

## ОСОБЕННОСТИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ В НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ АНТИФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА

В. В. Прудников\*, О. Н. Марков, Е. В. Осинцев

Омский государственный университет  
644077, Омск, Россия

Поступила в редакцию 23 января 1999 г.

С использованием метода Монте-Карло осуществлено компьютерное описание термодинамических свойств неупорядоченной антиферромагнитной модели Изинга на простой кубической решетке с учетом взаимодействия как ближайших соседей, так и следующих за ближайшими соседями. Построена фазовая диаграмма модели во внешнем магнитном поле в системах с концентрацией спинов  $p = 1.0, 0.95, 0.8$ . Выявлено трикритическое поведение модели. Исследовано критическое поведение модели в области слабых полей.

PACS: 64.60.Ak; 64.60.Fg; 64.60.Kw

В последние два десятилетия усилия многих исследователей были направлены на понимание того, как примеси и другие дефекты структуры сказываются на поведении различных систем при фазовых переходах. Особенно интересно влияние замороженных примесей, присутствие которых проявляется в виде случайных возмущений локальной температуры для ферро- и антиферромагнитных систем в отсутствие внешнего магнитного поля или в виде случайных магнитных полей для антиферромагнитных систем в однородном магнитном поле. Благодаря тому что магнитное поле нарушает симметрию системы по отношению к изменению знаков спинов, статистические свойства этих неупорядоченных систем существенно различаются.

Исследования показали [1], что в первом случае при фазовых переходах присутствие замороженных примесей изменяет свойства лишь тех магнетиков, теплоемкость которых в однородном состоянии испытывает расходимость в критической точке. В противном случае присутствие примесей не сказывается на поведении магнетиков при критической температуре. Данному критерию удовлетворяют только системы, эффективный гамильтониан которых вблизи критической точки изоморфен модели Изинга. Исследованию критических свойств неупорядоченной модели Изинга в последнее время было посвящено значительное число работ [2, 3]. Для слаборазбавленных систем было получено хорошее согласие теоретических расчетов с результатами эксперимента и компьютерного моделирования методом Монте-Карло.

Что касается магнетиков со случайными полями, то, несмотря на интенсивные теоретические и экспериментальные исследования в течение последних двадцати лет [3], в настоящее время существует совсем немного надежно установленных фактов, характеризующих поведение данных систем. В частности, природа фазового перехода в модели Изинга со случайными полями все еще остается невыясненной, а получаемые при

\*E-mail: prudnikov@univer.omsk.su

компьютерном моделировании таких систем результаты являются противоречивыми. Практически единственным надежно установленным фактом является то, что верхняя критическая размерность для этого фазового перехода (размерность системы, выше которой критические явления описываются теорией среднего поля) равна шести [3], в отличие от аналогичной величины для однородных систем, где она равна четырем. В последнее время в вопросе о нижней критической размерности перехода  $d_l$  в модели Изинга со случайными полями (размерность системы, выше которой осуществляется дальнейшее упорядочение при температурах отличных от нуля) при существующих аргументах как в пользу  $d_l=2$  [4], так и в пользу  $d_l=3$  [5] после работ [6, 7] исследователи пришли к заключению, что  $d_l=2$ . Однако природа фазового перехода в трехмерной модели Изинга до сих пор еще не ясна. По одним данным это — фазовый переход первого рода [8, 9] вплоть до очень низких значений случайного поля, по другим — переход второго рода [10, 11].

Для описания влияния случайных полей на поведение магнитных систем используются две на качественном уровне эквивалентные модели: ферромагнитная модель Изинга со случайным магнитным полем (RFIM) [12] и неупорядоченная антиферромагнитная модель Изинга во внешнем однородном поле (DAFF) [13]. Реальные магнитные системы с эффектами случайных полей являются антиферромагнетиками с замороженными примесями немагнитных атомов, в поведении которых наряду с антиферромагнитным взаимодействием ближайших атомов проявляются эффекты влияния ферромагнитного взаимодействия атомов, следующих за ближайшими. В неупорядоченной антиферромагнитной модели Изинга во внешнем однородном поле не учитывается конкуренция ферромагнитного взаимодействия, поэтому область ее реального применения, как и ферромагнитной модели со случайным полем, довольно ограничена.

