

СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА И ХАОС ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН

*Т. В. Дмитриева, Н. М. Рыскин**

*Высший колледж прикладных наук,
Саратовский государственный университет
410026, Саратов, Россия*

Поступила в редакцию 5 мая 1999 г.

Исследуется динамика распределенной автоколебательной системы трех параметрически связанных волн, одна из которых является встречной. Показано, что имеется бесконечное число собственных мод, которые самовозбуждаются по мере увеличения бифуркационного параметра, имеющего смысл амплитуды накачки. Найдены точные решения, описывающие стационарные режимы колебаний. Представлены результаты численного моделирования, которые показывают, что при умеренных значениях амплитуды накачки переходный процесс завершается установлением стационарного состояния, соответствующего основной моде. По мере увеличения надкритичности колебания становятся хаотическими, причем переход к хаосу происходит жестко. Отмечается аналогия между динамикой рассматриваемой системы и динамикой системы Лоренца.

PACS: 05.45.Jn

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение сложной динамики распределенных автоколебательных систем является актуальной задачей современной теории колебаний и волн. Очевидна связь этих исследований с такими фундаментальными проблемами, как возникновение турбулентности и образование диссипативных структур [1, 2]. Однако непосредственное численное моделирование сложных, в особенности хаотических, режимов колебаний в конкретных распределенных автоколебательных системах, таких, например, как приборы вакуумной и квантовой электроники или гидродинамические течения, все еще представляет значительные трудности. Поэтому особую роль приобретает поиск достаточно простых распределенных модельных систем со сложной динамикой, которые могут быть детально исследованы численными, а по возможности и аналитическими методами.

Среди подобных моделей следует выделить уравнения параметрического взаимодействия трех волновых пакетов в квадратично-нелинейной среде, которые описывают параметрическую (распадную) неустойчивость в задачах гидродинамики, нелинейной оптики, физики плазмы и т. д. и относятся к числу наиболее важных, эталонных уравнений в теории нелинейных волн [2, 3]. При наличии какого-либо типа обратной связи эта система становится автоколебательной и может демонстрировать сложную динамику. Так, в работе [4] было обнаружено существование режимов динамического хаоса в случае, когда одна из волн испытывает отражения на границах.

*E-mail: ryskin.np.sgu@oda.ssu.runnet.ru

В настоящей работе исследуется трехволновое взаимодействие, в котором участвуют волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, что обеспечивает внутреннюю распределенную обратную связь. Такая ситуация представляется достаточно распространенной и может быть реализована, в частности, при взаимодействии низко- и высокочастотных волн [2], например, при взаимодействии оптических волн с акустическими или ионно-звуковых волн с ленгмюровскими. В электронике системы трех параметрически связанных волн, одна из которых является встречной, можно рассматривать как простейшую модель лазера на свободных электронах — генератора встречной волны, в котором электронный пучок взаимодействует с полями двух электромагнитных волн. На возможность сложной динамики в этом случае было указано в работе [5].

В разд. 2 приведены основные уравнения и найдены условия самовозбуждения автоколебаний. Поскольку исследуемая система является распределенной, имеется бесконечное число собственных мод, самовозбуждающихся по мере увеличения бифуркационного параметра, которым служит в данном случае амплитуда накачки. Точные стационарные нелинейные решения, соответствующие основной и высшим модам, анализируются в разд. 3. В разд. 4 описаны результаты численного моделирования. Подробно исследуется сценарий перехода к хаосу. Обсуждаются аналогии между последовательностями бифуркаций в рассматриваемой системе и в некоторых конечномерных системах, в частности, в системе Лоренца, которая является одной из наиболее известных и хорошо изученных моделей нелинейной динамики с малым числом степеней свободы.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УСЛОВИЯ САМОВОЗБУЖДЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ

