

САМООРГАНИЗАЦИЯ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ В ГРАНУЛИРОВАННЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

*С. Л. Гинзбург, Н. Е. Савицкая**

*Петербургский институт ядерной физики
188350, Гатчина, Ленинградская обл., Россия*

Поступила в редакцию 29 июня 1999 г.

В настоящей работе критическое состояние в гранулированных сверхпроводниках изучено с использованием двух математических моделей — системы дифференциальных уравнений для калибровочно-инвариантной разности фаз и упрощенной модели, которая описывается системой связанных отображений и во многих случаях эквивалентна стандартным моделям для изучения самоорганизованной критичности. Показано, что критическое состояние гранулированных сверхпроводников во всех исследуемых случаях является самоорганизованным. Кроме того, показано, что используемые модели практически эквивалентны, то есть демонстрируют не только одинаковое критическое поведение, но также приводят к совпадению некритических явлений. В работе впервые продемонстрировано наличие самоорганизованной критичности в системе нелинейных дифференциальных уравнений и ее эквивалентность самоорганизованной критичности в стандартных моделях.

PACS: 64.60.Lx; 74.50.+g

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительно возрос интерес к исследованиям гранулированных сверхпроводников, что связано прежде всего с тем, что большинство ВТСП материалов может быть реализовано именно в виде гранулированной системы. В частности, появился ряд теоретических работ [1–3] по изучению магнитных свойств таких систем, где в качестве модели гранулированного сверхпроводника использовалась система сверхпроводящих гранул, соединенных диэлектриком, т.е. упорядоченная решетка джозефсоновских контактов. Было показано, что магнитные свойства такой системы подобны свойствам жестких сверхпроводников второго рода, а именно, в них также может возникать критическое состояние, которое хорошо описывается моделью Бина [4]. Однако свойства гранулированной системы (в частности, профиль магнитного поля в образце в критическом состоянии) сильно зависят от основного ее параметра $V \sim j_c a^3 / \Phi_0$ (j_c — плотность критического тока на контакте, a — постоянная решетки, Φ_0 — квант магнитного потока). В работах [1–3] было показано, что при большом значении этого параметра, $V \gg 1$, каждая ячейка такой системы становится центром пиннинга и способна

удерживать большое число квантов потока магнитного поля. Было показано также [3], что при $V \gg 1$ система в целом обладает большим числом метастабильных состояний.

Способность системы приходить в критическое состояние без точной подстройки внешних параметров, а также наличие большого числа метастабильных состояний являются характерными чертами систем, в которых наблюдается явление самоорганизованной критичности (СОК) [5]. Оно заключается в том, что динамическая система естественно эволюционирует к критическому состоянию, которое в дальнейшем является самоподдерживающимся, не требующим для своего существования точной подстройки внешних параметров. По структуре возникающее критическое состояние представляет собой набор метастабильных состояний, переходящих друг в друга посредством «лавин», возникающих в результате локального внешнего возмущения. Такое критическое состояние называется самоорганизованным, а критерием существования самоорганизации в системе считается степенная зависимость плотности вероятности размеров лавин.

Концепция самоорганизованной критичности применима для описания поведения большого числа диссипативных динамических систем, принадлежащих к различным областям современной науки.

*E-mail: savitska@thd.pnpi.spb.ru

Свойства гранулированных сверхпроводников таковы, что в них также возможно обнаружение самоорганизованной критичности; это не только дает новое представление о природе и структуре критического состояния в этих системах, но и открывает возможности для экспериментального изучения СОК. Это особенно важно, поскольку до сих пор, несмотря на всеобщность явления, изучение СОК проводилось лишь на модельных системах, которые сложно реализовать на практике, а экспериментальные исследования были проведены только на куче песка [6].

Возможность самоорганизации критического состояния в гранулированных сверхпроводниках при $V \gg 1$ рассматривалась в работе [7], где была введена и изучена упрощенная модель такой системы. При построении этой модели с учетом физических особенностей поведения гранулированных сверхпроводников при $V \gg 1$ система дифференциальных уравнений для калибровочно-инвариантной разности фаз на контактах, описывающая сверхпроводник, была заменена на систему отображений (уравнений с дискретным временем) для токов через контакты. Оказалось, что для двумерного многоконтактного СКВИДа полученная система отображений эквивалентна классической модели для изучения СОК — абелевой модели кучи песка [8]. Роль высоты кучи на данном узле играла величина тока в контакте, а аналогом добавления песчинок была инъекция тока. Таким образом, было показано, что критическое состояние в упрощенной модели многоконтактного СКВИДа, описываемой системой отображений, является самоорганизованным.

Дальнейшее изучение упрощенной модели гранулированных сверхпроводников показало, что благодаря заложенным в нее физическим свойствам, СОК в этой системе обладает рядом интересных свойств, которые не наблюдались в абелевой модели кучи песка.

Так, в работе [9] упрощенная модель многоконтактного СКВИДа была изучена при различных способах инъекции тока в систему. В частности, рассматривался случай одновременной инъекции тока во все узлы малыми порциями, который нереализуем в модели кучи песка, так как там песчинка имеет конечный размер. Было обнаружено, что плотность вероятности размеров лавин для всех способов инъекции является универсальной функцией, а более тонкие характеристики (межлавиновые корреляторы) различаются.

Кроме того, в работе [10] было проверено предположение, выдвинутое ранее в [7], что в упрощенной модели многоконтактного СКВИДа, помещенного в возрастающее магнитное поле, СОК реализуется да-

же при закрытых граничных условиях. Это принципиально невозможно в модели кучи песка, так как в этом случае возможность для песка покинуть систему является одним из основных требований для существования СОК. В случае же многоконтактного СКВИДа процесс ухода тока из системы заменяется принципиально иным процессом — аннигиляцией токов противоположных знаков — и СОК может существовать и в закрытой системе.

Таким образом, изучение упрощенной модели позволяет предположить, что критическое состояние в гранулированных сверхпроводниках является самоорганизованным и обладает рядом интересных свойств, не проявляющихся в ранее исследуемых моделях с СОК.

Однако делать вывод о существовании и свойствах СОК в реальных сверхпроводниках, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями, опираясь лишь на упрощенные модели, нельзя, так как введенные упрощения могли привести как к потере моделью некоторых свойств исходной системы, так и к возникновению новых, не свойственных исходной системе качеств. Поэтому, во-первых, остается задача исследования свойств критического состояния, исходя непосредственно из системы дифференциальных уравнений для разности фаз, а во-вторых, интересен вопрос о том, в какой степени упрощенная модель отражает реальную картину поведения исходной системы.

Таким образом, основной целью данной работы явилось теоретическое и компьютерное изучение критического состояния одномерных и двумерных гранулированных сверхпроводников в различных условиях, исходя непосредственно из системы дифференциальных уравнений для калибровочно-инвариантных разностей фаз на контактах. Параллельно изучались соответствующие упрощенные модели, описываемые системами отображений. В результате показано, что критическое состояние в гранулированных сверхпроводниках является самоорганизованным, а поведение упрощенной модели полностью эквивалентно поведению исходной системы, описываемой системой дифференциальных уравнений.

В разделе 2 рассматриваются одномерный и двумерный гранулированные сверхпроводники (многоконтактные СКВИДы), приводятся описывающие их системы дифференциальных уравнений и соответствующие упрощенные модели, а также вводятся основные характеристики системы: средний ток и напряжение, статистические свойства которых в критическом состоянии и будут изучаться.

В разделе 3 приведены результаты машинного моделирования критического состояния многокон-

тактных СКВИДов в различных условиях: в случае открытых граничных условий для различных способов инжекции тока, а также в случае закрытых граничных условий и возрастающего внешнего магнитного поля. Для каждого случая моделирование проводилось как для системы дифференциальных уравнений, так и для упрощенных моделей и результаты сравнивались.

В разделе 4 кратко формулируются основные результаты работы.

2. ОДНОМЕРНЫЙ И ДВУМЕРНЫЙ МНОГОКОНТАКТНЫЕ СКВИДЫ

2.1. Основные уравнения

Двумерный многоконтактный СКВИД представляет собой две сверхпроводящие пластины, соединенные джозефсоновскими контактами, расположенными в узлах решетки размером $N \times M$. Размер контакта l много меньше периода решетки a (рис. 1а). В описанной геометрии джозефсоновский ток течет по оси z . Тогда систему уравнений для калибровочно-инвариантной разности фаз $\varphi_{n,m}$ на контактах с координатами (na, ma) можно записать исходя из уравнения для большого джозефсоновского контакта [11]. Пользуясь резистивной моделью джозефсоновского контакта без учета тепловых флуктуаций [12], в безразмерном виде мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} V \sin \varphi_{n,m} + \tau \frac{d\varphi_{n,m}}{dt} &= \Delta_{n,m}(\varphi) + 2\pi F_{n,m}, \\ V &= \frac{2\pi j_c}{j_\varphi}, \quad j_\varphi = \frac{\Phi_0}{8\pi l^2 \lambda_L}, \\ F_{n,m} &= \frac{j_{en,m}}{j_\varphi}, \quad \tau = \frac{\Phi_0}{\rho_0 j_\varphi}, \\ \Delta_{n,m}(\varphi) &= \varphi_{n+1,m} + \varphi_{n-1,m} + \varphi_{n,m-1} + \\ &\quad + \varphi_{n,m+1} - 4\varphi_{n,m}, \end{aligned} \quad (1)$$

где j_c — плотность критического тока, λ_L — лондоновская глубина проникновения, Φ_0 — квант потока, ρ_0 — поверхностное сопротивление контакта, $j_{en,m}$ — плотность тока инжекции, $\Delta_{n,m}$ — двумерный дискретный лапласиан.

