

# ВЗАИМОСВЯЗЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ВРЕМЕННЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В СИСТЕМЕ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ТОНКИХ ПЛЕНОК

*И. В. Бабушкин\**, *Ю. А. Логвин\*\**, *Н. А. Лойко\*\*\**

*Институт физики  
Национальной академии наук Беларуси  
220072, Минск, Беларусь*

Поступила в редакцию 26 мая 1999 г.

Исследована пространственно-временная динамика системы, состоящей из двух тонких пленок, обладающих резонансной нелинейностью, на которую с обеих сторон действуют пространственно-однородные монохроматические световые поля одинаковой интенсивности. Получены условия возникновения бистабильности и эффекта нарушения симметрии в исследуемой системе. Показана возможность появления в системе самопульсаций вследствие влияния запаздывания света между пленками при достаточно малой апертуре падающего луча, и численно исследованы возникающие при этом динамические режимы. При увеличении апертуры луча пульсации разрушаются и устанавливается стационарное пространственно-неоднородное распределение поля. Изучены поперечные структуры, возникающие в этом случае, и выявлена связь между нарушением симметрии, бистабильностью, самопульсациями и пространственными структурами в исследуемой системе.

PACS: 42.65.Sf, 82.40.Ck, 05.70.Fh, 47.54.+r

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы большое внимание уделяется развитию оптических средств передачи и обработки информации. Одним из основных преимуществ оптических методов перед традиционными является возможность использования пространственно-распределенных сигналов, что в обычной электронике невозможно из-за чрезмерно большой длины волны несущего излучения. В этой связи очень актуальным в настоящее время является изучение механизмов формирования пространственных световых структур в лазерных и нелинейно-оптических системах [1, 2]. Исследование спонтанного формирования структур (patterns) в оптике является важным также с точки зрения общей теории неравновесных систем, так как удается выявить механизмы самоорганизации, общие как для оптических, так и для гидродинамических, химических и биологических систем [3].

Цель настоящей работы заключается в исследо-

вании пространственно-временной динамики прохождения света через систему двух тонких пленок нелинейной среды в наиболее общем виде по сравнению с предыдущими работами. Ранее было показано, что в такой системе наряду с бистабильностью могут наблюдаться нарушение симметрии, когда при одинаковых полях, падающих на систему с обеих сторон, отраженные поля не равны по амплитуде [4], а также возникновение несимметричных структур [5], неустойчивости и хаоса [6]. Принимая во внимание пространственные степени свободы, а также эффекты запаздывания, мы покажем, что спонтанное формирование пространственных структур и временных пульсаций порождаются одним и тем же механизмом обратной связи, в котором фазовые соотношения в цепи обратной связи играют ключевую роль.

Как известно, возникновение пространственных структур тесно связано с наличием бистабильности в системе [7, 8], которая наблюдается уже при наличии единственной тонкой пленки двухуровневых атомов [9–12]. При введении в систему внешней обратной связи, осуществляемой с помощью зеркала, возможно появление более сложных динамиче-

\*E-mail: babush@dragon.bas-net.by

\*\*E-mail: logvin@dragon.bas-net.by

\*\*\*E-mail: loiko@dragon.bas-net.by

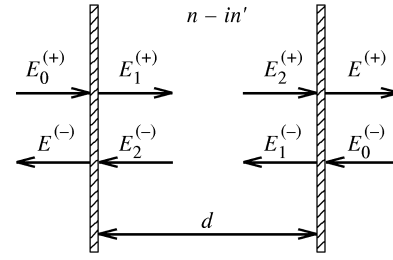
ских режимов, таких как возникновение самопульсаций [13–15] и формирование поперечных статических и бегущих пространственных структур [16–19]. Система, состоящая из двух тонких бистабильных пленок, является элементарным объектом для изучения влияния обратной связи в многослойных системах.

В настоящей работе исследуется эффект нарушения симметрии в системе двух пленок и выявляется его связь с бистабильностью в более общем по сравнению с [4] случае, а именно, без наложения каких-либо условий на фазовые соотношения в пленках. Работа построена следующим образом. Модель, описывающая рассматриваемую систему, приведена в разд. 2. В разд. 3 и 4 аналитически определяются стационарные состояния и анализируется их устойчивость на симметричной и несимметричной ветвях решений, а также определяются области пространственных и временных неустойчивостей. Сравнение временной динамики, порождаемой неустойчивостями на симметричной и несимметричной ветвях, проводится в разд. 5. Оказывается, что устойчивые периодические пульсации могут рождаться только на несимметричной ветви решения, тогда как на симметричной ветви мы обнаружили лишь обусловленные переключением с одной бистабильной ветви на другую квазистабильные пульсации, время разрушения которых экспоненциально растет с увеличением расстояния между пленками. Такого рода квазипульсации исследовались в общей теории дифференциальных уравнений с запаздыванием [20].

В разд. 6 показано, что временная динамика системы качественным образом меняется при учете поперечных пространственных координат. В этом случае колебательные решения разрушаются и система переходит в стационарное пространственно-неоднородное состояние, причем даже попытка стабилизировать наиболее неустойчивые статические пространственные гармоники не приводит к появлению колебательных решений, а возникают лишь новые классы стационарных пространственно-неоднородных решений. Общие выводы даны в разд. 7.

## 2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим систему, состоящую из двух тонких нелинейных пленок, находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга и разделенных линейной средой с комплексным показателем преломления  $n - in'$  (рис. 1). Система освещается с обеих сторон монохроматическими пространственно-однородными световыми полями с амплитудами  $E_0^{(+)}$  и  $E_0^{(-)}$ , соответственно,



**Рис. 1.** Система, состоящая из двух пленок, расстояние между которыми равно  $d$ ;  $E_0^{(\pm)}$  — амплитуды полей, падающих на первую (+) и вторую (–) пленки,  $E_1^{(\pm)}$  — амплитуды полей, прошедших через пленки, а  $E_2^{(\pm)}$  — амплитуды полей, достигших противоположной пленки

$E_1^{(+)}$  и  $E_1^{(-)}$  — амплитуды полей, прошедших через первую и вторую пленки, а  $E_2^{(-)}$  и  $E_2^{(+)}$  — амплитуды полей, достигших противоположных пленок (см. рис. 1).

