

## ПОРОГОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ГОМЕОТРОПНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

*В. П. Романов\*, Г. К. Скляренко*

*Санкт-Петербургский государственный университет  
198904, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 25 февраля 1999 г.

Исследуется ориентационный переход в гомеотропно ориентированной ячейке нематического жидкого кристалла под действием электрического поля. Учитывается взаимодействие с полем, вызванное как анизотропией диэлектрической проницаемости, так и флексоэлектрической поляризацией. Для произвольной энергии взаимодействия нематика с подложкой получены простые соотношения, позволяющие определить пороговые характеристики фазового перехода. Показано, что в отличие от случая планарной ориентации периодическая структура при полях выше критического может возникать только за счет флексоэлектрического эффекта. Полученные зависимости для пороговых параметров в данной геометрии чрезвычайно удобны для экспериментального определения поверхностной энергии и разности флексоэлектрических коэффициентов.

PACS: 61.30.Gd, 64.70.Md

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из замечательных свойств жидких кристаллов (ЖК) является их способность изменять свою ориентационную структуру под действием сравнительно слабых внешних полей. Такая чувствительность наиболее ярко проявляется в эффектах Керра и Коттона—Муттона в окрестности точки перехода нематическая фаза — изотропная жидкость, флексоэлектрическом эффекте в нематиках и эффекте Фредерикса [1–3]. В настоящее время перечисленные явления вызывают повышенный интерес в связи с широким практическим применением ЖК в оптических устройствах отображения информации. Как правило, такого рода эффекты наблюдаются в малых образцах, благодаря чему существенное влияние на структуру ЖК оказывает энергия их взаимодействия с подложкой. Поэтому при решении задач, связанных с переориентацией жидкокристаллических ячеек, возникает необходимость учитывать реальные значения соответствующих параметров.

Наиболее известным ориентационным фазовым переходом в нематическом ЖК (НЖК) является эффект Фредерикса, состоящий в изменении однородного распределения директора при некотором пороговом значении поля [1–3]. В 1985 г. было обнаружено [4], что при исходной планарной ориентации нематика и жестких граничных условиях возникающая при таком переходе структура может быть и периодической в зависимости от отношения  $r = K_2/K_1$  упругих модулей Франка, причем при  $r$ , большем

\*E-mail: vadim.romanov@pobox.spbu.ru

некоторого критического значения  $r_c$ , переход Фредерикса порождает аperiodическое искажение слоя, а при  $r < r_c$  — периодическое. В работах [5, 6] авторы теоретически и экспериментально исследовали периодические структуры, появляющиеся в такой геометрии при значениях поля выше порога Фредерикса в лиотропных нематических ячейках. Необходимо отметить, что приближение жесткого сцепления с подложкой при теоретическом описании НЖК применяется достаточно часто, поскольку учет конечности поверхностной энергии значительно усложняет решение задач. В работах [7, 8] показано, что тип образующейся структуры зависит от величины энергии сцепления с подложкой, но аналитически установить вид этой зависимости не удается.

Возможность существования периодического распределения директора в планарно ориентированной ячейке нематика с жесткими граничными условиями была рассмотрена ранее Пикиным и соавторами [9, 10] при изучении флексоэлектрического эффекта. Этот эффект, открытый в 1969 году Мейером [11] и связанный с анизотропией формы молекул НЖК, является линейным по полю, в то время как переход Фредерикса, причиной которого является анизотропия диэлектрической проницаемости, — квадратичным. В работе [12] дана обобщенная картина поведения слоя нематика во внешнем электрическом поле с учетом обоих названных явлений для планарной ориентации и жесткого сцепления с подложкой, рассмотрены флуктуации директора в такой системе и получена фазовая диаграмма для двух возможных типов искажений. В этом случае задача является чрезвычайно громоздкой и не допускает аналитического решения.

Благодаря пороговому характеру рассматриваемых эффектов, последние являются очень удобным инструментом для измерения параметров нематиков, однако для этой цели необходимо иметь достаточно простые аналитические выражения для пороговых характеристик системы.

В настоящей работе исследуется поведение НЖК во внешнем электрическом поле при исходной гомеотропной ориентации директора в наиболее общем случае произвольной величины поверхностной энергии и различных модулях Франка. В этой геометрии удастся получить дисперсионное соотношение между значениями поля и периода структуры в очень простой форме, что существенно упрощает вычисления и позволяет рассчитать зависимости критических параметров нематика от энергии сцепления и толщины ячейки. Показано, что возникающая статическая структура может быть как периодической, так и аperiodической в зависимости от соотношения между модулем упругости  $K_2$  и электрическими константами НЖК. Существенно, что периодическая структура в такой системе может появиться только при наличии в ней флексоэлектрической поляризации.

Полученные результаты предоставляют хорошую возможность для экспериментального измерения таких важных характеристик нематиков, как поверхностная энергия и разность флексоэлектрических коэффициентов.