В качестве исходных используем уравнения трехволнового параметрического взаимодействия [2, 3], которые в данном случае примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} &= \sigma_1 A_2 A_3^*, \\ \frac{\partial A_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial A_2}{\partial x} &= -\sigma_2 A_1 A_3, \\ \frac{\partial A_3}{\partial t} - v_3 \frac{\partial A_3}{\partial x} &= \sigma_3 A_2 A_1^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $A_{1,2,3}(x, t)$ — комплексные амплитуды холостой волны, накачки и сигнала соответственно, $v_{1,2,3}$ — их групповые скорости, $\sigma_{1,2,3}$ — вещественные коэффициенты нелинейного взаимодействия. Знак « \leftarrow » перед v_3 отражает тот факт, что сигнальная волна является встречной. Рассмотрим ситуацию, когда на вход системы в точке $x = 0$ подается интенсивная волна накачки с амплитудой $\alpha = \text{const}$, а холостая волна отсутствует. Будем также считать, что на правой границе системы, в сечении $x = l$, отсутствует сигнальная волна. Таким образом, имеем граничные условия

$$A_1(x = 0; t) = 0, \quad A_2(x = 0; t) = \alpha, \quad A_3(x = l; t) = 0, \quad (2)$$

которые соответствуют распределенному параметрическому генератору встречной волны. Поскольку уравнения (1) инвариантны относительно преобразования

$$A_1 \rightarrow A_1 \exp(i\varphi_1), \quad A_2 \rightarrow A_2 \exp(i\varphi_2), \quad A_3 \rightarrow A_3 \exp[i(\varphi_2 - \varphi_1)], \quad (3)$$

где $\varphi_{1,2} = \text{const}$, величину α можно без ограничения общности считать вещественной. Начальные условия выберем в виде

$$A_2(x; t = 0) = \alpha, \quad |A_{1,3}(x; t = 0)| \ll \alpha \quad (4)$$

и будем интересоваться условием самовозбуждения системы от малых флуктуаций холостой и сигнальной волн.

Введем в рассмотрение безразмерные координату $\xi = x/l$ и время

$$\tau = \frac{2v_1v_3t - (v_3 - v_1)x}{l(v_3 + v_1)},$$

а также новые зависимые переменные

$$A'_i = \frac{A_i l}{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_j \sigma_k}{v_j v_k}},$$

где $i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k$. Подставляя эти соотношения в уравнения (1) и опуская штрихи, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi} &= \alpha A_2 A_3^*, \\ (1 + u) \frac{\partial A_2}{\partial \tau} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi} &= -\alpha A_1 A_3, \\ \frac{\partial A_3}{\partial \tau} - \frac{\partial A_3}{\partial \xi} &= \alpha A_2 A_1^*, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$u = \frac{2v_3(v_1 - v_2)}{v_2(v_1 + v_3)}$$

— безразмерный параметр, характеризующий расстройку групповых скоростей попутных волн. Граничные условия (2) и начальные условия (4) примут вид

$$A_1(\xi = 0; \tau) = 0, \quad A_2(\xi = 0; \tau) = 1, \quad A_3(\xi = 1; \tau) = 0, \quad (6)$$

$$A_2(\xi; \tau = 0) = 1, \quad |A_{1,3}(\xi; \tau = 0)| \ll 1. \quad (7)$$

Получим условия самовозбуждения автоколебаний, для чего рассмотрим начальную стадию развития неустойчивости, когда амплитуды сигнальной и холостой волн малы и истощение накачки еще не сказывается. Полагая в уравнениях (5) $A_2 = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi} &= \alpha A_3^*, \\ \frac{\partial A_3}{\partial \tau} - \frac{\partial A_3}{\partial \xi} &= \alpha A_1^*. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (8) с граничными условиями

$$A_1(\xi = 0; \tau) = A_3(\xi = 1; \tau) = 0$$

совпадают с уравнениями, описывающими нестационарное линейное взаимодействие встречных волн с положительной и отрицательной энергиями. Теория такого взаимодействия достаточно подробно описана в литературе (см., например, обзор [6]). Разделяя переменные в (8), находим общее решение в виде суперпозиции собственных мод:

$$A_1 = \sum_n C_n \exp(k_n t) \sin \left[\sqrt{\alpha^2 - k_n^2} \xi \right],$$

$$A_3 = \sum_n D_n \exp(k_n t) \sin \left[\sqrt{\alpha^2 - k_n^2} (\xi - 1) \right],$$

амплитуды C_n, D_n определяются из начальных условий, а k_n — корни трансцендентного уравнения

$$\sqrt{\alpha^2 - k^2} \cos \sqrt{\alpha^2 - k^2} + k \sin \sqrt{\alpha^2 - k^2} = 0. \quad (9)$$

Данное уравнение имеет бесконечное число комплексных корней, что отражает наличие в исследуемой распределенной системе бесконечного числа собственных мод, т. е. степеней свободы.