Взаимодействие света с пленками будем описывать уравнениями Блоха для поляризации и разности населенности уровней для двухуровневых атомов:

$$\frac{dR_j}{dt} = \left( i(\omega - \omega_0) - \frac{1}{T_2} \right) - i \frac{\mu W_j E_j}{\hbar}, \quad (1)$$

$$\frac{dW_j}{dt} = -\frac{W_j + 1}{T_1} + i \frac{\mu}{2\hbar} (E_j^* R_j + R_j^* E_j), \quad (2)$$

где  $R_j$ ,  $j = 1, 2$ , — медленно меняющаяся часть недиагонального элемента матрицы плотности двухуровневого атома,  $\mu$  — дипольный момент перехода,  $T_1, T_2$  — времена продольной и поперечной релаксаций,  $\omega$  — частота падающего излучения,  $\omega_0$  — резонансная частота перехода атомов в пленке. Поляризация в пленке  $P = \mu N R$ , где  $N$  — концентрация атомов в пленке. При учете нормировочных соотношений

$$\gamma = \frac{T_2}{T_1}, \quad \Delta = \frac{\omega - \omega_0}{\sqrt{\gamma}}, \quad w_j = W_j, \quad r_j = \frac{R_j}{\sqrt{\gamma}}, \quad (3)$$

$$e_j = E_j \frac{\mu \sqrt{T_1 T_2}}{\hbar}, \quad j = 1, 2,$$

уравнения (1), (2) преобразуются в следующие уравнения для нормированной поляризации и разности населенностей атомов в пленках:

$$\dot{r}_j = \gamma(-1 + i\Delta)r_j + i\gamma e_j w_j, \quad (4)$$

$$\dot{w}_j = -(w_j + 1) + \frac{i}{2} (e_j^* r_j - r_j^* e_j). \quad (5)$$

В работах [6, 11] было показано, что эффективное поле в пленке может быть представлено в виде

$$e_1 = e_0^{(+)} + e_2^{(-)} - i\alpha r_1, \quad (6)$$

$$e_2 = e_0^{(-)} + e_2^{(+)} - iar_2, \quad (7)$$

где  $\alpha$  — параметр нелинейности в пленке:

$$\alpha = \frac{2\pi n N L \omega \mu^2 T_2}{\hbar c}, \quad (8)$$

$L$  — толщина пленки. Соотношения (6), (7) получены в приближении малости толщины пленки по сравнению с длиной волны падающего излучения.

Распространение поля в линейной среде между пленками подчиняется дифракционному уравнению, которое можно записать в следующем операторном виде:

$$e_2^{(\pm)}(r_\perp, t) = \rho \exp(is) \exp\left(-i \frac{d}{k} \Delta_\perp\right) e_1^{(\pm)}(r_\perp, \tau), \quad (9)$$

где, соответственно,  $\rho = \exp(kn'd)$  — потери,  $s = knd$  — фазовый сдвиг,  $\tau$  — время распространения света между пленками,  $r_\perp = (x, y)$  — поперечная составляющая радиус-вектора точки  $(x, y, z)$ ,  $k_\perp = (k_x, k_y)$  — поперечная составляющая полного волнового вектора  $\mathbf{k}$  светового поля,  $\Delta_\perp$  — поперечная часть лапласиана. Амплитуды полей, прошедших через первую и вторую пленки, согласно [11], равны соответственно  $e_1^{(+)} = e_0^{(+)} - iar_1$  и  $e_1^{(-)} = e_0^{(-)} - iar_2$ .

### 3. СТАЦИОНАРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ

Ранее в работах [6, 4] в частном случае отсутствия отстройки частоты от резонанса и  $s$ , кратного  $\pi$ , была продемонстрирована возможность бистабильности и нарушения симметрии в системе двух пленок. Ниже мы рассмотрим связь между этими двумя явлениями в общем виде.

Для стационарных значений полей в пленках получаем следующие соотношения:

$$e_{01} = e_1 + iar_1 + ia\rho \exp(is)r_2, \quad (10)$$

$$e_{02} = e_2 + iar_2 + ia\rho \exp(is)r_1, \quad (11)$$

$$e_{01} = e_0^{(+)} + \rho \exp(is)e_0^{(-)}, \quad (12)$$

$$e_{02} = e_0^{(-)} + \rho \exp(is)e_0^{(+)}. \quad (13)$$

Здесь стационарные значения поляризации и разности населенностей имеют вид

$$r_j = \frac{\eta e_j}{1 + \beta |e_j|^2}, \quad (14)$$

$$w_j = -\frac{1}{1 + \beta |e_j|^2}, \quad (15)$$

где

$$\beta = \frac{1}{1 + \Delta^2}, \quad \eta = \frac{i - \Delta}{1 + \Delta^2} \quad j = 1, 2.$$

При условии равенства падающих полей ( $e_{01} = e_{02}$ ) стационарное симметричное состояние  $e = e_1 = e_2$  находится из уравнения

$$e_{01} = e_{02} = e + \frac{ia\eta [1 + \rho \exp(is)] e}{1 + \beta |e|^2}, \quad (16)$$

которое хорошо известно из теории бистабильности [7, 8]. Для анализа явления нарушения симметрии подставим (14), (15) в (10), (11) и после несложных алгебраических преобразований получим

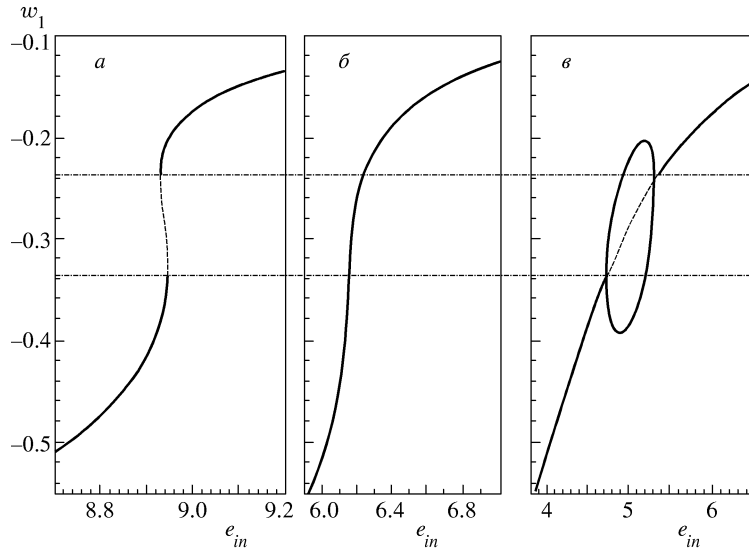
$$e_1 + \frac{ia\eta [1 - \rho \exp(is)] e_1}{1 + \beta |e_1|^2} = e_2 + \frac{ia\eta [1 - \rho \exp(is)] e_2}{1 + \beta |e_2|^2}. \quad (17)$$