Для случая одномерного многоконтактного СКВИДа (рис. 1б) [12], который представляет собой две сверхпроводящие пластины, бесконечные по оси y , соединенные между собой джозефсоновскими контактами в точках с координатами $x = an, n = 1, \dots, N$, система уравнений (1) запишется следующим образом [2]:

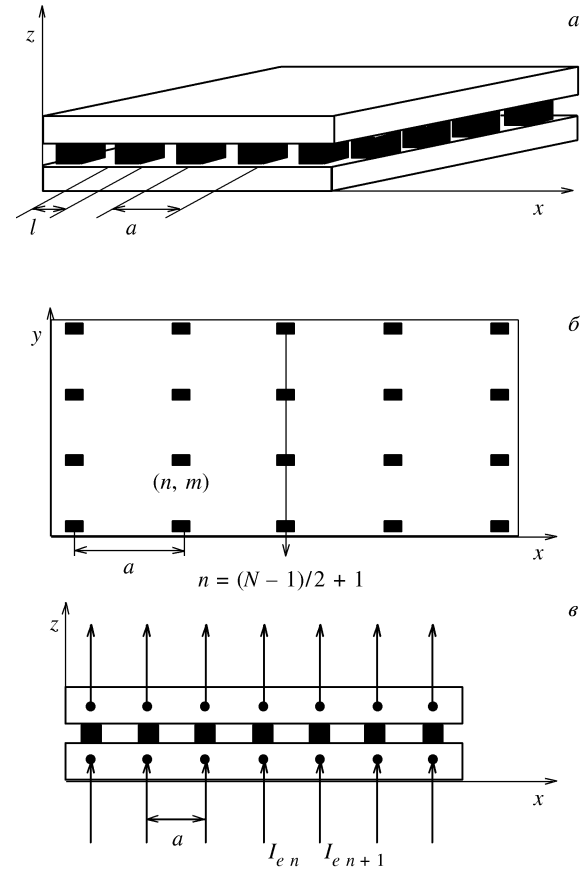


Рис. 1. а) Двумерный многоконтактный СКВИД, б) проекция двумерного многоконтактного СКВИДа на плоскость (x, y) , в) одномерный многоконтактный СКВИД

$$\begin{aligned} V \sin \varphi_n + \tau \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} &= -2\varphi_n + \varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} + 2\pi F_n, \quad (2) \\ V &= 2\pi \frac{4\pi a S j_c}{\Phi_0}, \quad F_n = \frac{4\pi j_{en} a S}{\Phi_0}, \quad \tau = \frac{4\pi a S}{\rho}, \end{aligned}$$

где S — площадь ячейки между двумя контактами.

Возникающий в уравнениях параметр V является основной характеристикой СКВИДа. Так, при $V \gg 1$ энергия одноконтактного сквида имеет большое число (порядка V) метастабильных состояний, и этот факт приводит к существованию таких явлений, как квантование потока магнитного поля и гистерезис [12]. В случае многоконтактного СКВИДа при $V \gg 1$ эти свойства сохраняются. В дальнейшем будем рассматривать многоконтактные СКВИДы именно при $V \gg 1$.

Параллельно с системами дифференциальных уравнений (1) и (2) будем рассматривать упрощенные модели многоконтактных СКВИДов, которые имеют аналоги среди ранее рассматривавшихся моделей для изучения СОК, таких как абелева модель

кучи песка и одномерная модель «кучи песка», изучаемая в работах [13, 14]. Переход к упрощенным моделям, описываемым системами связанных отобращений, был подробно рассмотрен в [7]. Далее изложим это в краткой форме.

2.2. Упрощенные модели двумерного и одномерного многоконтактных СКВИДов

Упрощенные модели многоконтактных СКВИДов формулируются в терминах безразмерного тока через контакт $z_{n,m}$:

$$z_{n,m} = z_c \sin(\varphi_{n,m}) + \frac{\tau}{2\pi} \frac{d\varphi_{n,m}}{dt}, \quad (3)$$

$z_c = V/2\pi$ Для безразмерного тока уравнения (1) переписуются следующим образом:

$$z_{n,m}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{n,m}(\varphi) + F_{n,m}. \quad (4)$$

Полученную систему (3), (4) при $V \gg 1$ можно упростить, используя свойства решения уравнения (3), которое является уравнением для фазы в случае одиночного джозефсоновского контакта. Из этого уравнения видно, что если $z_{n,m} \leq z_c$, то $d\varphi_{n,m}/dt = 0$, т. е. фаза не меняется. Если же $z_{n,m} > z_c$, то в случае $V \gg 1$ и при условии $|z_{n,m} - z_c| \ll z_c$ это уравнение имеет решение $\varphi_{n,m}(t)$, которое сначала слабо изменяется на промежутке времени T , а затем меняется на 2π за время τ_0 , причем $\tau_0 \ll T$.

Далее пренебрежем в члене $\Delta_{n,m}(\varphi)$ этим слабым (порядка $1/V$) изменением и аппроксимируем фазу ступенчатой функцией:

$$\varphi_{n,m} \approx 2\pi q_{n,m} + \pi/2, \quad (5)$$

где $q_{n,m}$ — целое число. В этом приближении система (3), (4) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} z_{n,m} &= z_c \sin(\varphi_{n,m}) + \frac{\tau}{2\pi} \frac{d\varphi_{n,m}}{dt}, \\ z_{n,m} &= \Delta_{n,m}(q) + F_{n,m}, \\ q_{n,m} &= \text{Int} \left(\frac{\varphi_{n,m}}{2\pi} + \frac{1}{4} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\text{Int}(x)$ — целая часть x .

Уравнения (6) образуют замкнутую систему, в которой фазы на различных контактах не взаимодействуют друг с другом.

Опишем решение такой упрощенной системы в терминах безразмерного тока.

Рассмотрим сначала изменение фазы на некотором узле (n_0, m_0) . В качестве начальных условий выберем ситуацию, когда во все контакты инжектиру-

ется ток $F_{n,m} = K = \text{Int}(z_c)$ меньший критического, а фазы на всех контактах одинаковы и равны

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m}(0) &= \arcsin \left(\frac{2\pi K}{V} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \sqrt{2 \left(1 - \frac{2\pi K}{V} \right)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда $q_{n,m} = 0$ и $\Delta_{n,m}(q) = 0$.

Будем считать, что ток в систему инжектируется целыми порциями, т. е. $F_{n,m}$ — целое, тогда и $z_{n,m}$ — тоже целое. Добавим в узел n_0, m_0 одну единицу тока, т. е. $F_{n_0,m_0} = K + 1$, тогда

$$z_{n_0,m_0} \rightarrow z_{n_0,m_0} + 1. \quad (8)$$

Ток z_{n_0,m_0} теперь превышает критический и тогда $d\varphi_{n_0,m_0}/dt > 0$. Из первого уравнения нашей системы (6) находим решение для φ_{n_0,m_0} . Оно таково, что фаза почти не меняется за время $T = 2\pi\tau_0/\sqrt{2((K+1)/z_c - 1)}$, а затем быстро меняется на 2π за время τ_0 . В момент изменения фазы на 2π происходят следующие изменения:

$$\begin{aligned} q_{n,m} &\rightarrow q_{n,m} + 1, \\ \Delta_{n,m} &\rightarrow \Delta_{n,m} - 4, \\ \Delta_{n\pm 1,m} &\rightarrow \Delta_{n\pm 1,m} + 1, \\ \Delta_{n,m\pm 1} &\rightarrow \Delta_{n,m\pm 1} + 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда z_{n_0,m_0} изменяется по закону:

$$\begin{aligned} z_{n_0,m_0} &\rightarrow z_{n_0,m_0} - 4, \\ z_{n_0\pm 1,m_0} &\rightarrow z_{n_0\pm 1,m_0} + 1, \\ z_{n_0,m_0\pm 1} &\rightarrow z_{n_0,m_0\pm 1} + 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что правила изменения (8), (10) для z_{n_0,m_0} полностью совпадают с правилами добавления и осыпания песчинок в абелевой модели кучи песка.

При переходе ко всей решетке возникает следующее затруднение. Дело в том, что время слабого изменения фазы T различно на разных узлах и постоянно изменяется за счет того, что во время этого слабого изменения может произойти скачок фазы на соседнем узле. Уравнения (6) учитывают это изменение T , однако они сложны для анализа. Сделаем еще одно упрощение. Предположим, что для всех узлов T одинаково, тогда мы можем ввести в системе дискретное время $t_k = kT$. В этом случае про движение фаз можно забыть и рассматривать лишь изменение $q_{n,m}$ и $z_{n,m}$. Правила изменения $z_{n,m}$ в этом случае можно записать в виде

$$\begin{aligned} q_{n,m}(k+1) &= q_{n,m}(k) + \theta[z_{n,m}(k) - z_c], \\ z_{n,m}(k) &= \Delta_{n,m}(q(k)) + F_{n,m}(k). \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда для $z_{n,m}$ имеем

$$\begin{aligned} z_{n,m}(k+1) &= z_{n,m}(k) + \Delta_{n,m}\{\theta[z(k)-z_c]\} + \xi_{n,m}(k) = \\ &= z_{n,m}(k) + \theta[z_{n+1,m}(k)-z_c] + \theta[z_{n-1,m}(k)-z_c] + \\ &\quad + \theta[z_{n,m+1}(k)-z_c] + \theta[z_{n,m-1}(k)-z_c] - \\ &\quad - 4\theta[z_{n,m}(k)-z_c] + \xi_{n,m}(k), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\xi_{n,m}(k) = F_{n,m}(k+1) - F_{n,m}(k).$$

Полученные отображения полностью эквивалентны алгоритму, описывающему абелеву модель кучи песка. Роль высоты кучи на данном узле играет величина $z_{n,m}$, а роль добавления песчинки здесь играет инжекция тока, описываемая функцией $\xi_{n,m}(k)$.

