

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В ВОДОРОДОПОДОБНОМ РЕЛЯТИВИСТСКОМ АТОМЕ: ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ

С. Г. Каршенбойм*

Государственный научный центр

«Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева»
198005, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 26 мая 1999 г.

Рассматривается сдвиг уровней энергии водородоподобного атома, индуцированный эффектами поляризации вакуума. Вклад свободной поляризации найден для основного и некоторых возбужденных состояний в замкнутом аналитическом виде. Впервые выражение для радиационной поправки к энергии удалось получить в виде явной функции параметра $Z\alpha$. Результаты получены для состояний n_l с наибольшими значениями моментов ($l = n - 1$ и $j = l + 1/2$). Окончательное выражение, найденное в терминах обобщенных гипергеометрических функций, представляет собой функцию трех переменных — $Z\alpha$, n и отношения масс частиц на орбите и в вакуумной петле, — т. е. результат пригоден как для обычных, так и для мюонных атомов. Найден также ряд полезных асимптотик.

PACS: 12.20.Ds; 31.30.Jv; 32.10.Fn

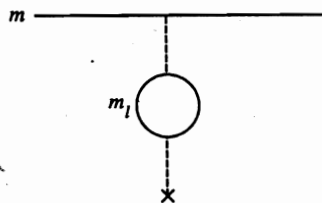
1. ВВЕДЕНИЕ

Диаграмма (рисунок), учитывающая эффекты поляризации вакуума, является простейшей, однако даже для ее вклада в энергию нет замкнутых аналитических выражений. Для различных уровней энергии в (электронном) водородоподобном атоме с точечным ядром известен ряд коэффициентов разложения по силе кулоновского взаимодействия $Z\alpha$ [1–4]. Для мюонных атомов был найден аналитический результат лишь в ведущем нерелятивистском (шредингеровском) приближении [5]. Имеется также ряд численных результатов (см., например, [6]).

Целью данной работы является получение замкнутых аналитических выражений для поправок к уровням энергии в электронных и мюонных атомах. Мы рассматриваем случай водородоподобного атома с бесконечно тяжелым точечным ядром и связанной частицей массы m . В реальных приложениях частица может быть электроном или мюоном. Исследуется вклад свободной поляризации вакуума (потенциала Юлинга); частица в петле в актуальных случаях является электроном ($m_l = m_e$).

Следует заметить, что актуальность задачи определяется несколькими обстоятельствами. Во-первых, разложение по $Z\alpha$ оказывается в ряде случаев недостаточно эффективным, поскольку возникают высокие степени логарифмов ($\ln^2(1/Z\alpha) \approx 24$, $\ln^3(1/Z\alpha) \approx 120$) [7], и поэтому необходимо проводить точные по $Z\alpha$ расчеты или по крайней мере лучше понимать структуру ряда по $Z\alpha$. Расчет в данной работе представляет возможность изучать структуру разложения по этому параметру. Во-вторых,

*E-mail: ksg@hm.csa.ru



Потенциал Юлинга для атома с частицей массы m . Частица в петле имеет массу m_l

получен ряд полезных асимптотик как для электронных, так и для мюонных атомов. Так, например, в случае не слишком легких мюонных атомов получаем ($l = n - 1$ и $j = l + 1/2$)

$$E_U(nl_j) = -\frac{\alpha}{\pi} \frac{(Z\alpha)^2 m/n^2}{\sqrt{1-(Z\alpha)^2/n^2}} \left\{ \left[\frac{2}{3} \ln(2\kappa_n) + \frac{2}{3} (\psi(1) - \psi(2-2\epsilon_n)) - \frac{5}{9} \right] + \frac{\pi}{2} \frac{1-\epsilon_n}{\kappa_n} + \frac{2-3n(1-\epsilon_n)-10n^2(1-\epsilon_n^2)}{6} \frac{1}{\kappa_n^2} + O\left(\frac{1}{\kappa_n^3}\right) \right\}, \quad (1)$$

где релятивистские эффекты описываются параметром

$$\epsilon_n = 1 - \sqrt{1 - \frac{(Z\alpha)^2}{n^2}} \quad (2)$$

и мы вводим отношение характерного атомного импульса (γ) к массе частицы в петле (m_l):

$$\kappa_n = \frac{\gamma}{m_l n} = \frac{Z\alpha m}{m_l n}. \quad (3)$$

В частности, для мюонных атомов имеем $\kappa_n \simeq 1.5Z/n$. Мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

В-третьих, найденная здесь поправка является бесспорно простейшей квантово-электродинамической поправкой, однако развитые здесь методы применимы и для некоторых более сложных диаграмм [8].