Из выражения (17) видно, что обе части содержат такую же бистабильную функцию, как и правая часть (16) с одним различием:  $s$  меняется на  $s + \pi$ . Далее, из свойств  $S$ -образности этой функции очевидно, что одно и то же значение правой (левой) части выражения (17) может быть достигнуто при различных значениях  $e_1$  ( $e_2$ ). Эта ситуация как раз и соответствует выполнению равенства (17) при разных значениях  $e_1$  в левой части, а  $e_2$  в правой, т.е. нарушению симметрии при одинаковых падающих полях. Получается, что бистабильность симметричного решения (16) оказывается взаимосвязанной с нарушением симметрии, описываемым выражением (17) посредством замены  $s$  на  $s + \pi$ . Данную закономерность можно проследить на рис. 2, где представлена зависимость стационарной разности населенностей в пленках от величины падающего поля  $e_{in}$ . Видно, что при изменении от  $s = 0$  (рис. 2а) до  $s = \pi$  (рис. 2б) бистабильность сменяется нарушением симметрии при одних и тех же значениях разности населенностей (или интенсивности света) в пленках. При некотором промежуточном значении фазы  $s$  (см. рис. 2б) в системе нет ни бистабильности, ни нарушения симметрии. Условие существования бистабильности (нарушения симметрии) определяется неравенством

$$[2 \cos(\arg \Lambda) - |\Lambda|]^3 + 27|\Lambda| < 0, \quad (18)$$

где  $\Lambda = ia\eta [1 - \rho \exp(is)]$ . Оно переходит в аналогичное условие, полученное в [4] при соответствующих упрощающих предположениях.

Рисунок 2 демонстрирует важную роль фазовых эффектов при прохождении света между пленками. Эти же эффекты определяют развитие пространственных и временных неустойчивостей, как будет



**Рис. 2.** Стационарные состояния для параметров  $\alpha = 10$ ,  $\Delta = 2$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\gamma = 0.1$ . Сплошными линиями отмечены устойчивые состояния, штриховыми — неустойчивые по отношению к возмущениям с  $\theta = 0$ . а)  $s = 0$ : бистабильность на симметричной ветви решения; б)  $s = 0.5\pi$ : отсутствуют как нарушение симметрии, так и бистабильность; в)  $s = \pi$ : нарушение симметрии

показано ниже в данной статье. Отметим, что равенство, аналогичное (17), исследовалось в работе [13] при изучении  $2\tau$ -пульсаций в системе, состоящей из пленки, нанесенной на диэлектрическую подложку. В этой работе  $e_1$  и  $e_2$  выполняли роль значений поля в последовательные полупериоды пульсаций, причем переход от режима с пульсациями к режиму, где присутствует только бистабильность, так же как и в нашей системе переход от нарушения симметрии к бистабильности, может быть совершен лишь изменением фазовых соотношений в цепи обратной связи. Таким образом, одни и те же алгебраические соотношения описывают взаимодополняющие друг друга эффекты, наблюдаемые в нелинейных системах: бистабильность, нарушение симметрии и  $2\tau$ -пульсации.

#### 4. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Для исследования устойчивости состояния равновесия по отношению к пространственно-временным возмущениям  $(\delta r_j, \delta w_j)$  линеаризуем систему (4), (5). Линеаризация относительно возмущений, пропорциональных  $\exp(\lambda t + r_\perp k_\perp)$ , дает систему уравнений для определения  $\lambda$ :

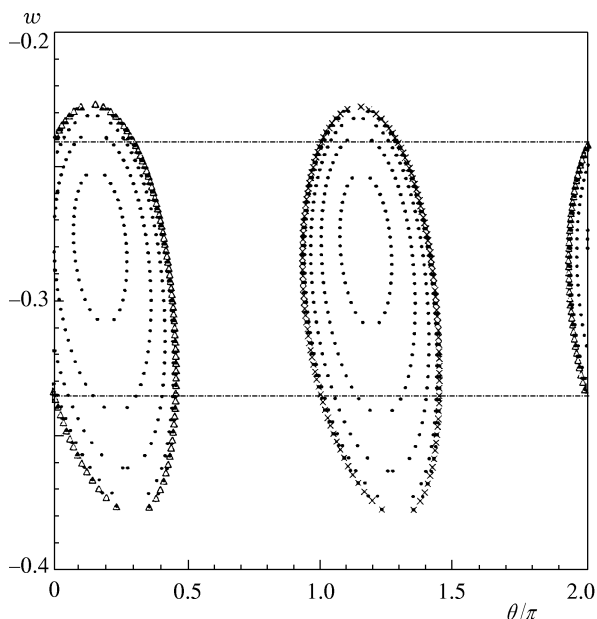
$$\begin{pmatrix} D_1 & U_1 \\ U_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$D_j = \begin{pmatrix} -1+i\Delta+\alpha w_j & 0 & i e_j \\ 0 & -1-i\Delta+\alpha w_j & -i e_j^* \\ \frac{\gamma}{2}(i e_j^* - \alpha r_j^*) & \frac{\gamma}{2}(-i e_j - \alpha r_j) & \gamma \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$U_j = \begin{pmatrix} \alpha w_j \exp(i\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha w_j \exp(-i\Theta) & 0 \\ -\frac{\gamma\alpha}{2} e_j^* \exp(i\Theta) & -\frac{\gamma\alpha}{2} e_j \exp(-i\Theta) & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где  $F_j$  — вектор возмущения:  $F_j = (\delta r_j, \delta r_j^*, \delta w_j)^T$ ,  $\Theta = \theta + s + \lambda\tau$ ,  $\theta = k_\perp^2 d/k$  характеризует поперечное возмущение с волновым числом  $k_\perp$ . В силу того что  $\theta$  и  $\lambda$  входят в выражение для  $\Theta$  одинаковым образом, пространственные и временные неустойчивости проявляют себя единообразно.

Уравнение (19) является характеристическим квазиполиномом, в котором неизвестная величина  $\lambda$  входит как в виде степеней  $\lambda^n$ , так и в виде членов вида  $\exp(-\lambda\tau)$ . Границы устойчивости получаются из (19) подстановкой  $\lambda = i\Omega$ , где  $\Omega$  — действительная величина. В случае, если  $\Omega = 0$ , мы имеем области неустойчивости относительно «статических» возмущений (с нулевой временной ча-



**Рис. 3.** Области статической неустойчивости для параметров рис. 2а,  $\tau = 50$ . Точками обозначены границы областей, в которых имеет место неустойчивость по отношению к АХ-возмущениям, треугольниками и крестиками — границы областей с неустойчивостью по отношению соответственно к симметричным ( $\delta w_1 = \delta w_2$ ) и несимметричным ( $\delta w_1 = -\delta w_2$ ) статическим возмущениям

стойкой), в противном случае — области неустойчивости относительно возмущений типа Андронова—Хопфа (АХ). На рис. 3 показаны кривые нейтральной устойчивости системы по отношению к статическим (отмечены треугольниками и крестиками) и АХ-неустойчивостям (отмечены точками) на симметричной ветви для параметров, соответствующих рис. 2а. Видно, что АХ-зоны вложены внутрь статических, поэтому их наличие приводит лишь к повышению порядка неустойчивости системы. Численный эксперимент показывает, что это не сказывается качественным образом на динамике системы. При увеличении времени запаздывания  $\tau$  число таких зон увеличивается, по мере того как все новые корни пересекают мнимую ось, в то время как уже существующие зоны стремятся к границе статической неустойчивости.