Условие потери устойчивости моды с номером n можно найти, полагая в уравнении (9) $k = 0$, что дает $\alpha_n = \pi n + \pi/2$. Таким образом, когда параметр α превышает значение α_n , возможно самовозбуждение n -ой моды. Наименьшее значение $\alpha_0 = \pi/2$, т. е. наименьшую амплитуду накачки, имеет мода с $n = 0$.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ КОЛЕБАНИЙ

Найдем решения, описывающие стационарные автоколебательные режимы, для чего положим в уравнениях (5) $\partial/\partial\tau \equiv 0$. Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dA_1}{d\xi} = \alpha A_2 A_3^*, \quad \frac{dA_2}{d\xi} = -\alpha A_1 A_3, \quad \frac{dA_3}{d\xi} = -\alpha A_2 A_1^*, \quad (10)$$

с граничными условиями

$$A_1(0) = 0, \quad A_2(0) = 1, \quad A_3(1) = 0. \quad (11)$$

Отметим, что параметр u в эти уравнения не входит, т. е. стационарные решения не зависят от расстройки групповых скоростей (в выбранной нами нормировке переменных).

Полагая $A_j = a_j \exp(i\varphi_j)$, где a_j и φ_j — вещественные амплитуды и фазы, и разделяя в (10) вещественные и мнимые части, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{da_1}{d\xi} = \alpha a_2 a_3 \cos \Phi, \quad (12)$$

$$\frac{da_2}{d\xi} = -\alpha a_1 a_3 \cos \Phi, \quad (13)$$

$$\frac{da_3}{d\xi} = -\alpha a_2 a_1 \cos \Phi, \quad (14)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \alpha \left(\frac{a_1 a_2}{a_3} + \frac{a_1 a_3}{a_2} - \frac{a_2 a_3}{a_1} \right) \sin \Phi, \quad (15)$$

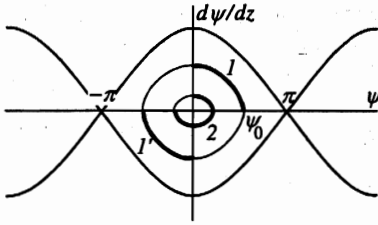


Рис. 1. Фазовый портрет нелинейного осциллятора (16). Траектории 1 и 1' соответствуют стационарным решениям для основной моды, траектория 2 — для второй моды

где $\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3$. Точные решения системы уравнений (12)–(15) хорошо известны (см., например, [2]). Единственное специфическое свойство рассматриваемой задачи состоит в том, что граничные условия (11) ставятся на разных концах системы. Перепишем уравнение (15) в виде

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = -\frac{d \ln(a_1 a_2 a_3)}{d\xi} \operatorname{tg} \Phi,$$

что после интегрирования с учетом граничных условий дает

$$a_1 a_2 a_3 \sin \Phi = 0.$$

Поскольку это равенство выполняется при любом значении ξ , нетривиальным решениям соответствует $\sin \Phi = 0$. Таким образом, в стационарном режиме фазы взаимодействующих волн оказываются синхронизованными.