Для выявления особенностей фазовых превращений в магнетиках со случайными полями по сравнению с системами со случайной локальной температурой (случайными спиновыми взаимодействиями) в предлагаемой работе осуществлено компьютерное моделирование методом Монте-Карло критического поведения неупорядоченной антиферромагнитной модели Изинга на простой кубической решетке с учетом взаимодействия как ближайших соседей, так и следующих за ближайшими соседями. Гамильтониан модели имеет вид

$$\mathcal{H} = J_1 \sum_{i,j} p_i p_j \sigma_i \sigma_j + J_2 \sum_{i,k} p_i p_k \sigma_i \sigma_k + \mu H \sum_i \sigma_i, \quad (1)$$

где  $\sigma_i = \pm 1$ ;  $J_1 = 1$  характеризует обменное взаимодействие ближайших спинов, носящее антиферромагнитный характер;  $J_2 = -1/2$  характеризует ферромагнитное взаимодействие спинов, следующих за ближайшими соседями;  $H$  — напряженность однородного магнитного поля;  $p_i, p_j$  — случайные переменные, описываемые функцией распределения

$$P(p_i) = p\delta(p_i - 1) + (1 - p)\delta(p_i) \quad (2)$$

и характеризующие распределенные по узлам решетки замороженные немагнитные атомы примеси (пустые узлы) с концентрацией  $c_{imp} = 1 - p$ . При  $p = 1.0$  данная модель с конкурирующими взаимодействиями уже более двадцати лет исследуется методами Монте-Карло [14, 15]. Однако для описания влияния эффектов неупорядоченности на критическое поведение систем она применена нами впервые. С физической точки зрения данная модель является наиболее реалистичной. Величина эффектов случайных

полей в модели, как и в реальных магнитных системах, определяется концентрацией примесей и величиной внешнего поля. Поэтому параметры модели однозначно соответствуют параметрам реального физического эксперимента. В случае же ферромагнитной модели Изинга со случайным магнитным полем возникает обратная ситуация. Задаваемая в этой модели величина случайного поля не может быть однозначно поставлена в соответствие параметрам физического эксперимента: концентрации примесей в образце и величине внешнего поля.

Рассмотренная в работе неупорядоченная модель замечательна также тем, что при  $H = 0$  она позволяет описывать критическое поведение системы со случайными спиновыми взаимодействиями, в то время как при  $H < H_t$ , согласно приводимым ниже результатам, демонстрирует критическое поведение системы со случайными полями. При  $H > H_t$  флуктуации намагниченности нарушают стабильность фазового перехода второго рода и фазовые превращения в системе приобретают черты фазового перехода первого рода. При  $H = H_t$  и  $T = T_t$  имеет место трикритическое поведение. Таким образом, данная модель позволяет рассмотреть широкое разнообразие типов фазовых переходов и исследовать влияние неупорядоченности, создаваемой присутствием примесей, на термодинамические характеристики системы при фазовых переходах.

Для выделения особенностей термодинамических характеристик неупорядоченной системы, определяющих ее поведение при различных типах фазовых переходов, необходимо прежде всего построить фазовую диаграмму системы, задающую зависимость температуры фазового перехода  $T_{ph}$  от величины напряженности магнитного поля  $H$  при заданной концентрации  $p$  спинов, т.е.  $T_{ph} = T_{ph}(H, p)$ . Для выявления составляющей фазовой диаграммы  $T_c = T_c(H, p)$ , соответствующей фазовым переходам второго рода, необходимо учитывать, что критическое поведение антиферромагнитной системы определяется сильными и долгоживущими флуктуациями «шахматной» намагниченности  $M_{stg}$  — разности намагниченностей подрешеток. Мерой магнитных флуктуаций является линейный размер  $\xi(T)$  характерного магнитного домена — области с сильно коррелированными спинами. По мере приближения  $T$  к  $T_c$  корреляция в ориентации спинов увеличивается и возрастание  $\xi(T)$  описывается степенным законом с индексом  $\nu$ :  $\xi(T) \propto |T - T_c|^{-\nu}$ . Аномальным увеличением в окрестности  $T_c$  характеризуется также «шахматная» восприимчивость  $\chi_{stg} \propto |T - T_c|^{-\gamma}$  и теплоемкость системы  $C(T) \propto |T - T_c|^{-\alpha}$ , где  $\alpha, \gamma$  — критические индексы. Из-за долгоживущих флуктуаций  $M_{stg}$  время релаксации системы  $\tau_p$  в окрестности  $T_c$  также неограниченно возрастает. Данное поведение термодинамических функций и физических параметров наблюдается в непосредственной окрестности  $T_c$  ( $(T - T_c)/T_c \ll 1$ ) для систем, рассматриваемых в термодинамическом пределе (число частиц в системе  $N \rightarrow \infty$ , объем  $V \rightarrow \infty$ ,  $N/V \rightarrow \text{const}$ ). В конечной системе не может проявиться настоящий фазовый переход второго рода. Тем не менее можно ожидать, что если  $\xi(T)$  меньше линейного размера системы, то конечная система будет правильно передавать свойства бесконечной системы. Иначе говоря, если значение  $T$  не слишком близко к  $T_c$ , то модельные расчеты должны давать результаты, соизмеримые с результатами для бесконечной системы. Для определения  $T_c$  воспользуемся предположением, что критические свойства для систем различного масштаба  $L$  достигаются лишь в пределе  $L \rightarrow \infty$ .