Для одномерного многоконтактного СКВИДа система отображений запишется в виде

$$\begin{aligned} q_n(k+1) &= q_n(k) + \theta[z_n(k) - z_c], \\ z_n(k) &= \Delta_n(q(k)) + F_n(k), \\ \Delta_n(q) &= -2q_n + q_{n+1} + q_{n-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда для z_n имеем

$$\begin{aligned} z_n(k+1) &= z_n(k) + \Delta_n\{\theta[z(k)-z_c]\} + \xi_n(k) = \\ &= z_n(k) + \theta[z_{n+1}(k)-z_c] + \theta[z_{n-1}(k)-z_c] - \\ &\quad - 2\theta[z_n(k)-z_c] + \xi_n(k), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\xi_n(k) = F_n(k+1) - F_n(k).$$

Система отображений (14) эквивалентна правилам изменения наклонов в одномерной модели кучи песка, рассматриваемой в [13].

Заметим, что уравнения (12), (14) описывающие динамику токов, можно кратко записать в виде

$$z_{n,m}(k+1) = z_{n,m}(k) + \Delta_{n,m}\{\Psi[z(k)]\} + \xi_{n,m}(k), \quad (15)$$

$$z_n(k+1) = z_n(k) + \Delta_n\{\Psi[z(k)]\} + \xi_n(k), \quad (16)$$

$$\Psi(z(k)) = \theta(z - z_c). \quad (17)$$

Рассмотрим связь функции $\Psi(z(k))$ с электродинамикой системы и ее возможные модификации. Для того чтобы понять физический смысл $\Psi(z(k))$, рассмотрим связь напряжения на контакте $U_{n,m}(t)$ с фазой, которая выражается следующим образом:

$$U_{n,m} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial \varphi_{n,m}}{\partial t}. \quad (18)$$

Если ток через контакт превышает критический, то за время T фаза $\varphi_{n,m}$ изменится на 2π , тогда среднее напряжение на контакте за это время:

$$U_{n,m} \left(k + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_{k+1}} U_{n,m}(t) dt = \frac{\Phi_0}{T}. \quad (19)$$

Или в более общем виде:

$$\begin{aligned} U_{n,m} \left(k + \frac{1}{2} \right) &= \frac{\Phi_0}{T} \theta[z_{n,m}(k) - z_c] = \\ &= \frac{\Phi_0}{T} [q_{n,m}(k+1) - q_{n,m}(k)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда для $z_{n,m}$ можно записать

$$\begin{aligned} z_{n,m}(k+1) - z_{n,m}(k) &= \\ &= \frac{T}{\Phi_0} \Delta_{n,m} \left[U \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] + \xi_{n,m}(k), \end{aligned} \quad (21)$$

т. е.

$$U_{n,m} \left(k + \frac{1}{2} \right) = \frac{\Phi_0}{T} \Psi[z_{n,m}(k)]. \quad (22)$$

Так как $z_{n,m}$ представляет собой безразмерный ток через контакт, то $U_{n,m}(k+1/2)$, а следовательно, и $\Psi(z)$ имеют простой физический смысл — это вольт-амперная характеристика контакта (ВАХ).

Заметим, что в выражении (15) для ВАХ учитывается только один порог. Полная ВАХ при учете обоих порогов дается выражением

$$\Psi(z) = \theta(z - z_c) - \theta(-z - z_c). \quad (23)$$

2.3. Граничные условия

Поведение нашей системы не полностью определяется уравнениями (1) и (2) или системами отображений (12) и (14). В задачах по изучению СОК важную роль играют граничные условия и способ возмущения системы. Чаще всего в задачах с СОК рассматривается два типа граничных условий: открытые и закрытые.

В этом разделе мы рассмотрим, что означают различные граничные условия для нашей системы.

В нашем случае открытые граничные условия можно реализовать, если считать, что наш СКВИД шунтирован нормальным сверхпроводником, критический ток которого на несколько порядков превышает критический ток джозефсоновских контактов. Это означает, что к решетке контактов с $1 \leq n \leq N$, $1 \leq m \leq M$ добавляются контакты с $n = 0, N + 1$; $1 \leq m \leq M$ и $m = 0, M + 1$; $1 \leq n \leq N$ и на них плотность критического тока будем считать равной бесконечности:

$$\begin{aligned} j_c &= \infty, \\ n = 0, N + 1; \quad 1 \leq m \leq M; \\ m = 0, M + 1; \quad 1 \leq n \leq N. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда ток на контактах с $n = 0, N + 1$; $1 \leq m \leq M$; $m = 0, M + 1$; $1 \leq n \leq N$ может

только увеличиваться, т.е. ток может уходить с подрешетки, где $1 \leq n \leq N$, $1 \leq m \leq M$, что и отвечает открытым граничным условиям. Условие (24) эквивалентно условию

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m} &= 0, \\ n &= 0, N+1; \quad 1 \leq m \leq M; \\ m &= 0, M+1; \quad 1 \leq n \leq N. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнения (1) для узлов на границе, например для $n, m = 1$ и $n = 1, m \neq 1, M$, с учетом условия (24) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} V \sin \varphi_{1,1} + \tau \frac{d\varphi_{1,1}}{dt} &= \\ &= \varphi_{2,1} + \varphi_{1,2} - 4\varphi_{1,1} + 2\pi F_{1,1}, \\ V \sin \varphi_{1,m} + \tau \frac{d\varphi_{1,m}}{dt} &= \\ &= \varphi_{2,m} + \varphi_{1,m-1} + \varphi_{1,m+1} - 4\varphi_{1,m} + 2\pi F_{1,m}. \end{aligned}$$

Для упрощенных моделей (12), (14) открытые граничные условия означают

$$\begin{aligned} z_c &= \infty, \\ n &= 0, N+1; \quad 1 \leq m \leq M; \\ m &= 0, M+1; \quad 1 \leq n \leq N, \end{aligned} \quad (26)$$

что эквивалентно условию

$$\begin{aligned} z_{n,m} &= 0, \\ n &= 0, N+1; \quad 1 \leq m \leq M; \\ m &= 0, M+1; \quad 1 \leq n \leq N, \end{aligned} \quad (27)$$

которое обычно рассматривается в задачах о системах с СОК.

При этих граничных условиях отображения (12) имеют вид

$$\begin{aligned} z_{1,1}(k+1) &= z_{1,1}(k) + \theta[z_{2,1}(k) - z_c] + \\ &+ \theta[z_{1,2}(k) - z_c] - 4\theta[z_{1,1}(k) - z_c] + \xi_{1,1}(k), \\ z_{1,m}(k+1) &= z_{1,m}(k) + \theta[z_{2,m}(k) - z_c] + \\ &+ \theta[z_{1,m+1}(k) - z_c] + \theta[z_{1,m-1}(k) - z_c] - \\ &- 4\theta[z_{1,m}(k) - z_c] + \xi_{1,m}(k). \end{aligned} \quad (28)$$

Закрытые или отражающие граничные условия означают, что ток сохраняется и не может покидать систему. В этом случае уравнения (1) для узлов на границе, например для $n, m = 1$, имеют вид

$$V \sin \varphi_{1,1} + \tau \frac{d\varphi_{1,1}}{dt} = \varphi_{2,1} + \varphi_{1,2} - 2\varphi_{1,1} + 2\pi F_{1,1}. \quad (29)$$

А для упрощенной модели

$$\begin{aligned} z_{1,1}(k+1) &= z_{1,1}(k) + \theta[z_{2,1}(k) - z_c] + \\ &+ \theta[z_{1,2}(k) - z_c] - 2\theta[z_{1,1}(k) - z_c] + \xi_{1,1}(k). \end{aligned} \quad (30)$$

2.4. Возмущение системы

При изучении СОК в модели кучи песка система обычно рассматривается в следующем режиме. Начиная с некоторого метастабильного состояния, система возмущается заранее выбранным способом, например, в случайно-выбранный узел добавляется одна песчинка. За возмущением следует процесс релаксации («лавины»), который приводит систему в следующее метастабильное состояние, после чего вновь производится возмущение и так далее.

В задачах по изучению СОК в модели кучи песка обычно используются два способа возмущения.

1. Добавление песчинки в случайно-выбранный узел. В нашем случае это эквивалентно инжекции единицы тока в случайно-выбранный контакт, т.е. когда СКВИД находится в метастабильном состоянии (все $(\partial\varphi_{n,m}/\partial t)(t_0) = 0$), ток инжекции на случайно-выбранном контакте увеличивается на единицу:

$$F_{n_0, m_0}(t_0 + \delta t) = F_{n_0, m_0}(t_0) + 1, \delta t \rightarrow 0. \quad (31)$$

Далее в процессе релаксации величина тока инжекции не изменяется.

Для упрощенной модели такой способ возмущения означает, что после прихода системы в очередное метастабильное состояние (все $z_{n,m}(k_0) < z_c$) на случайно-выбранном узле (n_0, m_0) функция

$$\xi_{n_0, m_0}(k_0) = 1, \quad (32)$$

а во время релаксации на всех узлах $\xi_{n,m} = 0$.

2. Добавление песчинки в центральный узел решетки. Для системы (1) это эквивалентно инжекции единицы тока в центральный контакт, т.е. когда СКВИД находится в метастабильном состоянии, ток инжекции на центральном контакте увеличивается на единицу:

$$F_{n_c, m_c}(t_0 + \delta t) = F_{n_c, m_c}(t_0) + 1, \delta t \rightarrow 0. \quad (33)$$

Для упрощенной модели такой способ возмущения означает, что после прихода системы в очередное метастабильное состояние в центральном узле (n_c, m_c) функция

$$\xi_{n_c, m_c}(k_0) = 1. \quad (34)$$

Помимо описанных способов возмущения, при изучении многоконтактного СКВИДа можно рассматривать и другие способы, которые не имеют физического смысла для абелевой модели кучи песка, но естественны для СКВИДов.