Из уравнений (12) и (13) можно получить еще один интеграл движения:

$$a_1^2(\xi) + a_2^2(\xi) = a_1^2(0) + a_2^2(0) = 1.$$

Полагая $a_1 = \sin(\psi/2)$, $a_2 = \cos(\psi/2)$ и подставляя в (14), приходим к уравнению маятника

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \sin \psi = 0, \quad (16)$$

где $z = \alpha\xi$, с граничными условиями

$$\psi(z=0) = d\psi(z=\alpha)/dz = 0.$$

Фазовый портрет уравнения (16) показан на рис. 1. Интересующие нас решения представляют куски фазовых траекторий, начинающиеся на вертикальной оси и заканчивающиеся на горизонтальной. Таким образом, необходимо найти решение в виде периодических колебаний с периодом $T = 4\alpha$ (траектория 1 на рис. 1). С учетом выражения для периода колебаний маятника (см., например, [7]) находим, что

$$\alpha = K(\sin^2(\psi_0/2)),$$

где K — полный эллиптический интеграл 1-го рода, $\psi_0 = \psi(\alpha)$. Поскольку $K > \pi/2$, решение существует при $\alpha > \pi/2$, что согласуется с условиями самовозбуждения, найденными в разд. 2.

При $\alpha > 3\pi/2$ появляется еще одно решение, когда маятник совершает три четверти оборота (траектория 2 на рис. 1). Оно соответствует второй собственной моде. По

мере увеличения α появляются все новые и новые стационарные решения, отвечающие высшим модам, условия самовозбуждения которых были найдены в разд. 2. Можно записать эти решения в явном виде:

$$\begin{aligned}\psi &= 2 \arcsin(m \operatorname{sn}(z; m)), \\ a_1 &= m \operatorname{sn}(z; m), \\ a_2 &= \operatorname{dn}(z; m), \\ a_3 &= m \operatorname{cn}(z; m),\end{aligned}\tag{17}$$

где $\operatorname{sn}(\dots)$, $\operatorname{cn}(\dots)$, $\operatorname{dn}(\dots)$ — эллиптические функции Якоби, $m = \sin^2(\psi_n/2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, причем ψ_n определяются из уравнения

$$\alpha = (2n + 1) K(\sin^2(\psi_n/2)).$$

Очевидно, что в силу инвариантности уравнения (16) относительно замены $\psi \rightarrow -\psi$, для каждого из решений (17) существует еще одно, имеющее противоположную полярность. На рис. 1 им соответствуют фазовые траектории, начинающиеся в нижней полуплоскости (например, траектория l').

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Анализ, проведенный в разд. 3, позволяет найти точные решения, описывающие возможные стационарные режимы колебаний. Однако остается неясным, какие из этих режимов устанавливаются в результате переходного процесса (и устанавливаются ли вообще). Для ответа на эти вопросы необходимо прибегнуть к непосредственному численному интегрированию нестационарных уравнений.

Для решения уравнений (5) с граничными и начальными условиями (6) и (7) использовалась схема Лакса—Вендроффа второго порядка точности [8], причем шаги дискретизации по времени и координате были связаны соотношением $\Delta t = \Delta \xi/2$. Расчеты показывают, что выбор $N \sim 100$, где $N = 1/\Delta \xi$ — число шагов разностной схемы по координате, обеспечивает хорошую точность результатов (исключением является область параметров, в которой $u \ll 1$, о чем подробнее говорится ниже). Отметим, что при любой конечно-разностной аппроксимации фактически совершается переход от распределенной системы к цепочке из N элементов, которая имеет уже конечное, хотя и достаточно большое, число степеней свободы.

Вначале для простоты ограничимся случаем, когда амплитуды взаимодействующих волн считаются чисто вещественными. При этом $\sin \Phi = 0$, т. е. фазовая траектория находится на многообразии, на котором реализуются стационарные решения (см. разд. 3). Можно показать, что если это условие выполняется в начальный момент времени, то оно будет оставаться справедливым и в любой последующий момент, т. е. многообразие $\sin \Phi = 0$ является инвариантным.

Исследуемая система имеет два управляющих параметра: параметр α , который характеризует степень неравновесности системы, и параметр u , имеющий смысл расстройки групповых скоростей. Поэтому сначала обратимся к анализу однопараметрической динамики. Дадим описание последовательности бифуркаций, которая наблюдается по мере увеличения α при постоянном значении $u = 0.1$.