Для определения критической температуры перехода в бесконечной системе  $T_c$  ( $L = \infty$ ) может быть использован метод определения «критической температуры» конечной системы  $T_c(L)$  по положению максимума температурной зависимости «шахматной» восприимчивости  $\chi_{stg}(T, L)$  с применением масштабной асимптотической зави-

СИМОСТИ:

$$T_c(L) - T_c(L = \infty) \simeq aL^{-1/\nu}, \quad L \gg 1, \quad (3)$$

где  $a$  — константа, зависящая от деталей модели и граничных условий. Однако в случае компьютерного моделирования критического поведения однородных систем наилучшим образом зарекомендовал себя при определении  $T_c(L = \infty)$  метод кумулянтов Биндера [16], в случае нашей системы связанный с введением в рассмотрение кумулянта  $U$  вида

$$U = \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{[\langle M_{stg}^4 \rangle]}{[\langle M_{stg}^2 \rangle]^2} \right), \quad (4)$$

где скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначают статистическое усреднение, а скобки  $[\dots]$  — усреднение по различным примесным конфигурациям. Кумулянт  $U(L, T)$  имеет важную для описания поведения конечных систем скейлинговую форму

$$U(L, T) = u(L^{1/\nu}(T - T_c)), \quad (5)$$

не содержащую мультипликативной зависимости от  $L$ . Кумулянт определен так, что  $0 \leq U \leq 1$ , при этом при температурах выше  $T_c$  в пределе  $L \rightarrow \infty$   $U(L, T) \rightarrow 0$ . Данная скейлинговая зависимость кумулянта позволяет определять критическую температуру  $T_c(L = \infty)$  через координату точки пересечения кривых, задающих температурную зависимость  $U(L, T)$  для различных  $L$ . Более того, легко показать, что в критической области при  $T \rightarrow T_c$

$$\frac{dU}{dT} = aL^{1/\nu}(1 + bL^{-\omega}), \quad (6)$$

и, следовательно, по максимальному наклону кумулянтов, соответствующих различным значениям  $L$  в пределе  $L \rightarrow \infty$ , вблизи точки их пересечения можно определить индекс  $\nu$ .

Нами были рассмотрены кубические решетки размерами  $L = 12, 18, 24, 32$  с концентрацией спинов  $p = 1.0, 0.95, 0.8$ . При выращивании примесных конфигураций число атомов примесей (пустых узлов)  $(1 - p)L^3$  бралось одинаковым для каждой антиферромагнитной подрешетки и разыгрывалась процедура их случайного распределения по узлам подрешеток. Первоначальная локализация «критической температуры» конечной системы  $T_c(L, H)$  осуществлялась по положению максимума температурной зависимости «шахматной» восприимчивости  $\chi_{stg}(T, L)$  при следующих значениях поля  $H = 0; 1; 2; 3; 4; 4.5; 5.2$  в единицах  $J_1/\mu$  (на рис. 1 приведены зависимости  $\chi_{stg}$  от  $T$  для трех значений  $H$ ). Затем для более точного определения  $T_c(L = \infty, H)$  применялся метод кумулянтов.

Для получения достоверных значений равновесных термодинамических характеристик поведения систем в критической области необходимо обеспечить, чтобы процедуры статистического усреднения и усреднения по различным примесным конфигурациям осуществлялись только после достижения системой равновесного состояния. Критическое поведение различных систем, и в особенности неупорядоченных, характеризуется аномально большими временами релаксации, которые демонстрируют значительное возрастание по мере увеличения размера моделируемых систем.