1. Инжекция тока во все контакты одновременно малыми порциями. Для системы (1) это означает, что после прихода в очередное метастабильное состояние ток инжекции на всех контактах изменяется следующим образом:

$$F_{n,m}(t_0 + \delta t) = F_{n,m}(t_0) + \delta F, \quad (35)$$

$$\delta t \rightarrow 0, \quad \delta F \ll 1.$$

Для упрощенной модели такой способ возмущения означает, что после прихода системы в очередное метастабильное состояние для всех n, m функция

$$\xi_{n,m}(k_0) = p, \quad p \ll 1. \quad (36)$$

Следующий способ возмущения наиболее близок к практически реализуемому в эксперименте.

2. При изучении критического состояния в сверхпроводниках образец помещается во внешнее переменное магнитное поле и ток в контактах возбуждается не прямой инжекцией, а индуцируется внешним полем. В дальнейшем в этой работе мы будем считать, что магнитное поле направлено вдоль оси y (рис. 1б). В этом случае можно показать (см. подробнее [7]), что влияние внешнего возрастающего магнитного поля эффективно сводится к инжекции положительного тока во все контакты правой границы СКВИДа и такого же по абсолютной величине, но отрицательного тока во все контакты левой границы, а полный инжектируемый в систему ток при этом равен нулю. Это означает, что когда система находится в метастабильном состоянии, ток инжекции изменяется следующим образом:

$$F_{1,m}(t_0 + \delta t) = F_{1,m}(t_0) - F_{ex},$$

$$F_{N,m}(t_0 + \delta t) = F_{N,m}(t_0) + F_{ex}, \quad (37)$$

$$1 \leq m \leq M.$$

Для упрощенной системы это будет

$$\xi_{1,m} = -F_{ex}, \quad \xi_{N,m} = F_{ex}, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (38)$$

Заметим, что в отличие от предыдущих способов возмущения системы, здесь в систему инжектируется не только положительный, но и отрицательный ток. Следовательно, в ВАХ контактов в упрощенной модели гранулированного сверхпроводника следует учитывать и отрицательный порог. Он был несуществен в предыдущих случаях, так как там система постоянно находилась вблизи положительного порога. Таким образом, при описанном способе возбуждения системы упрощенная модель будет описываться системой отображений (16) с ВАХ (23).

Свою специфику имеет и способ возмущения системы в одномерном случае.

3. В модели кучи песка в одномерном случае СОК не реализуется [5]. В работах [13, 14] было показано, что СОК в одномерном случае может реализовываться, если использовать способ добавления отличный от обычно используемых в абелевой модели кучи песка. Для нашего случая его можно выразить следующим образом:

$$F_n(t_0 + \delta t) = F_n(t_0) + 1/2, \quad (39)$$

$$F_{n+1}(t_0 + \delta t) = F_{n+1}(t_0) - 1/2,$$

где $n \neq N$ — случайно-выбранный узел.

Для упрощенной системы это означает

$$\xi_n = 1/2, \quad \xi_{n+1} = -1/2, \quad n \neq N. \quad (40)$$

Заметим, что в работах [13, 14] рассматривалась одномерная система с одной открытой и одной закрытой границами, и, несмотря на то что в системе появлялись отрицательные величины наклонов, для них рассматривался лишь один порог. Мы же в этом случае будем рассматривать упрощенную модель, учитывая оба порога (23), чтобы возможно было сравнение со случаем дифференциальных уравнений.

2.5. Средний ток и интеграл от напряжения

Математическим критерием наличия в системе самоорганизации является степенное поведение плотности вероятности размеров лавин. Размер лавины может определяться как полное число опрокидываний (toppling) за время лавины [15], эту величину можно выразить следующим образом:

$$S_i = \frac{1}{L} \sum_{k=t_{bi}}^{k=t_{ei}} \sum_{n,m} \theta(s_{n,m}(k) - s_c), \quad (41)$$

где L — число узлов в решетке, t_{bi}, t_{ei} — моменты начала и конца i -ой лавины, $s_{n,m}$ — высота кучи на данном узле в абелевой модели кучи песка или наклон кучи в модели [13], s_c — критическое значение для величины $s_{n,m}$. В нашем случае аналогом величины $s_{n,m}$ является значение тока в контакте. В случае, когда ток в контакте превышает критическое значение, на контакте происходит скачок фазы на 2π , что приводит, согласно (18), к импульсу напряжения. Таким образом, роль размера лавины в нашем случае играет усредненный по СКВИДу интеграл от напряжения по времени лавины:

$$U_i = \frac{1}{NM} \sum_{n,m} \int_{t_{bi}}^{t_{ei}} U_{n,m}(t) dt. \quad (42)$$

Учитывая (18), для U_i имеем следующее выражение:

$$U_i = \frac{\Phi_0}{2\pi NM} \sum_{n,m} [\varphi_{n,m}(t_{ei}) - \varphi_{n,m}(t_{bi})]. \quad (43)$$

Для удобства сравнения в дальнейшем будем рассматривать безразмерную величину U_i/Φ_0 .

Помимо интеграла от напряжения, будем рассматривать также свойства другой характеристики системы — среднего по системе тока на момент окончания i -ой лавины:

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{1}{NM} \sum_{n,m} z_{n,m}^{st}(t_{ei}), \\ z_{n,m}^{st} &= \frac{V}{2\pi} \sin \varphi_{n,m}(t_{ei}). \end{aligned} \quad (44)$$

При изучении абелевой модели кучи песка аналогом этой величины являлась полная масса системы [15].

Для упрощенной модели многоконтактного СКВИДа аналогичные величины будут иметь индекс R . По аналогии с выражением (41) получим в случае упрощенной модели следующее выражение для интеграла от напряжения:

$$W_i^R = \frac{1}{NM} \sum_{k=t_{bi}}^{k=t_{ei}} \sum_{n,m} \theta(z_{n,m}(k) - z_c) \quad (45)$$

и для среднего тока

$$z_i^R = \frac{1}{NM} \sum_{n,m} z_{n,m}(k = t_{ei}). \quad (46)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данном разделе приводятся результаты компьютерного моделирования критического состояния одномерного и двумерного многоконтактных СКВИДов, полученные непосредственно из систем дифференциальных уравнений при $V = 40$. Уравнения решались по схеме Эйлера при шаге по времени $dt = 0.01$. Дальнейшее уменьшение этой величины, а также применение других схем интегрирования не изменяло физических результатов. Рассматривались системы с различными граничными условиями и при различных способах возмущения.

Если не оговорено особо, то система изучалась в стандартном режиме, используемом при изучении систем с СОК. Начиная с «гладких» начальных условий, при которых все $\varphi_{n,m} = 0$ и $F_{n,m} = 0$, мы возмущали систему, изменяя величину тока инжекции одним из описанных выше способов. После

этого система релаксировала к очередному метастабильному состоянию. В процессе релаксации величина тока инжекции не изменялась. По достижении системой метастабильного состояния, мы вновь возмущали ее тем же, что и ранее, способом и так далее. При моделировании считалось, что система достигла метастабильного состояния, если для всех контактов выполнялось условие $\partial\varphi_{n,m}/\partial t < 10^{-8}$.

После некоторого переходного процесса система достигала стационарного критического состояния, состоящего из набора метастабильных критических состояний, переходящих друг в друга после очередного возмущения. Процесс прихода системы в очередное метастабильное состояние мы будем называть «лавиной». Для каждой лавины определялся средний по системе ток на момент окончания лавины, z_i (формула (44)), и усредненный по системе интеграл от напряжения, U_i/Φ_0 (формула (43)).

Каждый раз параллельно с системой дифференциальных уравнений рассматривалась соответствующая упрощенная модель, описываемая системой отображений с $z_c = V/2\pi$. Упрощенная модель изучалась в том же режиме и с тем же способом возмущения, что и исходная система. В случае упрощенной модели «гладкие» начальные условия означают, что все $z_{n,m} = 0$, а метастабильное состояние определяется как состояние, в котором все $|z_{n,m}| < z_c$. Для упрощенной модели для каждой лавины также определялся средний ток z_i^R (формула (46)) и интеграл от напряжения W_i^R (формула (45)).

Далее, как в случае упрощенной модели, так и для исходной системы, для каждой из величин вычислялась плотность вероятности $\rho(x)$, а в некоторых случаях рассматривались также межлавиновые корреляционные функции $D_x(j)$ и спектры мощности этих величин $S_x(f)$ [16]:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \langle \delta(x - x_i) \rangle, \\ D_x(j) &= \langle x_i x_{i+j} \rangle - \langle x \rangle^2, \\ S_x(f) &= 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} D_x(j) e^{-i2\pi f j}. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по номеру лавины i , а в качестве x могут быть величины z , z^R , U/Φ_0 или W^R .

Результаты, полученные для упрощенных моделей и исходных систем дифференциальных уравнений, сравнивались.

3.1. Одномерный СКВИД

Подробно одномерный многоконтактный СКВИД был изучен ранее в работе [17]. Опишем кратко основные полученные результаты.