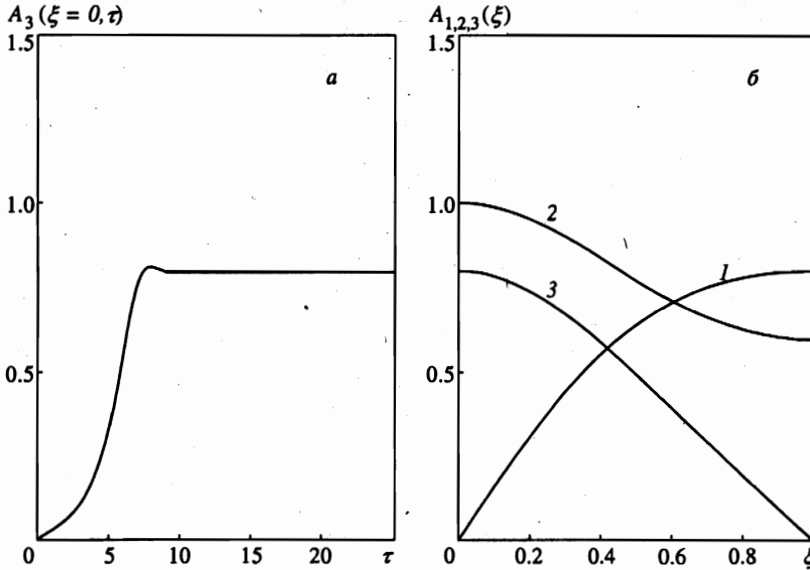


Рис. 2. Зависимость амплитуды выходного сигнала $A_3(\xi = 0)$ от времени в процессе установления колебаний (а) и стационарные распределения амплитуд волн (б) при $u = 0.1$, $\alpha = 2.0$

При $\alpha < \pi/2$ единственным устойчивым состоянием системы является тривиальное решение $A_{1,3} = 0$, $A_2 = 1$. В фазовом пространстве ему соответствует состояние равновесия типа устойчивый узел, которое мы обозначим O . Самовозбуждение колебаний происходит при $\alpha = \pi/2$, что согласуется с результатами разд. 2. При этом состояние равновесия O становится седловым, и рождаются два нетривиальных состояния равновесия C^\pm , которые соответствуют стационарным решениям для основной моды, найденным в разд. 3. Эти состояния равновесия симметричны относительно замены

$$A_1 \rightarrow -A_1, \quad A_3 \rightarrow -A_3.$$

На рис. 2 приведены зависимость амплитуды выходного сигнала $A_3(\xi = 0)$ от времени в процессе установления колебаний (а) и пространственные распределения амплитуд в установившемся режиме (б), когда α незначительно превышает $\pi/2$. Очевидно, что C^\pm являются состояниями равновесия типа устойчивый узел. У седлового состояния равновесия O имеется устойчивое многообразие W_s и пара симметричных неустойчивых многообразий W_u^\pm , причем W_u^+ притягивается к C^+ , а W_u^- — к C^- . Таким образом, то, какое именно из двух устойчивых состояний реализуется по окончании переходного процесса, определяется видом начальных возмущений.

С ростом управляющего параметра α переходный процесс приобретает осциллирующий характер, а его длительность увеличивается (рис. 3). Осцилляции обусловлены запаздывающим характером внутренней распределенной обратной связи, их период близок к времени запаздывания $l/v_1 + l/v_3$, которое в принятой нормировке переменных равно 2. Состояния равновесия C^\pm при этом превращаются из узлов в фокусы. При достаточно больших α стационарные распределения амплитуд близки к решениям,