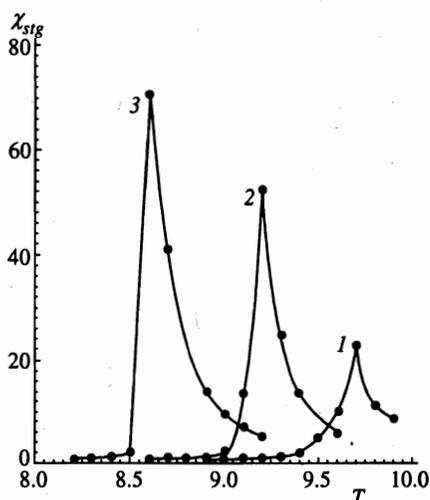


Рис. 1. Температурные зависимости «шахматной» восприимчивости  $\chi_{stg}$  вдоль кривой фазовых переходов второго рода системы  $18^3$  с  $p = 0.95$  для значений  $H = 0$  (1),  $H = 2$  (2) и  $H = 3$  (3)

Неупорядоченные системы со случайными полями, как и спиновые стекла, относятся к фрустрированным системам, фрустрация которых обусловлена их структурной неупорядоченностью. Во фрустрированных системах конкурирующие взаимодействия с различным характером спинового упорядочения вступают в противоречие друг с другом, вызывая совокупность состояний, в которых ни одна из возможных спиновых конфигураций не может минимизировать одновременно все составляющие гамильтониана системы. В неупорядоченных антиферромагнетиках выстраивание спинов в однородном внешнем поле обуславливает конкуренцию с антиферромагнитным упорядочением в области низких температур.

В ряде работ [13, 17–21], посвященных исследованию поведения моделей RFIM и DAFF с эффектами случайных полей, было выявлено, что при низких температурах возникает совокупность метастабильных состояний, разделенных энергетическими барьерами. Одним из данных состояний является состояние с дальним упорядочением (ферромагнитным для RFIM и антиферромагнитным для DAFF), в то время как остальные состояния имели различные конфигурации доменной структуры. В работах было показано, что система, будучи заморожена в одном из этих доменных состояний, затем аномально медленно релаксирует в состояние с дальним упорядочением. В работах [13, 17, 20, 21] проведено исследование влияния различных экспериментальных условий (скорости замораживания или нагревания системы при наличии или в отсутствие внешнего поля) на характер возникающих в упорядоченной фазе состояний, величину необратимых эффектов в зависимости от амплитуды случайных полей и близости к критической температуре.

Нами при исследовании релаксационных свойств рассматриваемой модели на примере решетки размером  $L = 24$  с концентрацией спинов  $p = 0.8$  методом Монте-Карло было выявлено, что в низкотемпературной фазе система релаксирует на временах от 2000 до 4000 шагов на спин сначала, как правило, в одно из метастабильных состояний с последующими флуктуационными переворотами «шахматной» намагниченности с интервалами в среднем до 5000 шагов. Данные перевороты сопровождались аномально медленными эффектами релаксации значений «шахматной» намагниченности через