В настоящей работе вначале мы обсуждаем общее выражение для основного состояния, затем его асимптотики и далее находим релятивистскую поправку Юлинга для уровней nl_j с наибольшими значениями моментов ($l = n - 1$ и $j = l + 1/2$). В заключение мы обсуждаем полученные результаты и возможные приложения развитых методов.

2. ВЫВОД ОБЩЕГО ВЫРАЖЕНИЯ

Начнем вычисление с вывода удобного представления для потенциала Юлинга. Учет вставки поляризации в импульсном представлении отвечает известной замене

$$\frac{1}{q^2} \rightarrow \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2} \frac{1}{q^2 + \lambda^2}, \quad (4)$$

где

$$\lambda(v) = \frac{2m_l}{\sqrt{1-v^2}}; \quad (5)$$

напоминаем, частица в петле имеет массу m_l . В координатном представлении замена имеет вид

$$\frac{1}{r} \rightarrow \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2} \frac{e^{-\lambda r}}{r}. \quad (6)$$

Поправка к энергии может быть представлена в виде произведения

$$E_U = \frac{\alpha}{\pi} E_C R_C(\kappa), \quad (7)$$

где E_C — средняя потенциальная энергия дираковского электрона и

$$R_C(\kappa) = \int_0^1 dv \frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2} \mathcal{R}_C(\lambda(v)). \quad (8)$$

Потенциальную энергию легко выразить в терминах полной энергии связанной дираковской частицы E_D (см., например, [9]):

$$E_C(nl_j) = \left\langle nl_j \left| -\frac{Z\alpha}{r} \right| nl_j \right\rangle = Z\alpha \frac{\partial}{\partial(Z\alpha)} E_D(nl_j), \quad (9)$$

а подынтегральное выражение в (8) переписать в виде отношения:

$$\mathcal{R}_C(\lambda) = \frac{\int_0^\infty dr r^2 [f^2(r) + g^2(r)] (e^{-\lambda r}/r)}{\int_0^\infty dr r^2 [f^2(r) + g^2(r)] (1/r)}. \quad (10)$$

Мы используем здесь принятые в [10] обозначения для радиальной части больших ($f(r)$) и малых ($g(r)$) компонент дираковской волновой функции. Приведенные выше выражения справедливы для любых состояний, и в случае уровня $1s$ можно получить

$$E_C(1s) = -\frac{(Z\alpha)^2 m}{\sqrt{1-(Z\alpha)^2}} \quad (11)$$

и

$$\mathcal{R}_C(\lambda) = \frac{\int_0^\infty dr r e^{-(2\gamma+\lambda)r} r^{-2\epsilon}}{\int_0^\infty dr r e^{-2\gamma r} r^{-2\epsilon}}. \quad (12)$$

Релятивистские эффекты для основного состояния определяются величиной

$$\epsilon = 1 - \sqrt{1 - (Z\alpha)^2},$$

которая обращается в нуль в шредингеровском приближении, а они также учтены в релятивистской потенциальной энергии (11). Для упрощения выражений опускаем индекс 1 для основного состояния и используем далее обозначения ϵ и κ .

Радиальное интегрирование оказывается тривиальным и приводит к простому результату:

$$\mathcal{R}_C(\lambda) = \left(\frac{2\gamma}{2\gamma + \lambda} \right)^{2(1-\epsilon)}. \quad (13)$$

Нетривиальным является то, что и возникающий однократный интеграл

$$R_C(\kappa) = \int_0^1 dv v^2 \left(1 - \frac{v^2}{3} \right) \left(\frac{\kappa}{1 + \kappa\sqrt{1-v^2}} \right)^2 \left(\frac{\kappa\sqrt{1-v^2}}{1 + \kappa\sqrt{1-v^2}} \right)^{-2\epsilon} \quad (14)$$