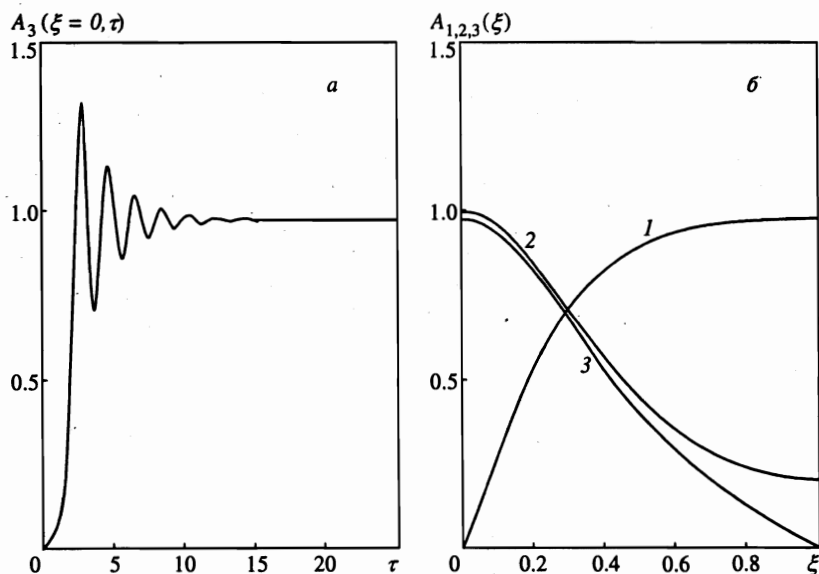


Рис. 3. Зависимость амплитуды выходного сигнала $A_3(\xi = 0)$ от времени в процессе установления колебаний (а) и стационарные распределения амплитуд волн (б) при $u = 0.1$, $\alpha = 4.0$

которые соответствуют движению маятника по сепаратрисе (см. разд. 3):

$$A_1 = \text{th}(\alpha\xi), \quad A_{2,3} = \text{sech}(\alpha\xi).$$

При $\alpha \approx 5.6$ многообразия W_u^\pm замыкаются на W_s . В результате этой бифуркации W_u^+ начинает притягиваться к C^- , а W_u^- — к C^+ . Соответствующие этому случаю зависимости приведены на рис. 4. По мере увеличения бифуркационного параметра переходный процесс усложняется. Это обусловлено распределенным характером исследуемой системы, т. е. появлением все большего числа нарастающих собственных мод. Однако стационарные состояния, отвечающие высшим модам, оказываются неустойчивыми, и в результате конкуренции выживает лишь основная мода.

Наконец при $\alpha \approx 8.19$ движение становится хаотическим. На рис. 5 представлены временная реализация процесса и проекция странного аттрактора, восстановленная по методу Паккарда—Такенса. Следует отметить, что как сам аттрактор, так и последовательность бифуркаций, предшествующая его появлению, демонстрируют аналогию с некоторыми известными конечномерными системами, в частности, с системой Лоренца [1, 2]:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ, \\ \dot{Z} &= -bZ + XY, \end{aligned} \quad (18)$$

где r , σ и b — параметры, а также с уравнениями, описывающими распадное ограничение параметрической неустойчивости [9]:

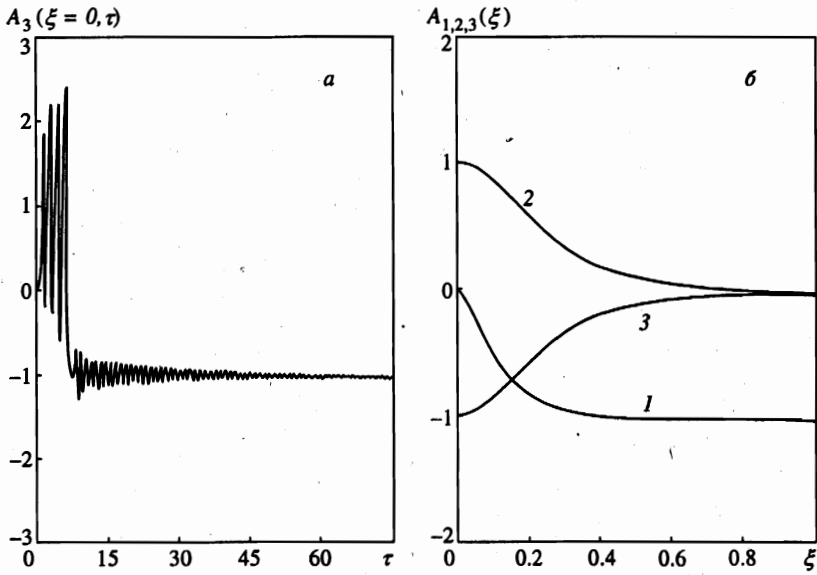


Рис. 4. Зависимость амплитуды выходного сигнала $A_3(\xi = 0)$ от времени в процессе установления колебаний (а) и стационарные распределения амплитуд волн (б) при $u = 0.1, \alpha = 6.0$, после того как произошла бифуркация образования сепаратрисной петли