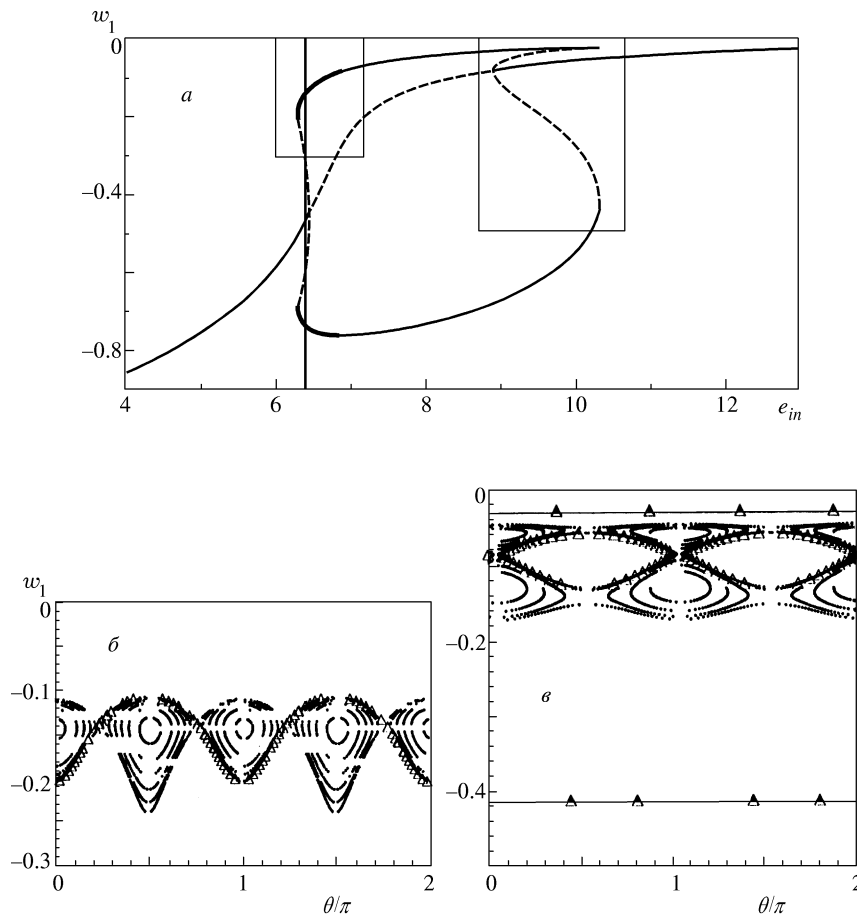
Как видно из выражения для  $\Theta$ , смещение по  $s$  в нем компенсируется противоположным смещением по  $\theta$ . Если при таком изменении  $s$  величины  $e_j(w_j, r_j)$ , удовлетворяющие уравнению (19), по-прежнему соответствуют стационарным состояниям системы, то зоны неустойчивости лишь сдвигаются вдоль оси  $\theta$  без изменения своей формы. Та-

кая ситуация имеет место в рассматриваемом случае симметричной ветви, так как значения  $e_j$ , определенные уравнением (19), остаются стационарными значениями системы при изменении  $s$  за счет соответствующего подбора падающего поля согласно выражению (16).

При параметрах, соответствующих случаю рис. 2а, области неустойчивости, отмеченные треугольниками на рис. 3, ответственны за развитие симметричных возмущений ( $\delta w_1 = \delta w_2$ ), тогда как область, отмеченная крестиками, отвечает за развитие несимметричных возмущений ( $\delta w_1 = -\delta w_2$ ).

Перейдем теперь к исследованию неустойчивости на несимметричной ветви решения. Анализ показывает, что пространственно-временная неустойчивость на несимметричной ветви возможна только в том случае, когда бифуркация типа вилки, соответствующая появлению несимметричных решений, становится субкритической, что достигается увеличением параметра нелинейности  $\alpha$ . Пример этого приведен на рис. 4. Рисунок 4а представляет стационарные зависимости  $w_1$  от падающего поля  $e_{in}$ . На рис. 4б приведены области неустойчивости, соответствующие стационарным состояниям несимметричной ветви, заключенным в левый и правый прямоугольники на рис. 4а. Для экономии места мы показываем лишь зоны, соответствующие верхней части несимметричной ветви, поскольку зона на нижней части ветви имеет похожий вид. Из рис. 4б следует, что состояния, отмеченные жирной линией на рис. 4а, неустойчивы по отношению к статическим возмущениям с  $\theta \neq 0$ , т. е. здесь возможно возникновение пространственных структур. Кроме того, эти состояния неустойчивы к АХ-возмущениям, причем зоны данной неустойчивости не перекрываются с областями статической неустойчивости для  $0 \leq \theta \leq 0.25, 0.75 \leq \theta \leq 1.25$  и т. д., что указывает на возможность возбуждения пульсаций. В отличие от ситуации на симметричной ветви, области неустойчивости на несимметричной ветви с изменением  $s$  не сдвигаются вдоль оси  $\theta$ , а сжимаются или растягиваются в вертикальном направлении, так как меняются соотношения между стационарными значениями  $e_j(w_j, r_j)$  в двух пленках. При этом один из минимумов кривой нейтральной устойчивости по отношению к статическим возмущениям всегда лежит на оси  $\theta = 0$ , как и на рис. 4б.