можно вычислить в замкнутом виде [11], а именно, в терминах обобщенной гипергеометрической функции ${}_3F_2$. Результаты интегрирования удобно выразить через базовые интегралы

$$E_U(1s) = -\frac{\alpha}{\pi} \frac{(Z\alpha)^2 m}{\sqrt{1 - (Z\alpha)^2}} \left\{ I_{122} - \frac{1}{3} I_{222} \right\}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} I_{abc} = & \frac{1}{2} \kappa^{c-2\epsilon} B \left(a + \frac{1}{2}, 1 - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \epsilon \right) \times \\ & \times {}_3F_2 \left(\frac{c}{2} - \epsilon, \frac{c}{2} + \frac{1}{2} - \epsilon, 1 - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \epsilon; \frac{1}{2}, a + \frac{3}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \epsilon; \kappa^2 \right) - \\ & - \frac{c-2\epsilon}{2} \kappa^{c+1-2\epsilon} B \left(a + \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \epsilon \right) \times \\ & \times {}_3F_2 \left(\frac{c}{2} + 1 - \epsilon, \frac{c}{2} + \frac{1}{2} - \epsilon, \frac{3}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \epsilon; \frac{3}{2}, a + 2 - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \epsilon; \kappa^2 \right), \quad (16) \end{aligned}$$

вычисление которых обсуждается в Приложении. Легко видеть, что найденное выражение конечно при условии

$$Z\alpha < 1. \quad (17)$$

Ниже мы обсудим некоторые асимптотики полученного выражения.

3. ПОПРАВКА ЮЛИНГА ПРИ $Z\alpha \ll 1$

Рассмотрим нерелятивистский предел, не делая никаких предположений о величине параметра κ . Важными специальными случаями являются: электронный атом ($\kappa = Z\alpha$) и не слишком легкий мюонный атом ($\kappa \simeq 1.5Z \gg 1$).

При малых значениях Z выражение для поправки к энергии может быть представлено в форме

$$R_C(\kappa) = r_C(\kappa) - 2\epsilon p_C(\kappa) + O(\epsilon^2), \tag{18}$$

где в нерелятивистском приближении

$$2\epsilon \simeq (Z\alpha)^2. \tag{19}$$

Вначале вычислим r_C и p_C , а затем обсудим поправки к приведенным выражениям.

В шредингеровском приближении результат включает в себя только первый член разложения (18), который хорошо известен [5]:

$$r_C(\kappa) = \frac{1}{3} \left[-\frac{4 + \kappa^2 - 2\kappa^4}{\kappa^3} \mathcal{A}(\kappa) + \frac{4 + 3\kappa^2}{\kappa^3} \frac{\pi}{2} - \frac{12 + 11\kappa^2}{3\kappa^2} \right], \tag{20}$$

где

$$\mathcal{A}(\kappa) = \frac{\arccos \kappa}{\sqrt{1 - \kappa^2}} = \frac{\ln(\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1})}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}, \tag{21}$$

причем $\mathcal{A}(0) = \pi/2$.

Для электронного атома ($\kappa = Z\alpha$) при малых значениях Z практический интерес представляет разложение вплоть до членов порядка $\alpha(Z\alpha)^7 m$. Нормировочный фактор с необходимой точностью равен

$$E_C = -(Z\alpha)^2 m \left[1 + \frac{1}{2} (Z\alpha)^2 + \frac{3}{8} (Z\alpha)^4 \right]. \tag{22}$$

Для слагаемых в (18) при малых κ находим выражения

$$r_C(\kappa) = \frac{4}{15} \kappa^2 - \frac{5\pi}{48} \kappa^3 + \frac{12}{35} \kappa^4 - \frac{7\pi}{64} \kappa^5, \tag{23}$$

$$p_C(\kappa) = \left[\frac{4}{15} \ln(2\kappa) - \frac{77}{225} \right] \kappa^2 - \left(\frac{5\pi}{48} \ln\left(\frac{\kappa}{2}\right) + \frac{47\pi}{576} \right) \kappa^3. \tag{24}$$

Окончательно

$$R_C = \frac{4}{15} \kappa^2 - \frac{5\pi}{48} \kappa^3 + \frac{12}{35} \kappa^4 - \frac{7\pi}{64} \kappa^5 - (Z\alpha)^2 \left[\left(\frac{4}{15} \ln(2\kappa) - \frac{77}{225} \right) \kappa^2 - \left(\frac{5\pi}{48} \ln\left(\frac{\kappa}{2}\right) + \frac{47\pi}{576} \right) \kappa^3 \right]. \tag{25}$$