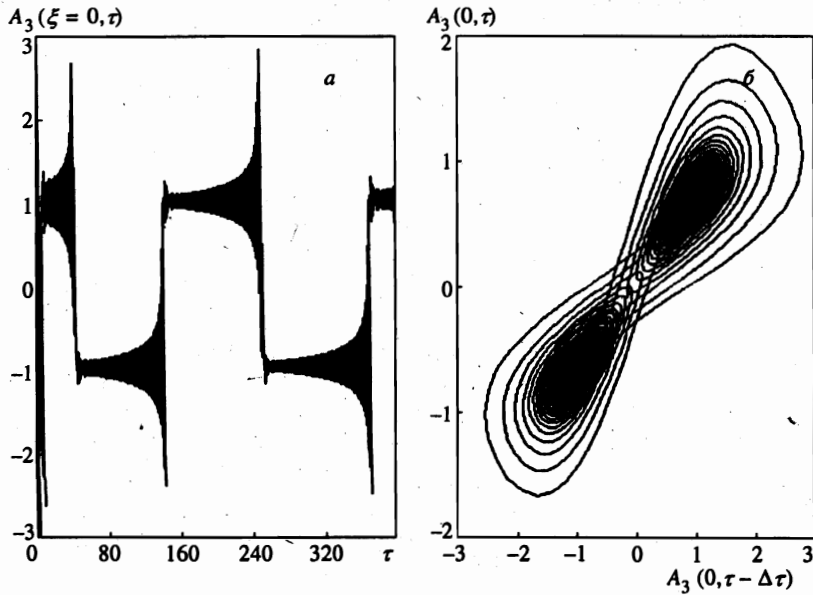


Рис. 5. Реализация и проекция фазового портрета, соответствующие странному аттрактору при $u = 0.1, \alpha = 10.0$

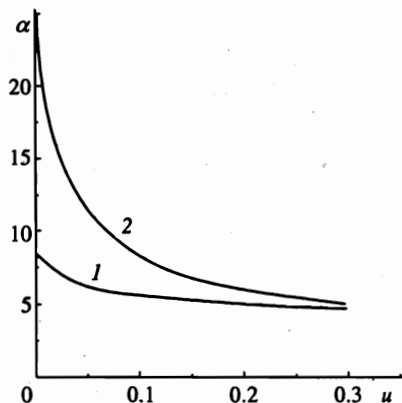


Рис. 6. Линия образования сепаратрисной петли (1) и граница перехода к хаосу (2) на плоскости αu

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= hA_2^* - \nu_1 A_1 - A_2 A_3, \\ \dot{A}_2 &= hA_1^* - \nu_2 A_2 + A_1 A_3^*, \\ \dot{A}_3 &= -A_3 + A_1 A_2^*, \end{aligned} \quad (19)$$

которые отличаются от (18) лишь дополнительной нелинейностью во втором уравнении, а также тем, что амплитуды волн в общем случае являются комплексными. В уравнениях (19) волны $A_{1,2}$ возбуждаются за счет параметрического процесса, причем параметр h пропорционален амплитуде накачки, которая считается заданной. Коэффициенты $\nu_{1,2}$ определяют линейное затухание волн. В то же время волны участвуют в еще одном резонансном взаимодействии, в ходе которого квант волны A_1 распадается на кванты волн $A_{2,3}$. Этот распадный процесс приводит к насыщению параметрической неустойчивости. Применение системы (19) к ряду задач физики плазмы обсуждается в [9].

