xi, s) = \langle n\ell m | nn'n'' \rangle \langle \bar{n}\bar{\ell}\bar{m} | \bar{n}\bar{\ell}'\bar{n}'' \rangle.$$

Разложение $nn'n''$ -состояний по состояниям в параболических координатах определяется формулой (21), а разложение последних по $n\ell m$ -состояниям осуществляется с помощью коэффициентов Клебша–Гордана [26, 27, 19]:

$$\langle n\ell m | nn'n'' \rangle = \sum_{i_1=-j}^j (-1)^{n_2} d_{n', i_1}^j(\alpha_1) \times \\ \times d_{n'', i_2}^j(\alpha_2) C(j, j, \ell; i_1, i_2, m),$$

где $i_2 = m - i_1, n_2 = j + i_1 - (m + |m|)/2$.

Числитель в формуле (П.4) может быть вычислен в любом представлении, но проще всего расчет провести в $n\ell m$ -представлении. Знаменатель вычисляется в $nn'n''$ -представлении. При этом относительные интенсивности компонент $|D_\xi|^2 = R_{\bar{\nu}\nu\rho}$, а следовательно, и профили (П.1) сложным образом зависят от углов ϑ' и φ' , по которым проводится интегрирование в (15). Для упрощения расчета применяется следующее приближение. В (П.4) вместо $|D_\xi|^2$ подставляется (24), т. е. результат усреднения этой величины по φ' , а также проводится усреднение по поляризациям отдельно в числителе и знаменателе (П.4). В результате имеем

$$b = 4 \sum_{\ell_s \bar{\ell}_s \ell_t \bar{\ell}_t} (\ell_s - \bar{\ell}_s)(\ell_t - \bar{\ell}_t)(\ell_{s>} \ell_{t>})^{1/2} \times \\ \times R_{n\ell_s}^{\bar{n}\bar{\ell}_s} R_{n\ell_t}^{\bar{n}\bar{\ell}_t} G^{(L)}(\ell_s, \bar{\ell}_s; \ell_t, \bar{\ell}_t) \left\{ 3 \sum_{\xi} G_{\xi\xi} \times \right. \\ \times \left\{ 2 \sin^2 \chi (x_{\nu}^{\bar{\nu}} \sin \vartheta' - z_{\nu}^{\bar{\nu}} \cos \vartheta')^2 + (1 + \cos^2 \chi) \times \right. \\ \left. \left. \times [(x_{\nu}^{\bar{\nu}} \cos \vartheta' + z_{\nu}^{\bar{\nu}} \sin \vartheta')^2 + (y_{\nu}^{\bar{\nu}})^2] \right\} \right\}^{-1}, \quad (\text{П.5})$$

где $\ell_{s>}$ — большее из ℓ_s и $\bar{\ell}_s, \ell_{t>}$ — большее из ℓ_t и $\bar{\ell}_t, R_{n\ell}^{\bar{n}\bar{\ell}}$ — радиальный матричный элемент, вычисляемый по формуле Гордона [21, 28]. В оправдание этого приближения заметим, что, во-первых, уширение отдельных компонент определяется тремя обстоятельствами: эффектом Доплера и взаимодействием с ионами и электронами, а использование приближения (П.5) огрубляет влияние только одного из них — последнего. Во-вторых, фактор b появляется при аппроксимации матрицы взаимодействия, которая вычисляется с применением целого ряда приближений, поэтому требовать высокой точности его расчета вряд ли имеет смысл. И, наконец, в-третьих, зависимость конечного результата от b будет в значительной степени завуалирована в результате усреднения по величине и направлению квазистатического микрополя в (15). Поэтому приближение (П.5) представляется оправданным, что подтвердили и оценочные расчеты. Его применение делает профиль компоненты (16) не зависящим от угла φ' и упрощает интегрирование в (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. B. L. Welch, H. R. Griem, J. Terry et al., Phys. Plasmas **2**, 4246 (1995).

2. A. Yu. Pigarov, J. L. Terry, and B. Lipschultz, *Plasma Phys. Control Fusion* **40**, 2055 (1998).
3. Л. М. Биберман, В. С. Воробьев, И. Т. Якубов, *Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы*, Наука, Москва (1982).
4. L. C. Johnson, *Astrophys. J.* **174**, 227 (1972).
5. Л. М. Биберман, *ДАН СССР* **59**, 659 (1948).
6. Ю. Н. Демков, В. С. Монозон, В. Н. Островский, *ЖЭТФ* **57**, 1431 (1969).
7. Е. А. Соловьев, *ЖЭТФ* **85**, 109 (1983).
8. А. В. Турбинер, *ЖЭТФ* **84**, 1329 (1983).
9. П. А. Браун, Е. А. Соловьев, *ЖЭТФ* **86**, 68 (1984).
10. V. S. Melezhik, *Phys. Rev. A* **48**, 4528 (1993).
11. P. Fassinder and W. Schweizer, *Phys. Rev. A* **53**, 2135 (1996).
12. Nguyen-Hoe, H.-W. Drawin, and L. Herman, *JQSRT* **7**, 429 (1967).
13. G. Mathys, *Astron. Astrophys.* **125**, 13 (1983).
14. G. Mathys, *Astron. Astrophys.* **139**, 196 (1984).
15. S. Günter and A. Könies, *JQSRT* **62**, 425 (1999).
16. Г. Грим, *Уширение спектральных линий в плазме*, Мир, Москва (1978).
17. M. J. Seaton, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **23**, 3255 (1990).
18. М. Борн, *Лекции по атомной механике*, ОНТИ, Харьков (1934), с. 235.
19. Л. А. Буреева, В. С. Лисица, *Возмущенный атом*, ИздАТ, Москва (1997), с. 221.
20. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975), с. 64.
21. Г. Бете, Э. Солпитер, *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*, Физматгиз, Москва (1960), с. 432, 412.
22. А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Наука, Москва (1984), с. 38.
23. Л. А. Вайнштейн, И. И. Собельман, Е. А. Юков, *Возбуждение атомов и уширение спектральных линий*, Наука, Москва (1979), с. 298.
24. В. С. Лисица, *УФН* **122**, 449 (1977).
25. В. А. Абрамов, В. И. Коган, В. С. Лисица, в сб. *Проблемы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтовича, Б. Б. Кадомцева, Энергоатомиздат, Москва (1982), т. 12, с. 114.
26. J. W. V. Hughes, *Proc. Phys. Soc.* **91**, 810 (1967).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).
28. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980), с. 222.