В результате получаем разложение при малых $Z\alpha$ для юлинговской поправки к уровню энергии основного состояния в (электронном) водородоподобном атоме:

$$E_U = \frac{\alpha}{\pi} (Z\alpha)^4 m \left\{ -\frac{4}{15} + \frac{5\pi}{48} Z\alpha + \left[\frac{4}{15} \ln(2Z\alpha) - \frac{1289}{1575} \right] (Z\alpha)^2 + \left[\frac{5\pi}{48} \ln\left(\frac{2}{Z\alpha}\right) + \frac{23\pi}{288} \right] (Z\alpha)^3 \right\}. \tag{26}$$

Это разложение воспроизводит все известные до настоящего времени коэффициенты (см. работы [1, 2] и ссылки в них) и содержит один неизвестный ранее (обозначаемый A_{70}).

4. ПОПРАВКА ЮЛИНГА ДЛЯ МЮОННЫХ АТОМОВ

Рассмотрим теперь предел больших κ . Прежде всего отметим, что в мюонных атомах он может быть реализован при сравнительно малых значениях $Z\alpha$. В случае очень малых $Z\alpha$ ($Z = 1 - 3$, $\kappa(\text{H}) \simeq 1.5$, $\kappa(\text{He}^+) \simeq 3$, $\kappa(\text{Li}^{++}) \simeq 4.5$) достаточно использовать результат [5], представленный в (20). Для более высоких значений Z можно разлагать по $1/\kappa$. Вернемся к выражению (18) и обсудим входящие в него слагаемые. Аналитический результат [5], представленный в (20), может быть легко разложен:

$$r_C(\kappa) = \frac{2}{3} \ln(2\kappa) - \frac{11}{9} + \frac{\pi}{2\kappa} + O\left(\frac{1}{\kappa^2}\right). \quad (27)$$

Разложение второго слагаемого в (18) находим непосредственно:

$$p_C(\kappa) = \frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{9} + O\left(\frac{1}{\kappa}\right). \quad (28)$$

Для получения приведенных асимптотик достаточно заметить, что вклад происходит от малой области интегрирования по переменной v в окрестности верхнего предела $v \simeq 1$, и после замены в (14)

$$v^2(1 - v^2/3) \rightarrow 2v/3 \quad (29)$$

интегралы по v легко берутся. Окончательный результат имеет вид

$$R_C(\kappa) = \left[\frac{2}{3} \ln(2\kappa) - \frac{11}{9} + \frac{\pi}{2\kappa} \right] - \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{9} \right) (Z\alpha)^2 + \\ + O((Z\alpha)^4) + O\left(\frac{(Z\alpha)^2}{\kappa}\right) + O\left(\frac{1}{\kappa^2}\right). \quad (30)$$

Подстановка (29) применима при малых Z и больших κ . Однако ее легко обобщить. В частности, в случае $\kappa \gg 1$ можно воспользоваться преобразованием

$$\frac{v^2(1 - v^2/3)}{1 - v^2} = \frac{2}{3} \frac{v}{1 - v^2} - \frac{v(1 - v)(2 + v)}{3(1 + v)} \quad (31)$$

для нахождения интеграла

$$I_{bc} = \int_0^1 dv \frac{v^2(1 - v^2/3)}{(1 - v^2)^{b/2}} \left(\frac{\kappa\sqrt{1 - v^2}}{1 + \kappa\sqrt{1 - v^2}} \right)^{c-2\epsilon} \quad (32)$$

Для вычисления вклада потенциала Юлинга необходим только один из них:

$$R_C(\kappa) = I_{22}. \quad (33)$$

В соответствии с (31) разделим интеграл на две части: $I^{(1,2)}$. Первый член сводится к неполной бета-функции:

$$I_{bc}^{(1)} = \frac{2}{3} \int_0^1 dv \frac{v}{(1-v^2)^{b/2}} \left(\frac{\kappa\sqrt{1-v^2}}{1+\kappa\sqrt{1-v^2}} \right)^{c-2\epsilon} =$$

$$= \frac{2}{3} \kappa^{b-2} \int_{\delta}^1 \frac{dz}{z} (1-z)^{1-b+c-2\epsilon} = \frac{2}{3} \kappa^{b-2} B_{1-\delta}(2-b+c-2\epsilon, b-2), \quad (34)$$