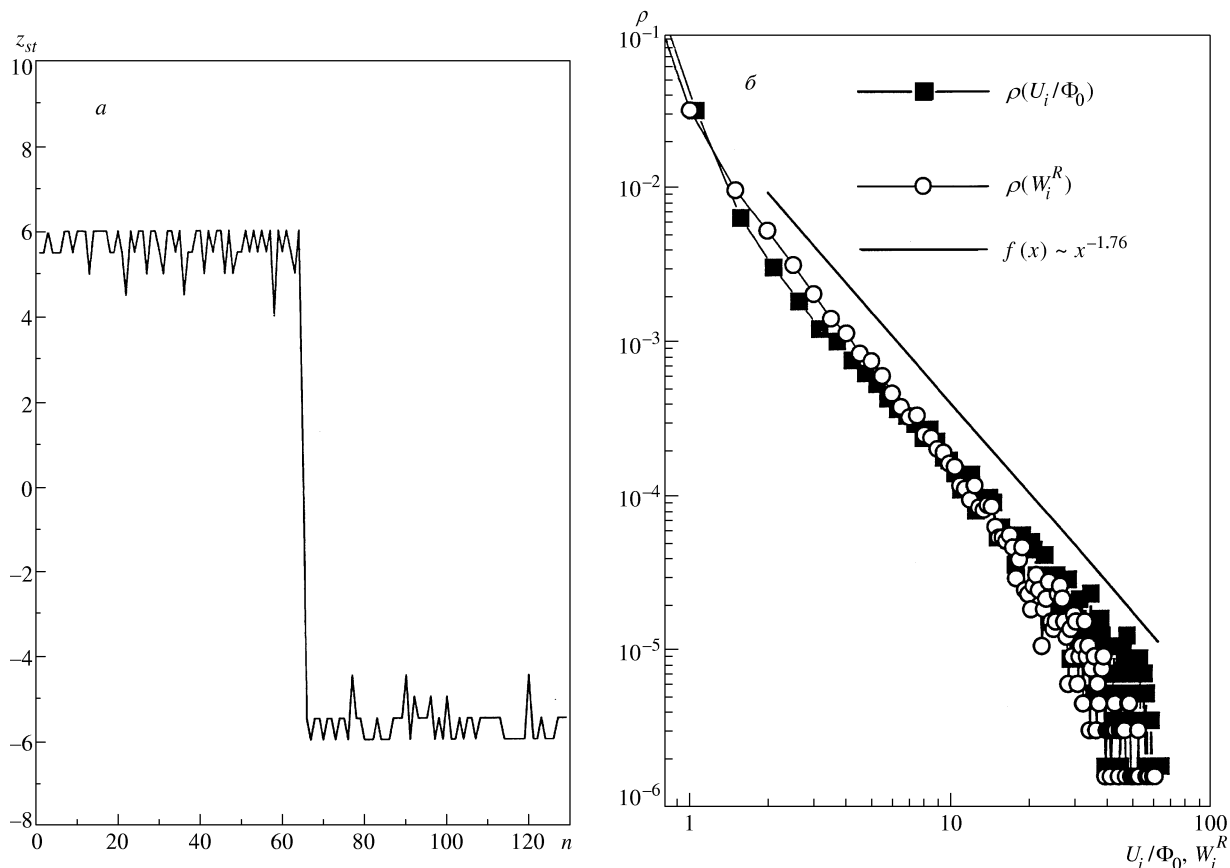


Рис. 2. Результаты компьютерного моделирования критического состояния одномерного многоконтактного СКВИДа для системы дифференциальных уравнений (2) и для упрощенной модели (16) с ВАХ (23). *а*) Одно из метастабильных состояний, составляющих самоорганизованное критическое состояние одномерного многоконтактного СКВИДа, полученное из системы дифференциальных уравнений; *б*) плотность вероятности напряжения $\rho(U_i/\Phi_0)$ для системы (2) и плотность вероятности $\rho(W_i^R)$ для упрощенной модели

Одномерный многоконтактный СКВИД, описываемый системой дифференциальных уравнений (2), рассматривался при закрытых граничных условиях

$$\begin{aligned} V \sin \varphi_1 + \tau \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= -\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi F_{e1}, \\ V \sin \varphi_N + \tau \frac{\partial \varphi_N}{\partial t} &= -\varphi_N + \varphi_{N-1} + 2\pi F_N \end{aligned} \quad (48)$$

со способом возмущения (39).

Параллельно с системой дифференциальных уравнений рассматривалась и упрощенная одномерная система (16) с ВАХ (23) в том же режиме с закрытыми граничными условиями и способом возмущения (40).

В обоих случаях после переходного процесса системы достигали критического состояния, которое представляло собой набор переходящих друг в друга метастабильных состояний, в которых значения безразмерных токов в левой части решетки положи-

тельны и близки к критическому значению z_c , а в правой отрицательны и близки к $-z_c$, рис. 2*а*. Подобная картина напоминает критическое состояние в модели Бина [4], однако там имеется лишь одно метастабильное состояние, в которое система возвращается каждый раз после очередного возмущения. В нашем же случае после возмущения система релаксирует к другому метастабильному состоянию, в котором разделение на «положительную» и «отрицательную» части сохраняется, но значения токов на контактах несколько изменяются. Именно такое поведение характерно для систем с самоорганизацией.

Заметим, что в случае одномерной «кучи песка» разделение системы на положительную и отрицательную части не возникает [13, 14], хотя там также имеются как положительные, так и отрицательные наклоны. В нашем случае разделение связано с тем, что в системе имеются два пороговых значения токов. Интересной особенностью нашей системы явля-

ется также то, что разделение происходит, несмотря на то что положительные и отрицательные токи инжектируются в случайно-выбранные контакты.

В процессе численного моделирования для каждой лавины вычислялись величины U_i/Φ_0 для системы (2) и W_i^R для упрощенной модели.

Необходимо отметить, что при их вычислении рассматривались лишь положительные части систем. Это связано с тем, что наши системы являются закрытыми, т. е. для них не выполняется одно из важнейших условий существования самоорганизованной критичности — возможность стока. Однако отдельно для положительной и отрицательной частей системы существует процесс, заменяющий сток. Он состоит в том, что избыточный положительный ток, не имея возможности покинуть систему через границу, уходит в отрицательную часть системы и аннигилирует там с отрицательным током, аналогично избыточный отрицательный ток сбрасывается в положительную часть. Таким образом, можно считать, что контакты на границе между положительной и отрицательной подсистемами для каждой из них эффективно выполняют роль резервуара для сбрасываемого с подсистем тока, т. е. положительные части являются системами с одной открытой границей и в них возможна самоорганизация критического состояния.

Были рассчитаны также плотности вероятности $\rho(U_i/\Phi_0)$ и $\rho(W_i^R)$, представленные на рис. 2б. На рисунке видно, что $\rho(U_i/\Phi_0)$ и $\rho(W_i^R)$ демонстрируют степенное поведение, из этого следует, что в положительной части системы, описываемой дифференциальными уравнениями (2), и в упрощенной модели реализуется СОК.

Из рисунка 2б также ясно, что результаты, полученные для упрощенной модели и в случае описания системы дифференциальными уравнениями, практически совпадают. Полученное соответствие говорит о том, что упрощенная модель точно отражает основные особенности поведения исходной системы и принадлежит к тому же классу универсальности, а сделанные упрощающие предположения не ведут к потере моделью основных свойств исходной системы.

3.2. Двумерный многоконтактный СКВИД во внешнем магнитном поле

В работе [10] в упрощенной модели двумерного многоконтактного СКВИДа, помещенного в переменное магнитное поле, критическое состояние было изучено методом машинного моделирования на решетке размером $N \times M$. В этом случае в системе реализуются закрытые граничные условия и ток в

контактах возбуждается не током инжекции, а переменным магнитным полем, согласно правилам (38). Однако, как было отмечено в работе [10], при таком способе возмущения СОК в системе не реализуется. Это связано с тем, что система вырождается в набор одномерных полос, в которых при способе возмущения (38) возникновение СОК невозможно. Поэтому в работе [10] был использован другой способ возмущения. По достижении системой метастабильного состояния в случайно-выбранный контакт правой границы добавлялась единица тока, а в случайно-выбранный контакт левой границы -1 , т. е.

$$\xi_{1,l} = -1, \quad \xi_{N,j} = 1, \quad (49)$$

здесь l и j случайны и независимы. Такое правило возмущения не нарушает основного физического требования о равенстве нулю полного тока, инжектируемого в систему за один шаг.

При таком способе возмущения после некоторого переходного периода система достигала критического состояния, которое представляло собой набор переходящих друг в друга метастабильных состояний, в которых значения токов в правой части системы были положительны, а в левой — отрицательны. Как и в случае одномерного СКВИДа, в положительной и отрицательной частях системы реализовывалась СОК, о чем свидетельствовало степенное распределение плотности вероятности $\rho(W_i^R)$. Реализация СОК в закрытой системе в этом случае становится возможной также благодаря наличию процесса аннигиляции токов на границе положительной и отрицательной подсистем в случае нечетного N на контактах с координатами $n = (N-1)/2+1$ (рис. 1б). В работе [10] было показано, что в случае нечетного N свойства критических состояний для положительной подсистемы в системе с аннигиляцией и в системе соответствующего размера с одной открытой границей полностью эквивалентны.

В настоящей работе моделировалось поведение двумерного многоконтактного СКВИДа с помощью системы дифференциальных уравнений (1), заданной на решетке 31×15 , с закрытыми граничными условиями. Возмущение системы задавалось правилом (49), которое для системы дифференциальных уравнений означает

$$\begin{aligned} F_{1,l}(t_0 + \delta t) &= F_{1,l}(t_0) - 1, \\ F_{N,j}(t_0 + \delta t) &= F_{N,j}(t_0) + 1, \end{aligned} \quad (50)$$

где l и j случайны и независимы.