Как и в упомянутых конечномерных системах, появление странного аттрактора происходит раньше, чем потеря устойчивости состояниями равновесия C^\pm . Таким образом, в узком диапазоне изменения параметра α сосуществуют устойчивые стационарные состояния и хаотическое движение, а переход к хаосу при плавном увеличении параметра сопровождается гистерезисом. Это легко проверить, задавая начальные условия в виде близком к стационарному решению. Например, при $u = 0.1$ странный аттрактор рождается при $\alpha \approx 8.19$, а C^\pm теряют устойчивость при $\alpha \approx 8.27$. В системе Лоренца в наиболее хорошо изученном случае $\sigma = 10$, $b = 8/3$ образование странного аттрактора происходит при $r \approx 24.06$, а потеря устойчивости стационарным состоянием — при $r \approx 24.74$ (замыкание сепаратрисных петель происходит при $r \approx 13.92$).

При других положительных значениях u динамика системы носит аналогичный характер, хотя бифуркационные значения параметров изменяются. На рис. 6 приведены граница перехода к хаосу и линия образования сепаратрисной петли на плоскости параметров α и u . Однако при $u \rightarrow 0$ значение α , при котором происходит переход к хаосу, стремится к бесконечности. Аналогичная ситуация имеет место в системе Лоренца в пределе $\sigma \rightarrow b + 1$. Таким образом, хаотические колебания возможны лишь в том случае, когда групповая скорость волны накачки меньше, чем у холостой волны. Отметим, что в области $u \ll 1$ приходится прибегать к существенному увеличению числа шагов разностной схемы для получения удовлетворительной точности расчетов.

Исследование динамики системы в общем случае, когда величины A_i считаются

комплексными, показало, что при не слишком больших значениях α фазовая траектория в ходе переходного процесса притягивается к многообразию $\sin \Phi = 0$, т.е. фазы взаимодействующих волн синхронизируются. Однако в хаотических режимах, когда амплитуды волн испытывают сильные осцилляции, возникают состояния с быстро меняющимися фазами и синхронизация фаз нарушается. При этом фазовая траектория соскакивает с многообразия $\sin \Phi = 0$, а затем возвращается на него. Отметим, что аналогичное поведение характерно и для системы (19), на что указано в работе [10].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты убедительно свидетельствуют о том, что в системе трех параметрически взаимодействующих волн, одна из которых является встречной, возможно возбуждение хаотических автоколебаний, имеющих детерминированную природу. Особый интерес вызывает тот факт, что, хотя исследуемая система является распределенной и характеризуется бесконечно большим числом степеней свободы, ее динамика оказывается близкой к динамике некоторых конечномерных систем, в частности — системы Лоренца, которая входит в число эталонных моделей нелинейной динамики. Это обусловлено тем, что основную роль в организации сложной динамики играют три неустойчивых стационарных состояния: нулевое O и ненулевые C^\pm , которые соответствуют нижней собственной моде и симметричны друг другу. Высшие собственные моды оказывают влияние лишь на начальную стадию переходного процесса, а отвечающие им стационарные состояния не реализуются.

Отметим, что жесткое возникновение хаоса, наблюдаемое в данном случае, не типично для распределенных автоколебательных систем со встречными волнами [6], где доминирует другой сценарий, характеризующийся мягкой потерей устойчивости стационарным режимом через возникновение автомодуляции, вызванной запаздыванием внутренней обратной связи.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России — фундаментальные исследования».

Литература

1. Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда, *Стохастические и хаотические колебания*, Наука, Москва (1987).
2. М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, Наука, Москва (1984).
3. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1979).
4. Г. Н. Бурлак, К. Ишкабулов, *ЖЭТФ* 109, 774 (1996).
5. Н. С. Гинзбург, А. С. Сергеев, *Радиотехника и электроника* 33, 580 (1988).
6. Д. И. Трубецков, А. П. Четвериков, *Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика* 2(5), 9 (1994).
7. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса*, Наука, Москва (1988).
8. Д. Андерсон, Дж. Танненхилл, Р. Плетчер, *Вычислительная гидромеханика и теплообмен, т. 1*, Мир, Москва (1990).
9. А. С. Пиковский, М. И. Рабинович, В. Ю. Трахтенгерц, *ЖЭТФ* 74, 1366 (1978).
10. А. С. Пиковский, *Дисс. на соискание степени канд. физ.-мат. наук, ИПФ АН СССР, Горький (1982)*.