где

$$1/z = 1 + \kappa\sqrt{1-v^2} \quad (35)$$

и

$$\delta = \frac{1}{1+\kappa} \ll 1.$$

Не представляет труда найти необходимую асимптотику неполной бета-функции:

$$B_{1-\delta}(c-2\epsilon, 0) = \ln(1+\kappa) + [\psi(1) - \psi(c-2\epsilon)] +$$

$$+ \frac{c-2\epsilon-1}{\kappa} - \frac{(c-2\epsilon-1)(c+2-2\epsilon)}{2\kappa^2} + O\left(\frac{1}{\kappa^3}\right).$$

Второй член для $b=2$ можно разложить:

$$I_{2c}^{(2)} = \int_0^1 dv \frac{v(1-v)(2+v)}{3(1+v)} \left(1 - \frac{c-2\epsilon}{1+\kappa\sqrt{1-v^2}} + \frac{(c-2\epsilon)(c-1-2\epsilon)}{2\kappa^2(1-v^2)} \right) + O\left(\frac{1}{\kappa^3}\right)$$

и проинтегрировать:

$$I_{2c}^{(2)} = -\left(\frac{5}{9} - \frac{2}{3} \ln 2\right) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) \frac{c-2\epsilon}{\kappa} - \frac{(c-2\epsilon)(c-1-2\epsilon)}{12\kappa^2} + O\left(\frac{1}{\kappa^3}\right). \quad (36)$$

В итоге получаем базовый интеграл

$$I_{2c} = \left[\frac{2}{3} \ln(2\kappa) + \frac{2}{3} (\psi(1) - \psi(c-2\epsilon)) - \frac{5}{9} \right] + \frac{\pi}{4} \frac{c-2\epsilon}{\kappa} +$$

$$+ \left[\frac{1}{3} - \frac{c-2\epsilon}{4} - \frac{5}{12} (c-2\epsilon)^2 \right] \frac{1}{\kappa^2} + O\left(\frac{1}{\kappa^3}\right), \quad (37)$$

который в случае $c=2$ приводит к результату

$$R_C = \left[\frac{2}{3} \ln(2\kappa) + \frac{2}{3} (\psi(1) - \psi(2-2\epsilon)) - \frac{5}{9} \right] + \frac{\pi}{2} \frac{1-\epsilon}{\kappa} +$$

$$+ \left[\frac{1}{3} - \frac{1-\epsilon}{2} - \frac{5}{3} (1-\epsilon)^2 \right] \frac{1}{\kappa^2} + O\left(\frac{1}{\kappa^3}\right). \quad (38)$$

В случае малых значений Z (т.е. малых ϵ) воспроизводятся результаты (30), что является одной из проверок правильности выражения (38).

Сходимость выражения определяется значением аргумента ψ -функции (логарифмической производной от Γ -функции), который не должен обращаться в нуль. Это условие снова приводит к конечности поправки для заряда Z , определяемого неравенством (17).

5. ПОПРАВКА ЮЛИНГА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим теперь возбужденные состояния nl_j с наибольшими значениями углового и орбитального моментов ($l = n - 1$ и $j = l + 1/2$). Волновые функции и уровни энергии дираковского атома оказываются в этом случае наиболее простыми. В частности, нормировочный фактор в (7) имеет вид

$$E_C(n) = - \frac{(Z\alpha)^2 m/n^2}{\sqrt{1 - (Z\alpha)^2/n^2}}, \tag{39}$$

и в шредингеровском приближении

$$E_C(n) \approx -(Z\alpha)^2 m/n^2.$$

Величина $R(n, n\epsilon_n, \kappa_n)$ приобретает вид (ср. (14))

$$R(n, n\epsilon_n, \kappa_n) = \int_0^1 \frac{dv v^2}{1 - v^2} \left(1 - \frac{v^2}{3}\right) \left(\frac{\kappa_n \sqrt{1 - v^2}}{1 + \kappa_n \sqrt{1 - v^2}}\right)^{2n(1 - \epsilon_n)} \tag{40}$$