Стационарные состояния на части несимметричной ветви, заключенной в правый прямоугольник на рис. 4а, являются неустойчивыми в интервале  $w_1$  от  $-0.41$  до  $-0.03$  относительно статических возмущений с любым  $\theta$ , включая  $\theta = 0$ . Вследствие этого будут развиваться однородные по пространству возмущения, переводящие систему в устойчи-



**Рис. 4.** а) Стационарная кривая для значений параметров  $\alpha = 20, \Delta = 2, \rho = 0.5, s = \pi, \gamma = 0.1, \tau = 10$ . Сплошными линиями отмечены устойчивые состояния, штриховыми — состояния, неустойчивость которых в основном определяется статическими возмущениями с  $\theta = 0$ , жирными — состояния, неустойчивые по отношению к статическим возмущениям с  $\theta \neq 0$  и к АХ-возмущениям. б) Границы нейтральной устойчивости состояний, соответствующих части несимметричной ветви в левом прямоугольнике на рис. 4а. в) Границы нейтральной устойчивости состояний, находящихся на части несимметричной ветви в правом прямоугольнике на рис. 4а. Треугольниками обозначены границы устойчивости по отношению к статическим возмущениям, точками — по отношению к АХ-возмущениям

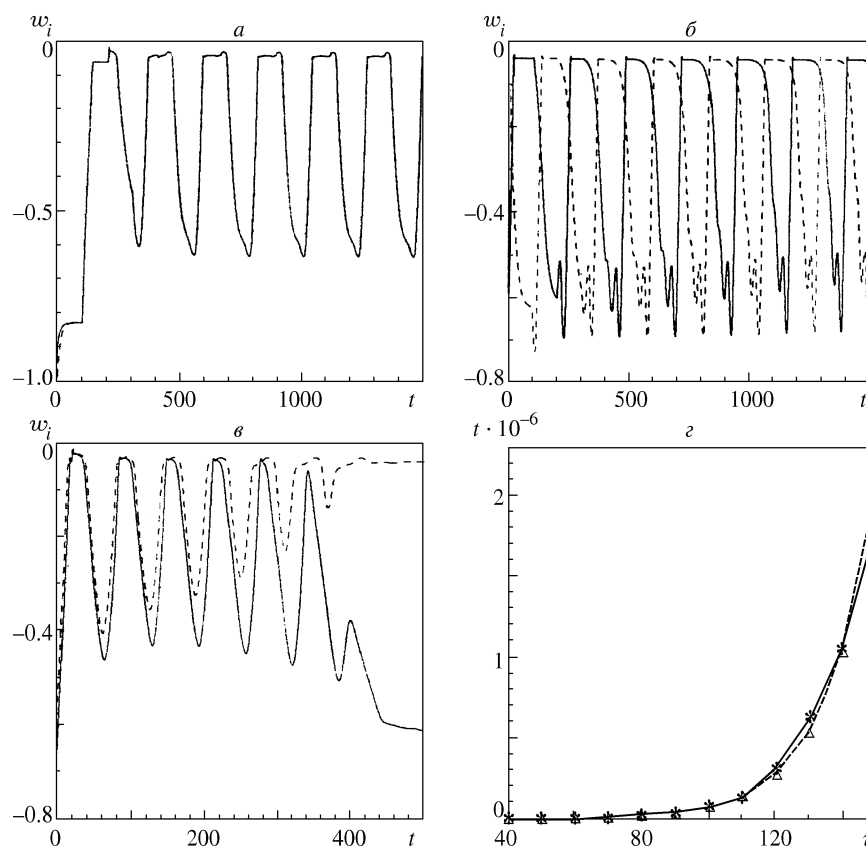
вые стационарные состояния, существующие при данных параметрах. Внутри области статической неустойчивости, в свою очередь, находятся также области АХ-неустойчивости и вторичной статической неустойчивости, которые лишь повышают порядок неустойчивости решений и, так же как и в случае вложенных АХ-зон на симметричной ветви, качественным образом не влияют на динамику системы.

### 5. ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА

Рассмотрим сначала случай, когда апертура падающего светового луча сравнительно мала, так что может возбуждаться лишь нулевая простран-

ственная гармоника. При этом следует принимать во внимание только неустойчивости на оси  $\theta = 0$  на рис. 3, 4.

Как уже отмечалось, области АХ-неустойчивости на симметричной ветви всегда лежат внутри статических зон в отличие от родственной системы тонкой пленки с зеркалом [16], что затрудняет получение АХ-пульсаций, подобно тому как это было сделано в [16], так как после переходного процесса в системе устанавливается стационарное устойчивое состояние. Однако в работах [6, 13], где дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом в пределе очень большого запаздывания  $\tau \rightarrow \infty$  сводились к дискретным отображениям, была показана возможность существования разрывных пульсаций с периодом  $2\tau$ . В работе [6] исследовались также бо-



**Рис. 5.** Квазипульсации, порожденные переключениями с одной части ветви стационарной кривой на другую. Значения параметров совпадают с представленными в [6] ( $\alpha = 8, \Delta = 0, \rho = 0.5, \gamma = 0.1$ ). Сплошной линией показана временная зависимость для  $w_1$ , штриховой — для  $w_2$ . а)  $s = \pi, \tau = 100$ : переключения между несимметричными ветвями (стационарная характеристика, как на рис. 2в); б)  $s = 0, \tau = 100$ : переключения между верхней и нижней ветвями бистабильной кривой (стационарная характеристика, как на рис. 2а); в)  $s = \pi, \tau = 20$ : затухание квазипульсаций для малого значения  $\tau$ . г) Время жизни квазипульсаций (штриховая кривая с нанесенными на ней треугольниками) и экспонента, наилучшим образом приближающая эту кривую,  $C \exp(6.7\tau)$  (сплошная кривая с нанесенными на ней звездочками)

более сложные режимы, вплоть до хаоса. В этих работах оставался открытым вопрос, сводится ли динамика системы при очень больших, но конечных  $\tau$  к динамике, получаемой в предельном переходе  $\tau \rightarrow \infty$ , другими словами, существует ли конечное  $\tau$ , для которого этот предельный цикл или близкое к нему множество является устойчивым аттрактором. Ясно, что для любых конечных  $\tau$  данный аттрактор дискретного отображения, который является кусочно-непрерывной функцией, не будет являться аттрактором системы (4), (5), ни устойчивым, ни неустойчивым, поскольку, как следует из общей теории дифференциальных уравнений с запаздыванием [21], решения системы (4), (5) с течением времени сглаживаются (если в момент времени  $t = 0$  решение разрывно, то в момент времени  $t = n\tau$  оно уже будет  $n - 1$  раз дифференцируемо)

и, таким образом, периодическим аттрактором системы (4), (5) может быть лишь бесконечно дифференцируемая функция. Процесс сглаживания решений отражает наличие временной дисперсии в системе, обусловленной инерционностями поляризации и населенности нелинейной среды в пленках, которая определяется временем релаксации  $T_1$  и  $T_2$ . По мере увеличения запаздывания по сравнению с данными величинами влияние инерционности уменьшается и осциллирующее решение, в силу непрерывной зависимости решений уравнений с запаздывающим аргументом от запаздывания [21, 22], может стремиться асимптотически к разрывному, получаемому в случае дискретных отображений.