Возникающее в системе критическое состояние по структуре полностью аналогично критическому состоянию в упрощенной модели. Как и в случае упрощенной модели, рассматривалась положительная подсистема, в которой для каждой лавины в

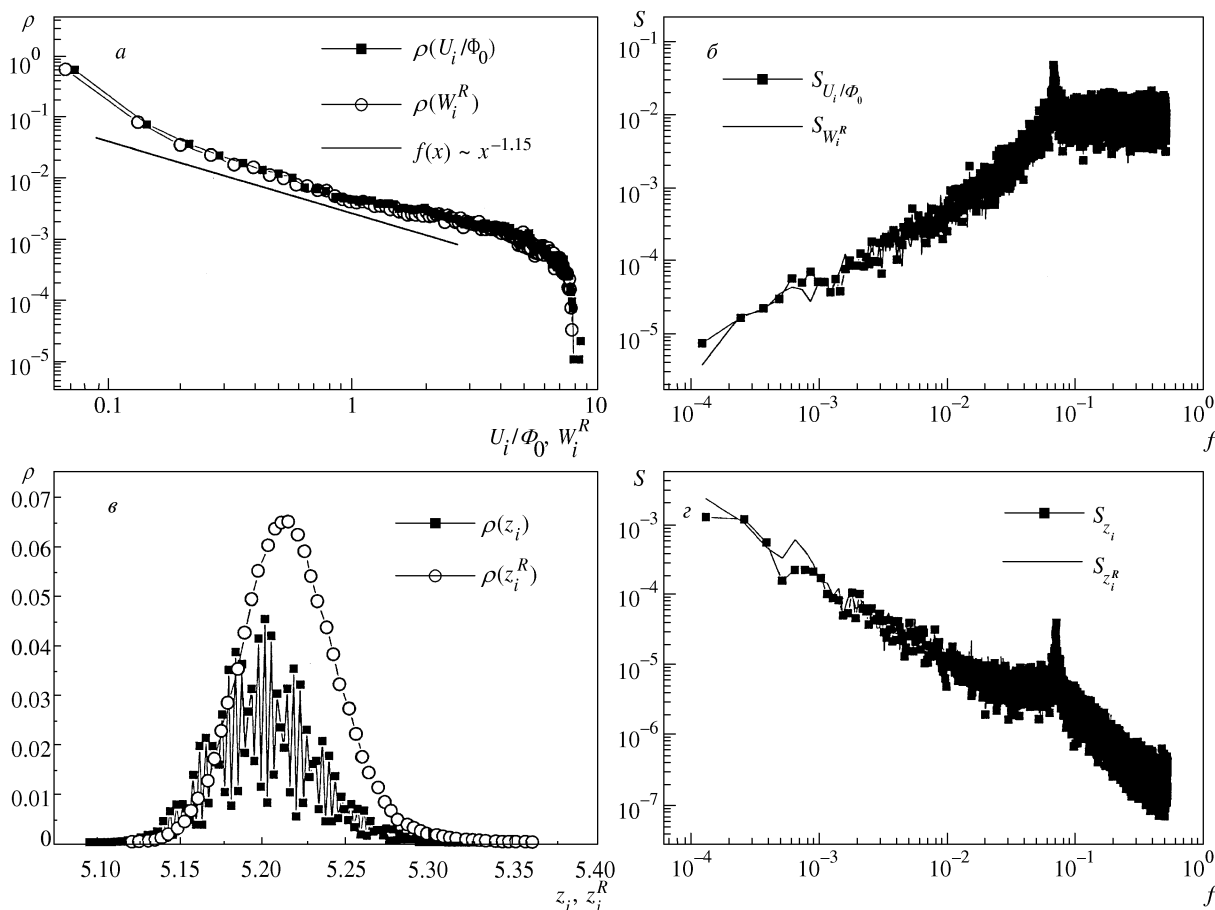


Рис. 3. Результаты компьютерного моделирования критического состояния двумерного многоконтактного СКВИДа, помещенного во внешнее магнитное поле, для системы дифференциальных уравнений (1) и упрощенной модели (16) с ВАХ (23). а) Плотность вероятности напряжения $\rho(U_i/\Phi_0)$ для системы (1) и плотность вероятности $\rho(W_i^R)$ для упрощенной модели, б) спектры мощности напряжения $S_{U_i/\Phi_0}(f)$ для системы (1) и $S_{W_i^R}(f)$ для упрощенной модели, в) плотности вероятности среднего тока для системы (1) $\rho(z_i)$ и для упрощенной модели $\rho(z_i^R)$, г) спектры мощности среднего тока для системы (1) $S_{z_i}(f)$ и для упрощенной модели $S_{z_i^R}(f)$

стационарном критическом состоянии вычислялись средний по подсистеме ток и интеграл от напряжения, а также плотности вероятности и спектры мощности для этих величин. Результаты представлены на рис. 3. На рисунке 3 также представлены аналогичные характеристики для положительной подсистемы в упрощенной модели.

На рисунке 3а видно, что плотность вероятности напряжения $\rho(U_i/\Phi_0)$ для положительной подсистемы, как и в случае упрощенной системы, имеет степенное распределение, что говорит о том, что в положительной подсистеме закрытой системы реализуется СОК. Кроме того, как и в одномерном случае, результаты для упрощенной модели и исходной системы дифференциальных уравнений практически совпадают. Следовательно, и в этом случае обе системы попадают в один класс универсальности.

Мы также провели сравнение положительной

подсистемы в случае описания СКВИДа дифференциальными уравнениями с системой размером 15×15 с одной открытой границей и инъекцией положительного тока на границу, противоположную открытой. Как и в случае упрощенной модели [10], основные характеристики систем в критическом состоянии практически совпадали.

3.3. Двумерный многоконтактный СКВИД с открытыми граничными условиями

Критическое состояние в упрощенной модели двумерного многоконтактного СКВИДа с открытыми граничными условиями при различных способах инъекции тока в систему подробно рассматривалось в работе [9]. Здесь мы приведем результаты изучения критического состояния двумерного многоконтактного СКВИДа размером $N \times N$ ($N = 21$),

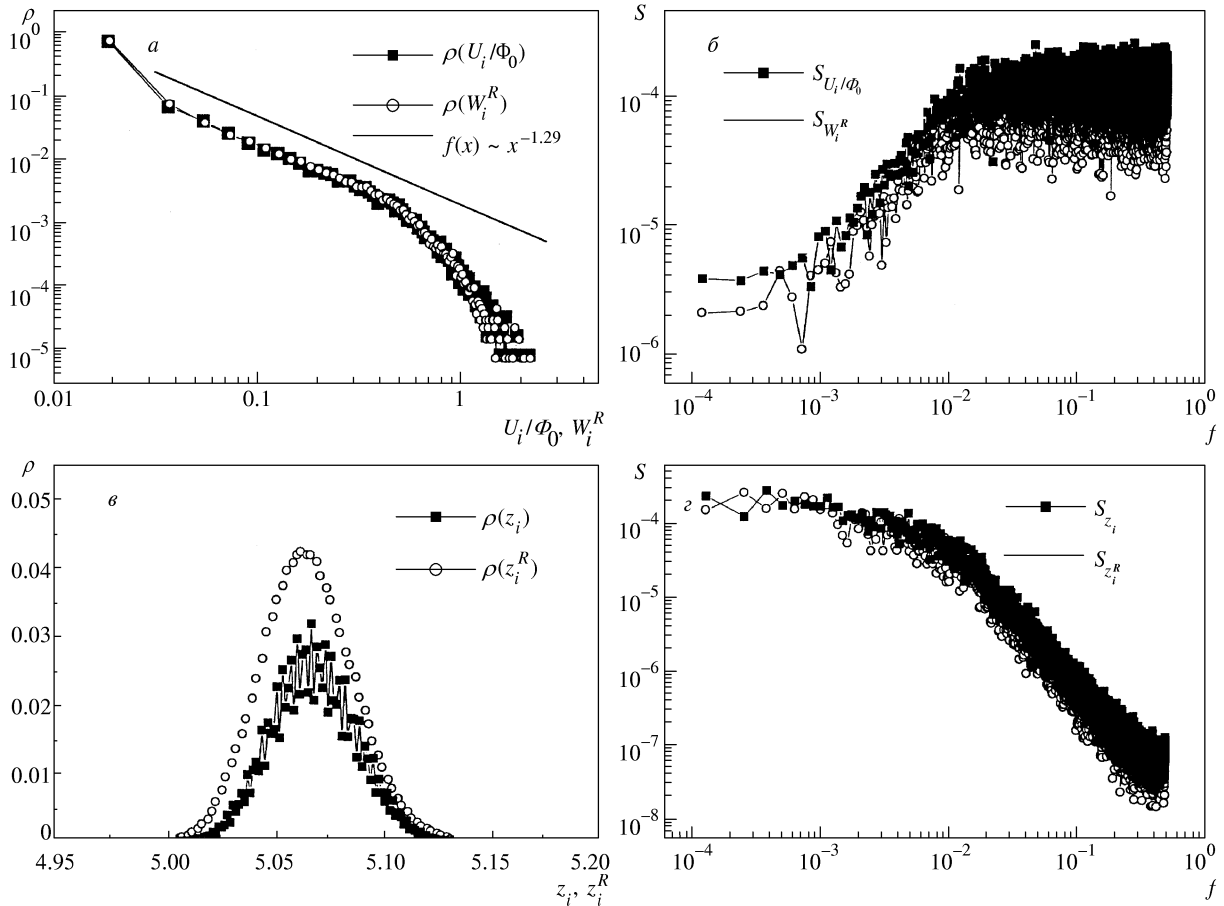


Рис. 4. Результаты компьютерного моделирования критического состояния двумерного многоконтактного СКВИДа с инжекцией тока в случайно-выбранный контакт для системы дифференциальных уравнений (1) и упрощенной модели (12). *а*) Плотность вероятности напряжения $\rho(U_i/\Phi_0)$ для системы (1) и плотность вероятности $\rho(W_i^R)$ для упрощенной модели; *б*) спектры мощности напряжения $S_{U_i/\Phi_0}(f)$ для системы (1) и $S_{W_i^R}(f)$ для упрощенной модели; *в*) плотности вероятности среднего тока для системы (1) $\rho(z_i)$ и для упрощенной модели $\rho(z_i^R)$; *г*) спектры мощности среднего тока для системы (1) $S_{z_i}(f)$ и для упрощенной модели $S_{z_i^R}(f)$

описываемого системой дифференциальных уравнений (1) при открытых граничных условиях (25) и тех же способах возмущения, что и в [9].