Выше мы рассмотрели в деталях случай $n = 1$, используя упрощенные обозначения $\epsilon_1 = \epsilon$, $\kappa_1 = \kappa$ и $R(1, \epsilon, \kappa) = R_C(\kappa)$. Один из способов перехода к произвольным значениям n является эксплуатация рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 + \kappa_n \sqrt{1 - v^2}}\right)^{2n(1 - \epsilon_n)} &= \frac{1}{(2n - 1 - 2n\epsilon_n)(2n - 2 - 2n\epsilon_n)} \times \\ &\times \frac{\partial^2}{\partial \kappa_n^2} \left(\frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 + \kappa_n \sqrt{1 - v^2}}\right)^{2(n - 1 - n\epsilon_n)}, \end{aligned} \tag{41}$$

которое приводит к выражению

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 + \kappa_n \sqrt{1 - v^2}}\right)^{-2n(1 - \epsilon_n)} &= \frac{\Gamma(2 - 2n\epsilon_n)}{\Gamma(2n - 2n\epsilon_n)} \times \\ &\times \frac{\partial^{(2n-2)}}{\partial \kappa_n^{(2n-2)}} \left(\frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 + \kappa_n \sqrt{1 - v^2}}\right)^2. \end{aligned} \tag{42}$$

В результате нетрудно получить

$$R(n, n\epsilon_n, \kappa_n) = \frac{\kappa_n^{2n}}{(2n - 1 - 2n\epsilon_n)(2n - 2 - 2n\epsilon_n)} \frac{\partial^2}{\partial \kappa_n^2} \frac{R(n - 1, n\epsilon_n, \kappa_n)}{\kappa_n^{2(n-1)}} \tag{43}$$

и

$$R(n, n\epsilon_n, \kappa_n) = \kappa_n^{2n} \frac{\Gamma(2 - 2n\epsilon_n)}{\Gamma(2n - 2n\epsilon_n)} \frac{\partial^{(2n-2)}}{\partial \kappa_n^{(2n-2)}} \frac{R(1, n\epsilon_n, \kappa_n)}{\kappa_n^2}. \tag{44}$$

В шредингеровском приближении результат для уровня $1s$ (см. (20)), а также для $2p$ и $3d$ был найден в [5]. В общем случае для уровней с квантовыми числами $l = n - 1$ и $j = l + 1/2$ результат имеет вид [11] (ср. (15))

$$R(n, n\epsilon_n, \kappa_n) = I_{122n}(n\epsilon_n, \kappa_n) - \frac{1}{3} I_{222n}(n\epsilon_n, \kappa_n). \quad (45)$$

Вычисление базовых интегралов I_{abc} (см. (16)) рассмотрено в Приложении.

Для возбужденных состояний в мюонных атомах, удовлетворяющих условию $\kappa \simeq 1.5Z/n \gg 1$ имеет место выражение

$$R(n, n\epsilon_n, \kappa_n) = \left[\frac{2}{3} \ln(2\kappa_n) + \frac{2}{3} (\psi(1) - \psi(2n(1 - \epsilon_n))) - \frac{5}{9} \right] + \frac{\pi}{2} \frac{n(1 - \epsilon_n)}{\kappa_n} + \left[\frac{1}{3} - \frac{n(1 - \epsilon_n)}{2} - \frac{5n^2}{3} (1 - \epsilon_n)^2 \right] \frac{1}{\kappa_n^2} + O\left(\frac{1}{\kappa_n^3}\right). \quad (46)$$

Его получение полностью аналогично выводу соответствующего выражения (38) для основного состояния.

Рассмотрим также нерелятивистское разложение для водородоподобного атома с связанным электроном ($\kappa_n = Z\alpha/n$). Не составляет труда написать первые два члена:

$$E_U = -\frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{Z\alpha}{n}\right)^{2(1+n)} \frac{m}{3} \left\{ (n+1)B\left(\frac{5}{2}, n\right) - (Z\alpha)(2n+3)B\left(\frac{5}{2}, n + \frac{1}{2}\right) + \dots \right\}.$$

Первый член разложения воспроизводит известный результат [4].