При достаточно больших  $\tau$  ( $1/\tau \ll 1$ ) система (4), (5) является сингулярно возмущенной по отношению к соответствующему дискретному отобра-

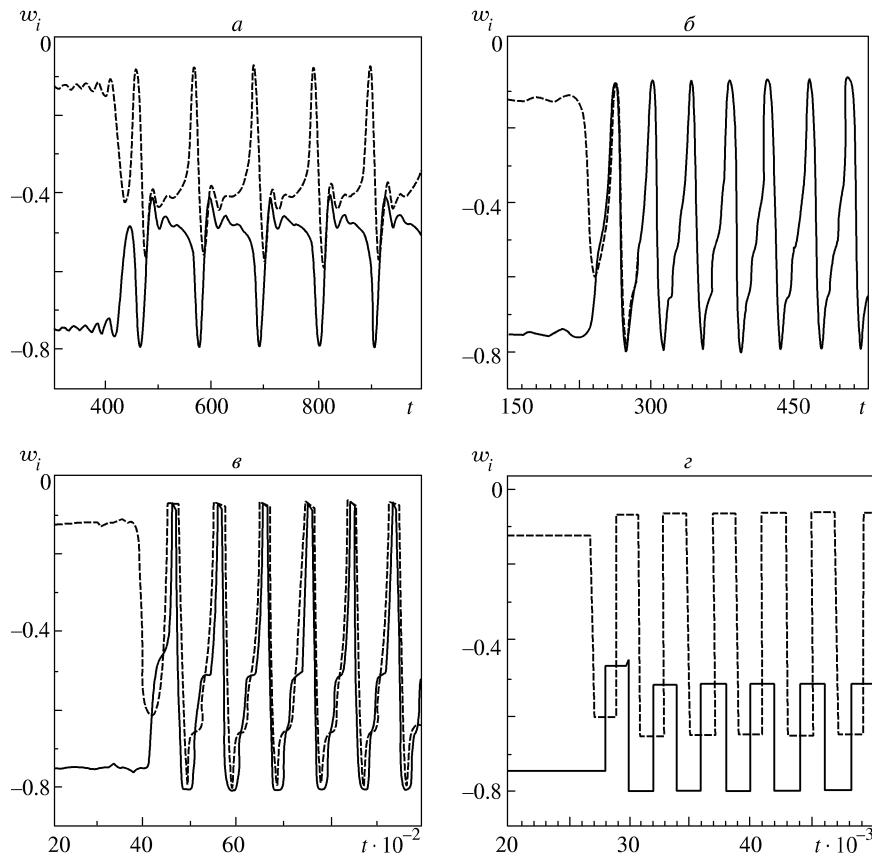


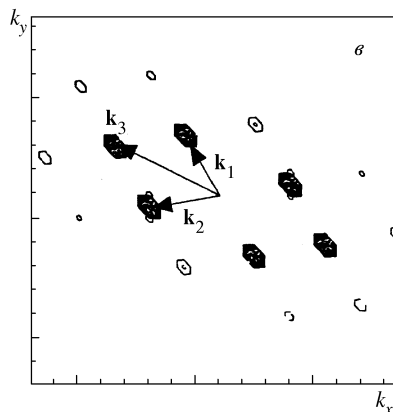
Рис. 6. Устойчивые пульсации для значения падающего поля, отмеченного прямой линией на рис. 4а:  $\alpha = 20$ ,  $\Delta = 2$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $s = \pi$  и  $\tau = 4$  (а), 100 (б), 200 (в), 1000 (г)

жению. Для простейших одномерных систем такого рода было показано [20], что в случае отображения, имеющего два аттрактора — неподвижную точку с достаточно большой областью притяжения и цикл периода  $2\tau$ , — типичным для соответствующего дифференциально-разностного уравнения является следующее поведение: если система сначала находится в области притяжения  $2\tau$ -периодического аттрактора соответствующего ей предельного отображения ( $\tau = \infty$ ), то ее колебания разрушаются по прошествии периода времени  $\exp(a\tau)$  (где  $a$  — некоторая константа) и она уходит на стационарное состояние. Это означает, что если константа  $a$  достаточно велика, то уже при небольших  $\tau$  мы получаем траекторию, которую в течение достаточно большого промежутка времени можно считать периодической. Численный эксперимент показал, что такое поведение свойственно и системе (4), (5). На рис. 5 показаны квазипульсации такого рода для параметров системы, приведенных в работе [6], и значений  $s$ , при которых имеет место нарушение симметрии (рис. 5а) или бистабильность (рис. 5б). В первом

случае стационарная характеристика подобна приведенной на рис. 2в, во втором — на рис. 2а. При достаточно больших  $\tau$  эти квазипульсации приобретают прямоугольную форму. На рис. 4а–б показаны лишь несколько периодов до разрушения пульсаций, которое происходит через сравнительно большой промежуток времени. Процесс разрушения квазипульсаций для малых  $\tau$  показан на рис. 5в. На рис. 5г изображена зависимость времени их жизни от времени запаздывания  $\tau$ .

Отметим, что для получения квазипульсаций достаточно задать специальные начальные условия. В случае, когда стационарная кривая проявляет бистабильность, необходимо, чтобы состояние для первой пленки соответствовало нижней ветви кривой бистабильности, а для второй — верхней. По прошествии времени  $\tau$  происходит переключение (пленки меняются местами), через время  $2\tau$  система возвращается в исходное состояние и т. д. Это соответствует устойчивому  $2\tau$ -циклу, получаемому в предельном отображении ( $\tau \rightarrow \infty$ ). В результате такой последовательности переключений получаются несиммет-





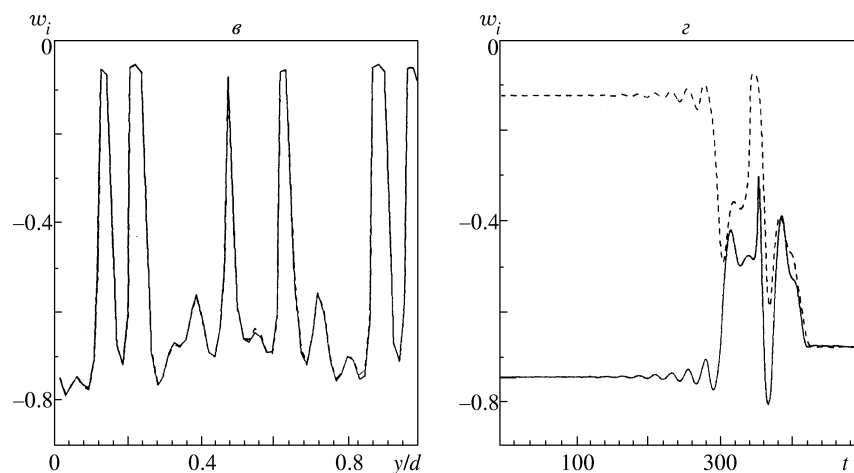
**Рис. 7.** Несимметричные ромбические структуры, рожденные из симметричного состояния для параметров, соответствующих случаю рис. 2в. Разности населенностей в первой (а) и второй (б) пленках и пространственный спектр структуры (в):  $k_3$  принадлежит области, ответственной за развитие симметричных возмущений и показанной на рис. 3;  $k_1$  и  $k_2$  принадлежат области, ответственной за развитие несимметричных возмущений

ричные квазипульсации, изображенные на рис. 5б. Для случая стационарной зависимости с нарушением симметрии необходимо, напротив, поместить обе пленки на одну и ту же несимметричную ветвь. Через время  $\tau$  они переключатся на вторую ветвь вместе, что соответствует симметричным пульсациям (рис. 5а). Тем не менее область притяжения таких квазипульсаций достаточно велика. Даже если в качестве начальных условий взять состояние, в котором находятся пленки в отсутствие внешнего поля, и мгновенно включить его в момент времени  $t = 0$  (как на рис. 5а), система тем не менее демонстрирует  $2\tau$ -квазипульсации.