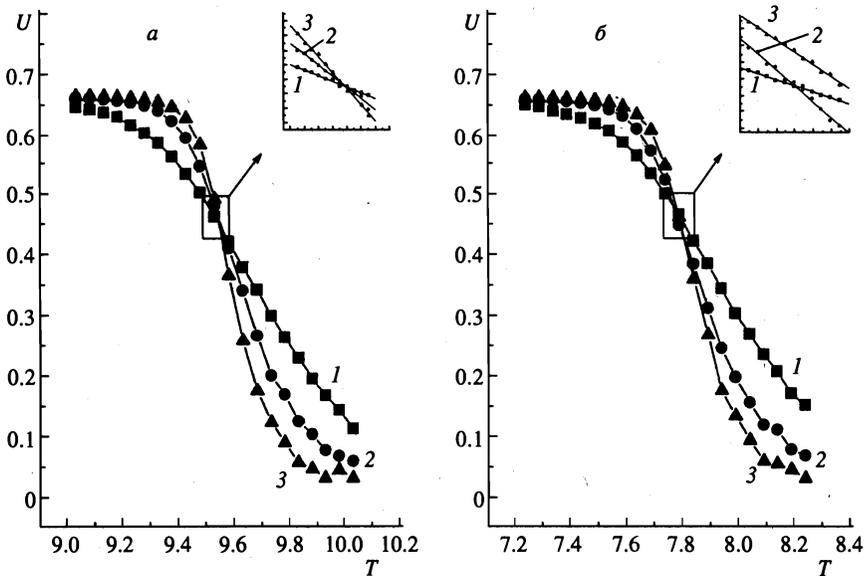


Рис. 2. Температурные зависимости кумулянтов  $U(T, H)$  для решеток размерами  $L = 18$  (1), 24 (2), 32 (3) с концентрациями спинов  $p = 0.95$  (а),  $p = 0.8$  (б) при  $H = 1$

последовательность метастабильных состояний к состоянию близкому к равновесному на временах до 100 000 шагов на спин.

Для достижения равновесных состояний в области температур близких к критическим и определения в них термодинамических характеристик нами осуществлялась процедура медленного квазистатического замораживания системы из неупорядоченной фазы, начиная с температуры, при которой ни в одной из «прогонок» не было выявлено метастабильных состояний. Процедура квазистатического замораживания состояла из повторяемого при каждой температуре режима релаксации в 3000 шагов, последующего режима усреднения в 10000 шагов и понижения температуры с шагом  $\Delta T = 0.01$  с использованием в качестве начальной спиновой конфигурации, созданной на последнем шаге предшествующей температуры. Для того чтобы избежать возможного, особенно в сильных полях [13], влияния эффектов необратимости, проявляющихся в различии термодинамических величин при термоциклировании из неупорядоченной фазы в упорядоченную и обратно, каждая «прогонка» системы состояла из описанной выше процедуры квазистатического замораживания и последующего нагревания.

В процессе расчета кумулянтов  $U(L, T)$  для каждой решетки размером  $L$  при фиксированных  $H$  и  $p$  осуществлялось статистическое усреднение по десяти «прогонкам» с различными начальными спиновыми конфигурациями для каждой примесной конфигурации и последующее усреднение по 20–40 различным конфигурациям примесей. Следует отметить, что применение кумулянтов позволяет хорошо тестировать тип фазового перехода в системе. Так, в случае фазовых переходов второго рода кривые температурной зависимости кумулянтов имеют ярко выраженную точку (в мелком масштабе треугольник) пересечения, как это показано на рис. 2, в то время как в случае переходов первого рода кривые кумулянтов характеризуются специфическим видом без взаимно-

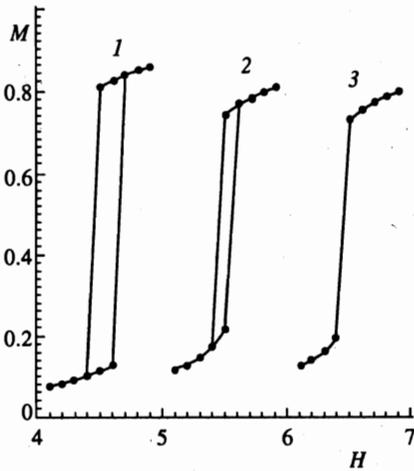


Рис. 3

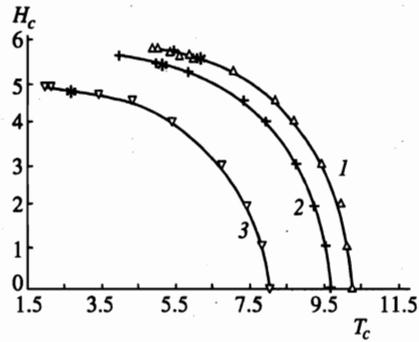


Рис. 4

**Рис. 3.** Зависимости намагниченности  $M$  от величины магнитного поля  $H$  системы  $18^3$  с  $p = 0.95$  для трех температур вблизи трикритической точки  $T_t = 4.6$ :  $T = 4.0$  (1),  $T = 4.5$  (2) и  $T = 4.6$  (3). Кривые 1 и 3 смещены влево и вправо по оси абсцисс соответственно на  $-1.0$  и на  $+1.0$

**Рис. 4.** Фазовые диаграммы для антиферромагнитной модели Изинга с  $p = 1$  (1),  $p = 0.95$  (2),  $p = 0.8$  (3), \* — трикритические точки

го пересечения. Исследования показали, что при возрастании концентрации примесей и напряженности магнитного поля увеличивается погрешность определения среднего значения критической температуры (растет площадь треугольника пересечения кривых кумулянтов, рис. 2) за счет увеличения конфигурационных примесных флуктуаций.