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обсуждая полученные результаты, остановимся на нескольких моментах. Во-первых, следует упомянуть, что логарифмические члены при больших значениях κ легко находятся без явных вычислений. Простые соображения, связанные с бегущей константой связи

$$Z\alpha \rightarrow Z\alpha(\kappa_n) = Z\alpha \left(1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \kappa_n \right),$$

немедленно приводят к результату

$$E_U = E_C \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \kappa_n,$$

причем соотношение имеет место для любых значений $Z\alpha$. Согласие этого результата с явными расчетами служит еще одним подтверждением их правильности. Другим подтверждением служит их согласие с численными расчетами [6] для основного состояния. Некоторые другие подтверждения представлены в тексте статьи: так, мы воспроизвели все известные аналитические результаты для вклада свободной поляризации вакуума в уровни энергии электронных и мюонных атомов.

Обсудим кратко вопросы, связанные с точностью расчетов. Во-первых, отметим, что ее можно легко повысить. Для этого достаточно в выражениях, отвечающих шредингеровскому приближению, заменить массу дираковской частицы на приведенную массу, сохранив массу частицы только в релятивистских поправках. Другой проблемой являются конечные размеры ядра для мюонных атомов. В связи с этим мы хотели бы заметить, что нами получены, в частности, результаты для состояний с большим

значением углового момента, которые сравнительно слабо подвергаются влиянию эффектов структуры ядра. Состояния с высоким орбитальным моментом представляют существенный интерес для исследования мюонных атомов. Упомянем, например, прецизионные измерения переходов $3d_{5/2}-2p_{3/2}$ в мюонных ^{24}Mg и ^{28}Si , которые позволили получить наиболее точное значение массы отрицательного мюона [12]. Обзор данных по переходам $5g-4f$, $4f-3d$ и $3d-2p$ приведен в [13]. Исследование таких состояний представляет также интерес в связи с антипротонным гелием, где только состояния с высокими значениями l могут иметь сравнительно большое время жизни (см. [14]).

Выше мы обсуждали поправки к лэмбовскому сдвигу, однако методы, развитые в статье, допускают применение также и для сверхтонкого расщепления [8], и мы намерены продолжить исследования в этом направлении.

Автор благодарит У. Ентшуру (U. Jentschura), В. Г. Иванова, Х. Пилькуна (H. Pilkhun) и В. Г. Шабаева за полезные обсуждения. Работа была частично поддержана программой «Фундаментальная метрология».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод общего выражения

Для проведения интегрирования в (14) удобно ввести некоторые базовые интегралы:

$$R_C(\kappa) = I_{122} - \frac{1}{3} I_{222},$$

где [11]

$$I_{abc} = \int_0^1 dv \frac{v^{2a}}{(1-v^2)^{b/2}} \left(\frac{\kappa\sqrt{1-v^2}}{1+\kappa\sqrt{1-v^2}} \right)^{c-2\epsilon}$$

Можно провести интегрирование для случая $\kappa < 1$:

$$\begin{aligned} I_{abc} &= \int_0^1 dv \frac{v^{2a}}{(1-v^2)^{b/2}} \left(\frac{\kappa\sqrt{1-v^2}}{1+\kappa\sqrt{1-v^2}} \right)^{c-2\epsilon} = \\ &= \frac{1}{2} \kappa^{c-2\epsilon} \int_0^1 dt t^{a-1/2} (1-t)^{-b/2+c/2-\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \kappa^n \frac{(c-2\epsilon)_n}{n!} (1-t)^{n/2} = \\ &= \frac{1}{2} \kappa^{c-2\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \kappa^n \frac{(c-2\epsilon)_n}{n!} B\left(a + \frac{1}{2}, 1 - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \epsilon + n/2\right) = \\ &= \frac{1}{2} \kappa^{c-2\epsilon} \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \kappa^n \frac{(c-2\epsilon)_n}{n!} \frac{\Gamma(1-b/2+c/2-\epsilon+n/2)}{\Gamma(a+3/2-b/2+c/2-\epsilon+n/2)}, \end{aligned}$$

где $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$ — символ Похгаммера.