Из рис. 5г видно, что время жизни квазипульсаций в действительности растет экспоненциально. На этом рисунке звездочками, соединенными сплошной линией, обозначены данные, полученные из численного эксперимента, треугольниками, соединенными штриховой линией, — кривая  $t = C^* \exp(6.7\tau)$ , где  $C^*$  — константа. Уже при не очень больших  $\tau$  время жизни составляет несколько тысяч периодов, и с увеличением  $\tau$  отношение времени жизни к периоду быстро растет. Таким образом, при подходящих временах запаздывания пульсации существуют столь долгое время, что эффективно являются полноцен-

ными периодическими колебаниями (что является аргументацией применимости перехода к предельным отображениям в [6, 13]).

Возвращаясь к рис. 4б, исследуем временную динамику системы, возникающую, если начальные условия выбрать на неустойчивом относительно временных возмущений участке несимметричной ветви. На рис. 6 показаны примеры колебаний, возникающих из таких стационарных состояний для увеличивающихся значений  $\tau$ . На начальной стадии (рис. 6а,  $t < 400$ ), видно развитие АХ-пульсаций, однако затем система переходит в режим колебаний с большой амплитудой, соответствующих переключению между ветвями стационарной характеристики на рис. 4а. При увеличении  $\tau$ , как видно из рис. 6б, пульсации, рожденные на несимметричной ветви, вполне могут носить симметричный характер. При дальнейшем увеличении  $\tau$  форма пульсаций стремится к прямоугольной с периодом  $4\tau$  (рис. 5г), но, в отличие от пульсаций на симметричной ветви, они являются устойчивыми. На рис. 6в показаны колебания для промежуточного значения  $\tau$ , поясняющие переход от рис. 6б к рис. 6г. Как видно из сравнения рис. 6г и рис. 4а, на котором прямой вертикальной линией указано значение падающего поля (началь-



**Рис. 8.** Структуры, возникающие из однородного состояния на несимметричной ветви (значение падающего поля отмечено вертикальной линией на рис. 4*a*), для параметров, соответствующих рис. 4, и  $\tau = 4$ . *a*) Пространственное распределение разности населенностей в первой пленке. *б*) Пространственный спектр данной структуры. *в*) Срез пространственного распределения на рис. *a* для  $y = 32$ . Распределение в первой пленке полностью совпадает с распределением во второй. *г*) Переходной процесс, приводящий систему к указанной пространственной структуре. Сплошной линией показана динамика в точке  $(0,0)$  первой пленки, штриховой — в той же точке второй пленки

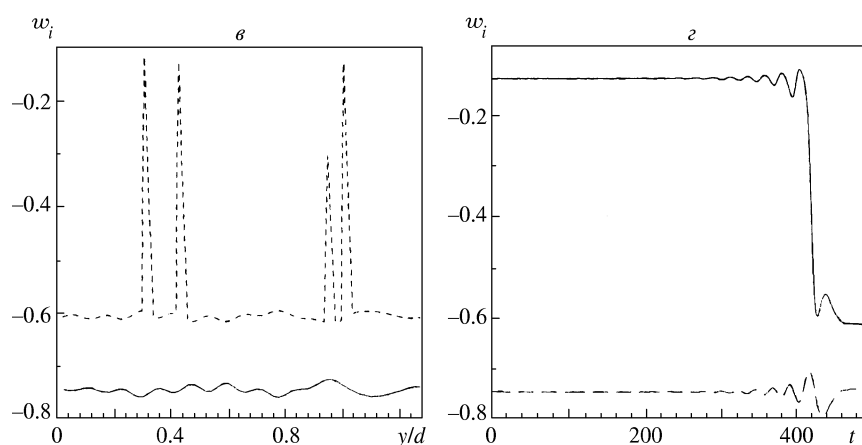
ные условия системы находятся как точка пересечения верхней части несимметричной ветви с этой линией для первой пленки и нижней части несимметричной ветви для второй пленки), через каждый промежуток времени  $\tau$  происходит переключение между стационарными состояниями системы, и периоду  $4\tau$  соответствуют четыре переключения.

## 6. УЧЕТ ПОПЕРЕЧНОЙ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Рассмотрим теперь, каким образом на динамику системы влияет учет поперечных степеней свободы,

что соответствует увеличению апертуры падающего светового луча. В этом случае наиболее неустойчивыми могут быть гармоники с ненулевым  $k_{\perp}$ .

Рассмотрим сначала ситуацию, которая возникает для параметров, соответствующих симметричной ветви решения на рис. 2*б*. Численный эксперимент, результат которого представлен на рис. 7, показывает, что при этом могут возникать пространственные структуры (рис. 7*a*, *б*). В процессе их образования неустойчивые гармоники, принадлежащие областям, ответственным за симметричные возмущения, и областям, ответственным за несимметричные возмущения, могут взаимодействовать друг с другом, в результате чего возникают ромбические структуры.



**Рис. 9.** Пространственные структуры, возникающие для тех же начальных параметров, что и на рис. 8, но с подавлением колебаний на моде  $\theta = 0$  и вырезанными пространственными модами, неустойчивыми по отношению к статическим возмущениям (см. рис. 4б): *a, б* — пространственные распределения разностей населенностей соответственно в первой и второй пленках; *в* — срез рис. *a* (штриховая линия) и рис. *б* (сплошная линия) для  $y = 32$ ; *г* — временная динамика переходного процесса для одной из точек (1,1) в первой (штриховая линия) и второй (сплошная линия) пленках

На рис. 7в показано, каким образом происходит взаимодействие пространственных мод. Здесь  $\mathbf{k}_3$  принадлежит области неустойчивости, ответственной за симметричные возмущения, а  $k_1$  и  $k_2$  — области, ответственной за несимметричные возмущения. Как видно из рис. 7а и б, максимумы в первой пленке приходятся на минимумы во второй и наоборот.