Возникающее в этом случае в системе критическое состояние, как и в случае упрощенной модели, представляет собой набор переходящих друг в друга метастабильных состояний. Как и в работе [9] мы рассматривали не только плотности вероятности для среднего тока z_i и напряжения U_i/Φ_0 , но также межлавиновые корреляторы и спектры мощности этих величин.

Для различных способов возмущения мы получили следующие результаты.

1. Инжекция тока в случайно-выбранный контакт (метод (31) для (1) или (32) для упрощенной модели (12)).

На рисунке 4*а* представлены плотности вероятности для напряжений в обоих случаях. Мы видим, что они демонстрируют степенное поведение, что говорит о том, что в системе реализуется самоорганизованное критическое состояние.

На рисунках 4*а*, *б*, *в*, *г* также хорошо видно, что рассматриваемые характеристики для упрощенной модели и исходной системы практически совпадают и в этом случае. Это говорит о том, что и в данной ситуации обе эти системы попадают в один класс универсальности.

2. Инжекция тока в центральный контакт (метод (33) для (1) и (34) для упрощенной модели (12)).

В этом случае для упрощенной модели (12) и исходной системы (1) использовались как «гладкие», так и «случайные» начальные условия, при кото-

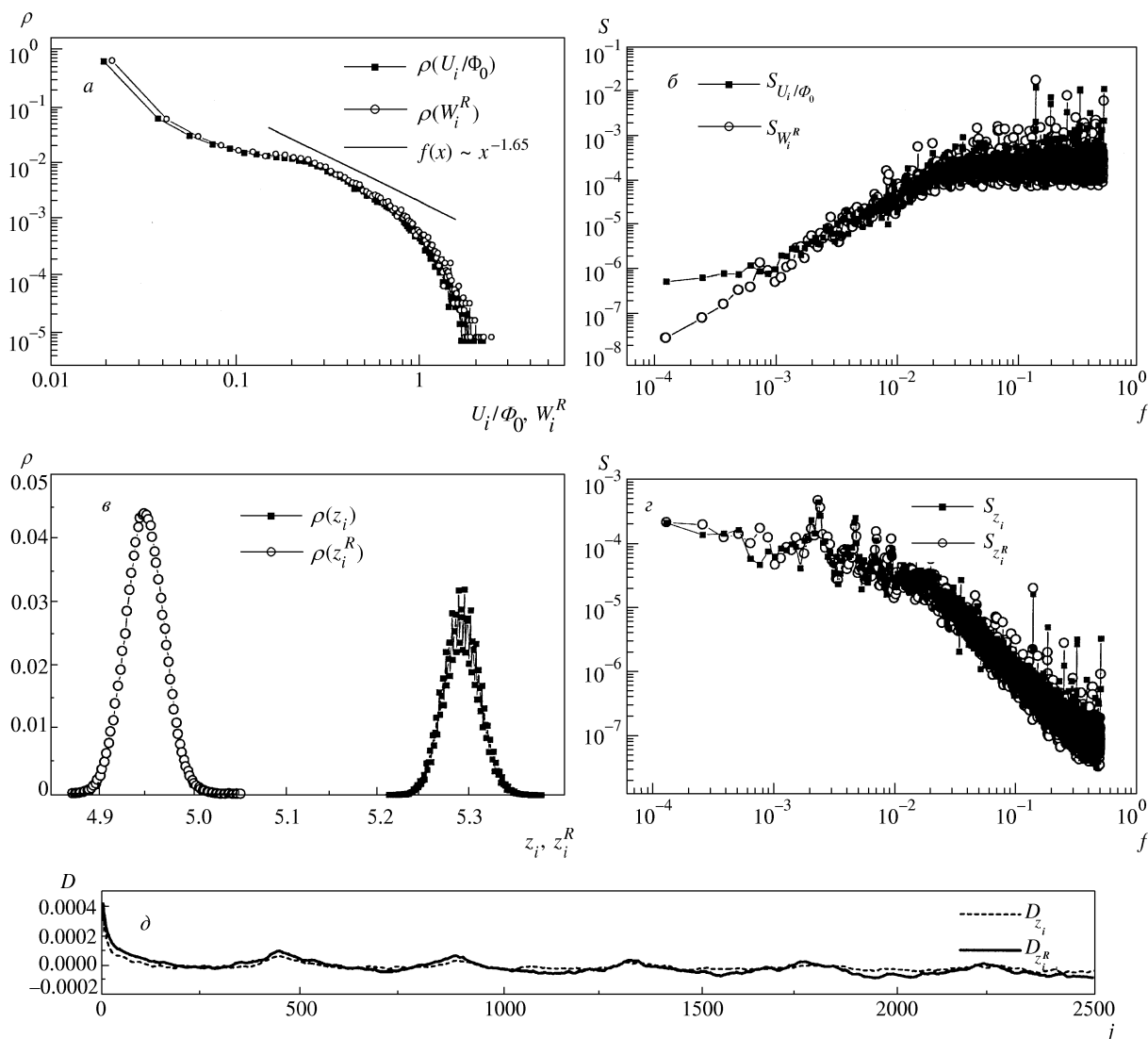


Рис. 5. Результаты компьютерного моделирования критического состояния двумерного многоконтактного СКВИДа с инъекцией тока в центральный контакт для системы дифференциальных уравнений (1) и упрощенной модели (12) в случае случайных начальных условий. *а)* Плотность вероятности напряжения $\rho(U_i/\Phi_0)$ для системы (1) и плотность вероятности $\rho(W_i^R)$ для упрощенной модели; *б)* спектры мощности напряжения $S_{U_i/\Phi_0}(f)$ для системы (1) и $S_{W_i^R}(f)$ для упрощенной модели; *в)* плотности вероятности среднего тока для системы (1) $\rho(z_i)$ и для упрощенной модели $\rho(z_i^R)$; *г)* спектры мощности среднего тока для системы (1) $S_{z_i}(f)$ и для упрощенной модели $S_{z_i^R}(f)$; *д)* корреляционные функции среднего тока для системы (1) $D_{z_i}(j)$ и для упрощенной модели $D_{z_i^R}(j)$

рых $F_{n,m}(0)$ являются случайными величинами и $0 \leq F_{n,m}(0) \leq V/2\pi$.

В случае гладких начальных условий результаты для обеих систем практически совпадали. При случайных начальных условиях различие наблюдается лишь в плотности вероятности среднего тока (рис. 5). При этом характер поведения плотности вероятности остается прежним, но величина среднего тока в упрощенной модели понижается, а в исходной системе (1) увеличивается. Это связано с тем,

что отображения и дифференциальные уравнения по-разному реагируют на введение нецелых начальных условий.

Независимо от начальных условий плотность вероятности напряжения при таком способе возмущения, как и в ранее рассмотренных случаях, ведет себя степенным образом, то есть система остается самоорганизованной. Однако показатели степени для случаев гладких и случайных начальных условий несколько различаются. Это явление уже было отме-