Определение трикритической точки  $T_t(L)$  и  $H_t(L)$  для каждой из решеток с  $L = 12, 18, 24, 32$  и концентрацией спинов  $p = 1.0, 0.95, 0.8$  осуществлялось по поведению изотермической намагниченности  $M$  при изменении поля  $H$ . Происходящая при  $(T_t, H_t)$  смена рода фазового перехода с первого на второй сопровождалась исчезновением петли гистерезиса, характеризующей зависимость  $M(H)$  с увеличением и уменьшением поля  $H$  вдоль кривой переходов первого рода (рис. 3). Значение трикритической температуры для бесконечной системы  $T_t$  определялось экстраполяцией  $T_t(L)$  при  $L \rightarrow \infty$  в соответствии с (3), а значение  $H_t$  — экстраполяцией  $H_t(L)$  в соответствии со скейлинговым соотношением

$$H_t(L) - H_t(L = \infty) \simeq bL^{-(d+2-\eta_t)/2}, \quad (7)$$

где  $d$  — размерность системы,  $\eta_t \ll 1$  — индекс Фишера.

В результате были получены следующие значения параметров, определяющих трикритическую точку:  $T_t = 6.14 \pm 0.03$ ,  $H_t = 5.40 \pm 0.10$  для  $p = 1.0$ ;  $T_t = 5.15 \pm 0.10$ ,  $H_t = 5.35 \pm 0.07$  для  $p = 0.95$ ;  $T_t = 2.64 \pm 0.03$ ,  $H_t = 4.71 \pm 0.05$  для  $p = 0.8$  (здесь значения температуры приведены в единицах  $J_1/k$ , где  $k$  — постоянная Больцмана).

Следует отметить, что для однородной системы ( $p = 1.0$ ) полученные нами значения  $T_t$ ,  $H_t$  уточняют соответствующие значения, полученные в [22], что обусловлено большими размерами рассмотренных нами систем (в [22]  $6 \leq L \leq 20$ ).

Кривые фазовых переходов первого рода были локализованы на основе анализа температурных и полевых зависимостей намагниченности, внутренней энергии и теплоемкости.

Итогом исследований в данной работе явилось построение фазовых диаграмм (рис. 4) для антиферромагнитной однородной модели Изинга ( $p = 1.0$ ), слабонеупорядоченной ( $p = 0.95$ ) и сильнонеупорядоченной моделей ( $p = 0.8$ ). Видно, что с увеличением концентрации примесей происходит смещение кривых фазовых переходов в область более низких температур и низких магнитных полей. Локализация данных кривых дает возможность провести более детальный анализ отличительных особенностей в критическом поведении систем со случайными спиновыми взаимодействиями и случайными полями.

На основе анализа асимптотической скейлинговой зависимости кумулянтов для решеток с  $L = 12, 18, 24, 32$  в соответствии с (6) и «шахматной» восприимчивости при критической температуре  $T_c(L = \infty, H)$  в соответствии с выражением  $\chi_{stg} \propto L^{\gamma/\nu}$  нами были определены критические индексы  $\nu$  и  $\gamma$  для однородных и неупорядоченных состояний антиферромагнитной модели Изинга. Так, для однородной системы с  $p = 1.0$ ,  $H = 0$ ,  $T_c = 10.15$  были получены значения  $\nu = 0.63 \pm 0.01$ ,  $\gamma = 1.25 \pm 0.02$ , которые находятся в хорошем согласии с результатами теоретических расчетов, высокотемпературного разложения и эксперимента [23]. Для неупорядоченных систем со случайными спиновыми взаимодействиями с  $p = 0.95$ ,  $H = 0$ ,  $T_c = 9.62$  и  $p = 0.8$ ,  $H = 0$ ,  $T_c = 7.97$  полученные значения критических индексов  $\nu = 0.65 \pm 0.02$ ,  $\gamma = 1.27 \pm 0.03$  и  $\nu = 0.68 \pm 0.02$ ,  $\gamma = 1.31 \pm 0.03$  согласуются с результатами работы [24] по компьютерному моделированию неупорядоченной ферромагнитной модели Изинга и с результатами теоретического расчета [25] для слабонеупорядоченной модели Изинга. Для неупорядоченных систем с эффектами случайных полей с  $p = 0.95$ ,  $H = 1$ ,  $T_c = 9.53$  и  $p = 0.8$ ,  $H = 1$ ,  $T_c = 7.84$  полученные критические индексы  $\nu = 0.68 \pm 0.02$ ,  $\gamma = 1.35 \pm 0.03$  и  $\nu = 0.79 \pm 0.03$ ,  $\gamma = 1.45 \pm 0.04$  демонстрируют значительное увеличение их значений с ростом неупорядоченности системы. В отличие от работы [8] по компьютерному моделированию ферромагнитной модели Изинга со случайным магнитным полем в нашей модели полученные значения критических индексов не демонстрируют квазидвумерного характера. Возможно, черты квазидвумерного критического поведения могут проявиться при большей величине поля  $H$ , когда сильнее начнут сказываться эффекты случайных полей, это — задача последующих исследований данной модели.