Сумму четных и нечетных членов ряда для дальнейшего вычисления удобно разделить:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \kappa^{c-2\epsilon} \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \kappa^{2k} \frac{(c-2\epsilon)_{2k}}{(2k)!} \frac{\Gamma(1-b/2+c/2-\epsilon+k)}{\Gamma(a+3/2-b/2+c/2-\epsilon+k)},$$

и

$$\mathcal{O} = \frac{1}{2} \kappa^{c+1-2\epsilon} \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \kappa^{2k} \frac{(c-2\epsilon)_{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{\Gamma(3/2-b/2+c/2-\epsilon+k)}{\Gamma(a+2-b/2+c/2-\epsilon+k)}.$$

Применяя тождества

$$\Gamma(z+k) = (z)_k \Gamma(z),$$

$$(2k)! = 2^{2k} (1/2)_k k!,$$

$$(2k+1)! = 2^{2k} (3/2)_k k!,$$

$$(z)_{2k} = 2^{2k} (z/2)_k (z/2 + 1/2)_k$$

и

$$(z)_{2k+1} = 2^{2k} z (z/2 + 1)_k (z/2 + 1/2)_k,$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \kappa^{c-2\epsilon} \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(1-b/2+c/2-\epsilon)}{\Gamma(a+3/2-b/2+c/2-\epsilon)} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \kappa^{2k} \frac{(c/2-\epsilon)_k}{(1/2)_k} \frac{(c/2+1/2-\epsilon)_k}{k!} \frac{(1-b/2+c/2-\epsilon)_k}{(a+3/2-b/2+c/2-\epsilon)_k} = \\ &= \frac{1}{2} \kappa^{c-2\epsilon} B\left(a + \frac{1}{2}, 1 - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \epsilon\right) \times \\ &\times {}_3F_2\left(\frac{c}{2} - \epsilon, \frac{c}{2} + \frac{1}{2} - \epsilon, 1 - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \epsilon; \frac{1}{2}, a + \frac{3}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \epsilon; \kappa^2\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= -\frac{c-2\epsilon}{2} \kappa^{c+1-2\epsilon} \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(3/2-b/2+c/2-\epsilon)}{\Gamma(a+2-b/2+c/2-\epsilon)} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \kappa^{2k} \frac{(c/2+1-\epsilon)_k}{(3/2)_k} \frac{(c/2+1/2-\epsilon)_k}{k!} \frac{(3/2-b/2+c/2-\epsilon)_k}{(a+2-b/2+c/2-\epsilon)_k} = \\ &= -\frac{c-2\epsilon}{2} \kappa^{c+1-2\epsilon} B\left(a + \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \epsilon\right) \times \\ &\times {}_3F_2\left(\frac{c}{2} + 1 - \epsilon, \frac{c}{2} + \frac{1}{2} - \epsilon, \frac{3}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \epsilon; \frac{3}{2}, a + 2 - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \epsilon; \kappa^2\right). \end{aligned}$$

Литература

1. G. W. Erickson and D. R. Yennie, *Ann. Phys.* **35**, 271, 447 (1965).
2. P. J. Mohr, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1050 (1975).
3. В. Г. Иванов, С. Г. Каршенбойм, *ЯФ* **60**, 333 (1997).
4. Н. Л. Манаков, А. А. Некипелов, А. Г. Файнштейн, *ЖЭТФ* **95**, 1167 (1989).
5. Г. Е. Пустовалов, *ЖЭТФ* **32**, 1519 (1957). Д. Д. Иваненко, Г. Е. Пустовалов, *УФН* **61**, 27 (1957).
6. W. R. Johnson and G. Soff, *At. Data Nucl. Data Tabl.* **33**, 405 (1985).
7. С. Г. Каршенбойм, *ЖЭТФ* **103**, 1105 (1993).
8. S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, and V. M. Shabaev, *Can. J. Phys.* **76**, 503 (1998).
9. J. Epstein and S. Epstein, *Amer. J. Phys.* **30**, 266 (1962).
10. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
11. S. G. Karshenboim, *Can. J. Phys.* **76**, 168 (1998).
12. I. Beltrami, B. Aas, W. Beer et al., *Nucl. Phys. A* **451**, 679 (1986).
13. E. Borie and G. A. Rinker, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 67 (1982).
14. T. Yamazaki, E. Widmann, J. Eades, M. Kumakura, N. Morita, H. A. Torii, M. Hori, T. Ishikawa, F. E. Maas, H. Tamura, R. S. Hayano, L. Sugai, Y. Fijita, B. Ketzer, H. Daniel, F. J. Hartmann, M. Hasinoff, R. Pohl, R. Schmidt, T. von Egidy, and D. Horváth, *Phys. Rev. A* **55**, R3295 (1997).