Из рис. 4б следует, что на несимметричной ветви также возможно возникновение поперечных пространственных структур вследствие неустойчивости статических мод с ненулевыми  $\theta$ . В работе [5] было показано, что в отсутствие запаздывания возникают несимметричные гексагональные структуры, которые в противоположность структурам на симмет-

ричной ветви имеют различный контраст в первой и второй пленках. Возникает вопрос, что происходит при учете запаздывания, когда временные эффекты начинают влиять на пространственную динамику системы. Для выяснения этого вопроса был проведен численный эксперимент с параметрами и начальными условиями, соответствующими случаю рис. 6. Оказывается, что в отличие от случая луча малой апертуры, когда разгорающиеся пульсации остаются устойчивыми (рис. 6), в данном случае развитие пульсаций приводит систему в неоднородное по пространству, но стационарное состояние (рис. 8). Из рисунка видно, что в результате переходного процесса (рис. 8г) получаются сим-

метричные гексагональные структуры (рис. 8а, б), одинаковые в обеих пленках. Максимумы и минимумы этих структур (рис. 8в) соответствуют верхней и нижней несимметричным ветвям стационарной кривой (рис. 4а). При этом нарушение симметрии как бы распределяется по пространству. Качественно эта картина также совпадает с рис. 6б с тем отличием, что на рис. 6б изображена временная зависимость, а на рис. 8в — пространственная. Таким образом, видна взаимосвязь между эффектом нарушения симметрии, пульсациями и пространственными структурами в данной системе. Это дополняет уже отмеченный факт, что факторы, ответственные за пространственную и временную неустойчивости, входят в характеристический квазиполином системы одинаковым образом.

На рис. 4б видны хопфовские зоны неустойчивости, для которых  $\theta \neq 0$ . Возникает вопрос, каким образом эти зоны неустойчивости проявляют себя в динамике при подавлении других конкурирующих неустойчивостей. Для выяснения этого вопроса в численном эксперименте мы подавляли неустойчивость основной АХ-моды с  $\theta = 0$ , что соответствует внесению в систему дополнительного устройства — стабилизатора. При этом, как и ранее, в начальный момент времени система находилась в однородном несимметричном состоянии, таком же, как и в случае рис. 6. Ограничения, наложенные на систему, приводят к тому, что пульсации начинают развиваться лишь на пространственных гармониках с  $\Omega \neq 0$ . Однако возникающие пульсации пространственных структур разрушаются, и со временем система переходит к неоднородному по пространству стационарному состоянию. На рис. 9 показаны переходной процесс ( $z$ ) и установившееся состояние ( $a$ – $b$ ) системы. Как и в предыдущем случае, большая часть поперечного распределения системы близка к одному из стационарных состояний, однако здесь в одной из пленок появляются солитоноподобные резкие пики (рис. 9в), соответствующие переключению между верхним и нижним решениями в области нарушения симметрии на рис. 4а.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, приведенные результаты свидетельствуют, что система двух тонких бистабильных пленок, облучаемых монохроматическим световым полем, демонстрирует богатую динамику. В частности, в результате действия нелинейности, присущей каждой из пленок, в системе может возникать бистабильность. Наличие обратной связи, являющейся результатом взаимодействия пленок, приводит также к появлению эффекта нарушения симметрии.

При этом увеличение расстояния между пленками, и следовательно, времени запаздывания в цепи обратной связи ведет к возникновению пульсаций в системе в случае, когда апертура луча достаточно мала, так что поперечные эффекты не влияют на динамику системы. Период пульсаций связан с расстоянием между пленками, что позволяет использовать данную систему для получения периодической последовательности П-образных импульсов с заданным периодом. Увеличение апертуры луча, которое можно описать с помощью учета пространственных мод с ненулевыми  $k_{\perp}$ , существенно меняет поведение системы. В частности, при малом запаздывании в системе возможно формирование несимметричных ромбических структур на симметричной ветви за счет взаимодействия пространственных мод из областей неустойчивости, ответственных за развитие несимметричных возмущений, и областей, ответственных за развитие симметричных возмущений. Увеличение времени запаздывания ведет к установлению других стационарных состояний, например, симметричных гексагональных структур на несимметричной ветви. При этом временные хопфовские колебания, которые возникают на несимметричной ветви стационарного решения системы при малой апертуре падающего луча, разрушаются. Данное пространственное распределение поля, как правило, не регулярно, а имеет дефекты. Например, обнаружено появление солитоноподобных пространственных структур.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Розанов, *Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах*, Наука, Москва (1997).
2. *Self-Organisation in Optical Systems and Applications in Information Technology*, ed. by M. A. Vorontsov and W. B. Miller, Springer-Verlag, Berlin (1995).
3. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 854 (1993).
4. И. В. Бабушкин, Ю. А. Логвин, Н. А. Лойко, КЭ **25**, 110 (1998).
5. Yu. A. Logvin, *Phys. Rev. A* **57**, 1219 (1998).
6. Ю. А. Логвин, А. М. Самсон, ЖЭТФ **102**, 472 (1992).
7. L. A. Lugiato, *Progr. Opt.* **21**, (1984).
8. Х. Гиббс, *Оптическая бистабильность; управление светом с помощью света*, Мир, Москва (1988).
9. С. М. Захаров, ЖЭТФ **108**, 829 (1995).

10. С. М. Захаров, Э. А. Маныкин, Поверхность № 2, 137 (1988).
11. M. Benedict, V. A. Malyshev, E. D. Trifonov et al., Phys. Rev. A **43**, 3845 (1991).
12. L. N. Oraevsky, D. J. Jones, and D. K. Bandy, Opt. Comm. **111**, 163 (1994).
13. А. М. Башаров, ЖЭТФ **94**, 12 (1988).
14. Н. А. Лойко, Ю. А. Логвин, А. М. Самсон, КЭ **22**, 389 (1995).
15. N. A. Loiko, Yu. A. Logvin, and A. M. Samson, Opt. Comm. **124**, 383 (1996).
16. Yu. A. Logvin and N. A. Loiko, Phys. Rev. E **56**, 3803 (1997).
17. Yu. A. Logvin, B. A. Samson, A. A. Afanas'ev, A. M. Samson, and N. A. Loiko, Phys. Rev. E **54**, R4548 (1996).
18. N. A. Loiko and Yu. A. Logvin, Laser Phys. **8**, 322 (1998).
19. A. A. Afanas'ev, Yu. A. Logvin, A. M. Samson, and B. A. Samson, Opt. Comm. **115**, 559 (1995).
20. А. М. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения*, Наукова Думка, Киев (1986), с. 203.
21. Л. Э. Эксгольц, С. Б. Норкин, *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, Москва (1971), с. 19.
22. А. Д. Мышкис, Усп. мат. наук **4**, 33 (1949).