Подводя итоги, заметим, что приведенные в данной работе результаты по компьютерному моделированию неупорядоченной трехмерной модели Изинга с антиферромагнитным взаимодействием между ближайшими соседями и ферромагнитным взаимодействием следующих за ближайшими соседями во внешнем магнитном поле имеют приоритетное значение. Впервые построены фазовые диаграммы для данной модели при концентрациях спинов  $p = 0.95, 0.8$ . Убедительно показано, что в области слабых внешних полей эффекты случайных полей не разрушают фазового перехода второго рода. Для локализации критических температур вдоль кривой фазового перехода применен метод кумулянтов, позволяющий на основе скейлингового анализа не только с высокой точностью провести определение температуры перехода второго рода, но и тестировать характер фазового перехода. Впервые осуществлена локализация три-

критических точек на фазовых диаграммах рассмотренных неупорядоченных систем на основе анализа гистерезисных эффектов в поведении намагниченности. Локализация с хорошей точностью критических температур позволила провести определение критических индексов для модели Изинга с эффектами случайной температуры (при отсутствии внешнего поля) и с эффектами случайных полей (при отличных от нуля значениях магнитного поля).

Исследования поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97-02-16124).

## Литература

1. A. B. Harris, *J. Phys. C* **7**, 1671 (1974).
2. R. B. Stinchcombe, in *Phase transitions and critical phenomena*, ed. by C. Domb and J. L. Lebowitz, Acad. press, New York (1983), vol. 7, p. 151.
3. В. С. Доценко, УФН **165**, 481 (1995).
4. Y. Imry and S. Ma, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1399 (1975).
5. G. Parisi and N. Sourlas, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 744 (1979).
6. J. Z. Imbrie, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1747 (1984).
7. J. Bricmont and A. Kupiainen, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1829 (1987).
8. A. P. Young and M. Nauenberg, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2429 (1985).
9. H. Rieger and A. P. Young, *J. Phys. A* **26**, 5279 (1993).
10. A. T. Ogielski and D. A. Huse, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1298 (1986).
11. A. T. Ogielski, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1251 (1986).
12. D. P. Belanger and A. P. Young, *J. Magn. Magn. Mater.* **100**, 272 (1991).
13. G. S. Grest, C. M. Soukoulis, and K. Levin, *Phys. Rev. B* **33**, 7659 (1986).
14. D. P. Landau, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 449 (1972).
15. H. Müller-Krumbhaar and D. P. Landau, *Phys. Rev. B* **14**, 2014 (1976).
16. K. Binder, *Z. Phys. B* **43**, 119 (1981).
17. D. Andelman, H. Orland, and L. Wijewardhana, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 145 (1984).
18. G. Grinstein and J. F. Fernandez, *Phys. Rev. B* **29**, 6389 (1984).
19. H. Yoshizawa and D. P. Belanger, *Phys. Rev. B* **30**, 5220 (1984).
20. D. Stauffer, C. Hartzstein, K. Binder, and A. Aharony, *Z. Phys. B* **55**, 352 (1984).
21. D. Andelman and J. F. Joanny, *Phys. Rev. B* **32**, 4818 (1985).
22. D. P. Landau, *Phys. Rev. B* **14**, 4054 (1976).
23. J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. B* **21**, 3976 (1980).
24. H.-O. Heuer, *Phys. Rev. B* **42**, 6476 (1990).
25. I. O. Mayer, *J. Phys. A* **22**, 2815 (1989).