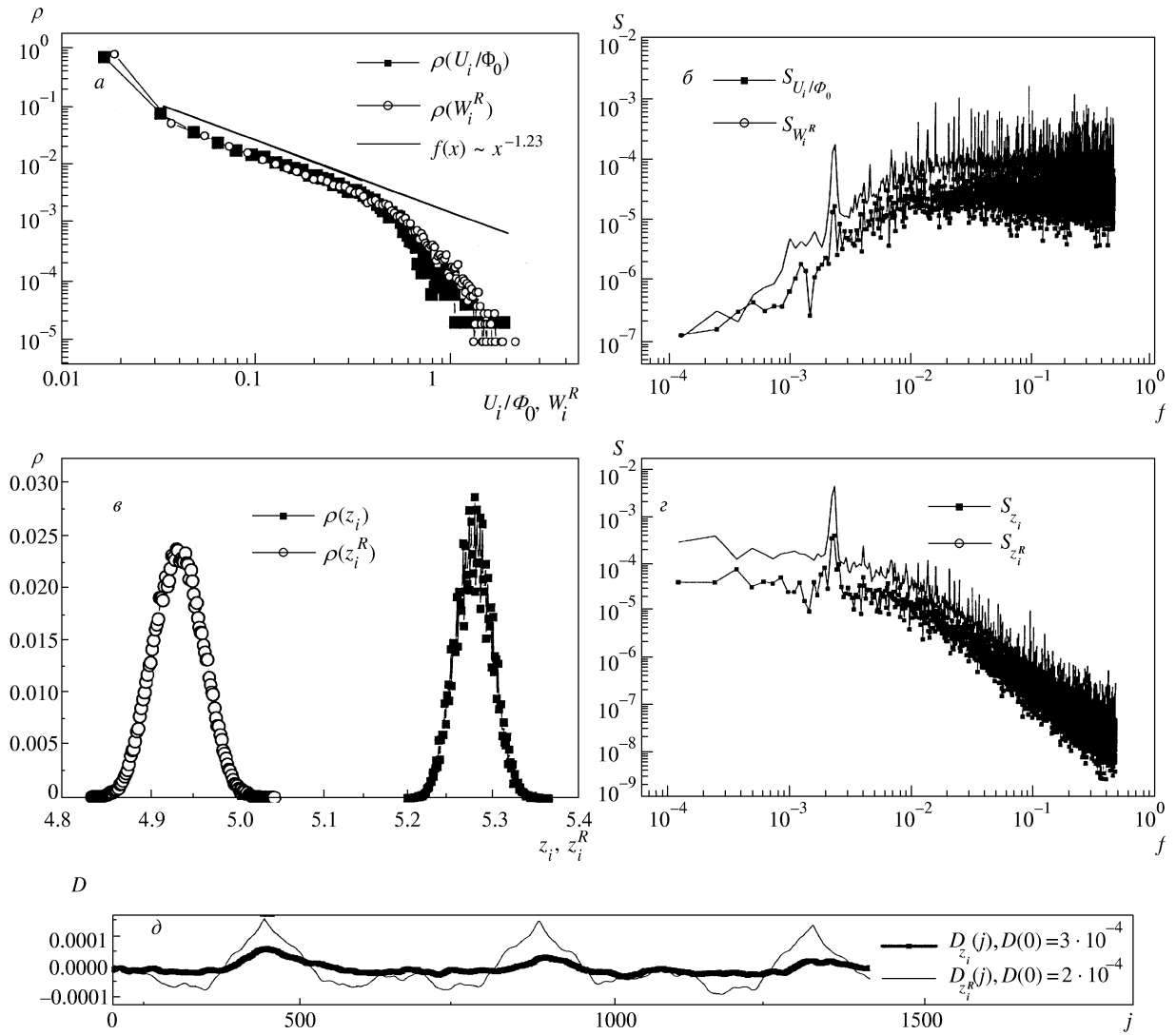


Рис. 6. Результаты компьютерного моделирования критического состояния двумерного многоконтактного СКВИДа с инъекцией тока одновременно во все контакты для системы (1) при $\delta F = 1/N^2$ и упрощенной модели (12) при $p = 1/N^2$. а) Плотность вероятности напряжения $\rho(U_i/\Phi_0)$ для системы (1) и плотность вероятности $\rho(W_i^R)$ для упрощенной модели; б) спектры мощности напряжения $S_{U_i/\Phi_0}(f)$ для системы (1) и $S_{W_i^R}(f)$ для упрощенной модели; в) плотности вероятности среднего тока для системы (1) $\rho(z_i)$ и для упрощенной модели $\rho(z_i^R)$; г) спектры мощности среднего тока для системы (1) $S_{z_i}(f)$ и для упрощенной модели $S_{z_i^R}(f)$; д) корреляционные функции среднего тока для системы (1) $D_{z_i}(j)$ и для упрощенной модели $D_{z_i^R}(j)$

чено в работе [18], где была рассмотрена модель кучи песка с центральным добавлением и различными начальными условиями. Различие в показателях может являться результатом нарушения внутренней симметрии системы.

В то же время, как было показано ранее в [9], в отличие от случая инъекции в случайно-выбранный контакт, в спектре мощности тока заметен пик на частоте $f \sim 1/N^2$, что говорит о наличии в системе квазипериодического процесса. На рисунке 5д

представлена межлавиная корреляционная функция для тока, в поведении которой хорошо видна квазипериодичность.

3. Инъекция тока одновременно на всю решетку малыми порциями (метод (35) для (1) или метод (36) для упрощенной модели).

В этом случае при изучении критического состояния как в упрощенной модели, так и для исходной системы (1) использовались «случайные» начальные условия с разбросом случайных величин $F_{n,m}$

таким, что $0 \leq F_{n,m} \leq V/2\pi$. Это связано с тем, что при гладких начальных условиях поведение системы становилось чисто периодическим и СОК в ней не возникала.

Мы выбирали величину δF для системы дифференциальных уравнений или p для упрощенной модели таким образом, чтобы за один шаг в систему инжектировалась единица тока, т. е. $N^2\delta F = N^2p \approx 1$. На рисунке 6 представлены плотности вероятности для среднего тока и напряжения, спектры мощности этих величин и межлавиная корреляционная функция среднего тока для упрощенной системы (12) и системы (1). Из рисунка понятно, что, как и в предыдущих случаях, результаты для обеих систем практически совпадают, различие имеется лишь для плотности вероятности токов.

Как уже было показано в [9], плотность вероятности напряжения имеет степенное распределение, что говорит о наличии в системе СОК. Однако, в то время как плотность вероятности напряжения ведет себя степенным образом для всех рассмотренных способов возмущения системы, спектры мощности при данном способе отличаются от полученных ранее для центральной и случайной инъекций. В спектрах имеется хорошо выраженный пик, свидетельствующий о наличии в системах квазипериодического процесса с периодом $T \sim p^{-1}$ или $T \sim \delta F^{-1}$.

Как отмечалось в работе [9], относительная величина пика на частоте $f \sim p$ или $f \sim \delta F$ растет, когда величина тока, инжектируемого в систему за один шаг, увеличивается. Вообще же периодичность в поведении системы наблюдается не только при увеличении тока, инжектируемого в систему за один шаг, но и при «сглаживании» начальных условий, т. е. уменьшении начального разброса $F_{n,m}$, а также в случае, когда ток инжектировался не на все контакты, а на определенную группу контактов.

4. ВЫВОДЫ

В настоящей работе критическое состояние двумерного и одномерного многоконтактных СКВИДов с большим значением параметра $V \gg 1$ изучалось методом машинного моделирования непосредственно из системы дифференциальных уравнений для разностей фаз на контактах. Было показано, что в этом случае критическое состояние в системе является самоорганизованным, то есть представляет собой набор метастабильных состояний, переходящих друг в друга посредством лавин, возникающих после локального внешнего возмущения системы. Таким образом, описана физическая система с СОК,

которую можно изучать не только теоретически, но и экспериментально.

Параллельно с исходными системами, описываемыми дифференциальными уравнениями, изучались упрощенные модели одноконтактного и двухконтактного СКВИДов, описываемые системами отображений и имеющие аналоги среди стандартных моделей для изучения СОК, такие как абелева модель кучи песка. Показано, что для каждого из рассмотренных в работе граничных условий и способов возмущения системы, поведение основных величин для обеих систем одинаково, то есть они попадают в один класс универсальности. Следовательно, введенные упрощения не изменяют основных физических свойств системы. Данный вывод важен и в связи с тем, что упрощенная модель гораздо удобнее для изучения и компьютерного моделирования, чем исходная система дифференциальных уравнений. Таким образом, дальнейшее изучение СОК в гранулированных сверхпроводниках можно проводить, пользуясь введенными для различных случаев в [7] упрощенными моделями.

В заключение еще раз отметим, что физические свойства гранулированных сверхпроводников позволяют рассмотреть систему в условиях, которые являются нефизическими в ранее предложенных моделях для изучения СОК. В результате изучения особенностей СОК в СКВИДах было показано, что для всех рассмотренных граничных условий и способов возмущения системы она остается самоорганизованной в общепринятом смысле, то есть плотности вероятности для напряжений имеют степенное распределение. В то же время межлавиновые корреляторы, как более чувствительные к особенностям системы характеристики, ведут себя различно. Их изучение показало, что в системе с СОК возможно существование квазипериодических процессов. Кроме того, было показано, что в гранулированных сверхпроводниках СОК может существовать даже при закрытых граничных условиях. В этом случае существование СОК обеспечивается не возможностью стока, как во всех ранее изученных открытых системах, а принципиально иным механизмом — аннигиляцией токов противоположных знаков. Таким образом, обнаружение СОК в гранулированных сверхпроводниках дает новую информацию об этом явлении.

Авторы выражают благодарность О. В. Герашенко и М. А. Пустовойту за заинтересованное обсуждение проблемы и ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-17545) и поддержана Научным советом направления «Сверхпроводимость» программы «Актуальные направления физики конденсирован-

ных сред» по проекту №96021 «Профиль», а также подпрограммой «Статистическая физика» Государственной научно-технической программы «Физика квантовых и волновых процессов» по проекту VIII-3 и Государственной программой «Нейтронные исследования вещества». Один из авторов (Н. С.) благодарит Российский фонд фундаментальных исследований за частичную финансовую поддержку (проекты 96-15-96775, 96-15-96764).

ЛИТЕРАТУРА

1. D.-X. Chen, J. J. Moreno, and A. Hernando, Phys. Rev. B **53**, 6579 (1996).
2. D.-X. Chen, A. Sanches, and A. Hernando, Phys. Rev. B **50**, 10342 (1994).
3. A. Manjfer and T. Wolf, Phys. Rev. B **47**, 5383 (1993).
4. C. P. Bean, Rev. Mod. Phys. **36**, 31 (1964).
5. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
6. G. A. Held et al., Phys. Rev. Lett. **65**, 1120 (1990).
7. С. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **106**, 607 (1994).
8. D. Dhar, Phys. Rev. Lett. **64**, 1613 (1990).
9. S. L. Ginzburg, M. A. Pustovoi, and N. E. Savitskaya, Phys. Rev. E **57**, 1319 (1998).
10. С. Л. Гинзбург, Н. Е. Савицкая, Письма в ЖЭТФ **69**, 119 (1999).
11. О. И. Кулик, И. К. Янсон, *Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах*, Наука, Москва (1970).
12. К. К. Лихарев, *Введение в динамику джозефсоновских переходов*, Наука, Москва (1985).
13. L. Kadanoff, S. R. Nagel, L. Wu, and S.-M. Zhou, Phys. Rev. A **39**, 6524 (1989).
14. S. T. R. Pinho, C. P. C. Prado, and S. R. Salinas, Phys. Rev. E **55**, 2159 (1997).
15. S. S. Manna and J. Kertesz, Physica A **173**, 49 (1991).
16. Дж. Бендат, А. Пирсол, *Прикладной анализ случайных данных*, Мир, Москва (1989).
17. С. Л. Гинзбург, Н. Е. Савицкая, Письма в ЖЭТФ **68**, 688 (1998).
18. K. Wiesenfeld, J. Theiler, and B. McNamara, Phys. Rev. Lett. **65**, 949 (1990).