## 2. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФЛЕКСОЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА В НЖК

Рассмотрим гомеотропно ориентированную ячейку НЖК, заключенную между плоскопараллельными пластинами во внешнем электрическом поле. Введем декартову систему координат с началом в центре ячейки и осью  $z$  нормальной к пластинам. Пусть  $E = (E, 0, 0)$  — напряженность электрического поля. Вектор директора можно записать в виде  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta\mathbf{n} = (n_x(y, z), n_y(y, z), 1)$ , где  $\delta\mathbf{n} = (n_x(y, z), n_y(y, z), 0)$  — ма-

лое отклонение директора от его равновесной ориентации  $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1)$ . Мы считаем что структура, возникающая в ячейке под действием поля, однородна по  $x$ , поскольку для создания именно такого распределения директора требуется наименьшее значение поля [8, 12, 13]. Соответствующее изменение свободной энергии с точностью до членов второго порядка по  $\delta n$  имеет вид [1, 2, 12, 13]

$$\Delta F = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left\{ K_1 (\partial_y n_y)^2 + K_2 (\partial_y n_x)^2 + K_3 [(\partial_z n_x)^2 + (\partial_z n_y)^2] - \epsilon E^2 n_x^2 - 2e E n_x \partial_y n_y \right\}, \quad (2.1)$$

где  $K_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — модули Франка,  $\epsilon = \epsilon_a/4\pi$ ,  $\epsilon_a = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$  — анизотропия диэлектрической проницаемости,  $\epsilon_{\parallel}$  и  $\epsilon_{\perp}$  — диэлектрические проницаемости соответственно вдоль и поперек оси нематика,  $e = e_1 - e_3$  — разность флексоэлектрических коэффициентов, символ  $\partial_j$  ( $j = x, y, z$ ) означает частную производную по соответствующей координате. Будем для определенности считать, что  $\epsilon_a > 0$ .

Условием существования равновесной ориентационной структуры является равенство нулю вариационных производных  $\delta \Delta F / \delta n_x$  и  $\delta \Delta F / \delta n_y$ , что с учетом интегрирования по частям приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} K_2 \partial_y^2 n_x + K_3 \partial_z^2 n_x + e E \partial_y n_y + \epsilon E^2 n_x &= 0, \\ K_1 \partial_y^2 n_y + K_3 \partial_z^2 n_y - e E \partial_y n_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Учитывая симметрию системы (2.2), будем искать ее решение в виде

$$\begin{aligned} n_x &= \sin(qy) \theta_1(z), \\ n_y &= \cos(qy) \theta_2(z), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $q$  — волновое число,  $\theta_{1,2}(z)$  — некоторые функции. Тогда систему уравнений (2.2) можно переписать в следующей форме:

$$\hat{A} \begin{pmatrix} \theta_1(z) \\ \theta_2(z) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.4)$$

где матрица  $\hat{A}$  равна

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -K_2 q^2 + \epsilon E^2 + K_3 \partial_z^2 & -e E q \\ -e E q & -K_1 q^2 + K_3 \partial_z^2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Для решения уравнения (2.4) диагонализуем матрицу  $\hat{A}$  преобразованием  $\hat{U}^{-1} \hat{A} \hat{U}$ , где матрица  $\hat{U}$  составлена из собственных векторов  $\hat{A}$  и имеет вид

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 2eEq & 2eEq \\ f - g & f + g \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} f &= (K_1 - K_2) q^2 + \epsilon E^2, \\ g &= \sqrt{f^2 + (2eEq)^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Умножая уравнение (2.4) слева на  $\hat{U}^{-1}$  и переходя к новым переменным

$$\begin{pmatrix} \theta'_1(z) \\ \theta'_2(z) \end{pmatrix} = \hat{U}^{-1} \begin{pmatrix} \theta_1(z) \\ \theta_2(z) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

получаем

$$\begin{pmatrix} -Q^2 + \partial_z^2 & 0 \\ 0 & -P^2 + \partial_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta'_1(z) \\ \theta'_2(z) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.9)$$

где

$$P = \sqrt{\frac{1}{2K_3} [(K_1 + K_2)q^2 - \epsilon E^2 + g]}, \quad (2.10)$$

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2K_3} [(K_1 + K_2)q^2 - \epsilon E^2 - g]}. \quad (2.11)$$

Решение системы (2.9) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \theta'_1(z) \\ \theta'_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{Qz} + a_2 e^{-Qz} \\ b_1 e^{Pz} + b_2 e^{-Pz} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где  $b_i, c_i$  ( $i = 1, 2$ ) — постоянные интегрирования. С учетом (2.3), (2.6), (2.8), (2.12) получаем выражения для функций  $n_x(y, z)$  и  $n_y(y, z)$ :

$$\begin{aligned} n_x(y, z) &= 2eEq (a_1 e^{Qz} + a_2 e^{-Qz} + b_1 e^{Pz} + b_2 e^{-Pz}) \sin(qy), \\ n_y(y, z) &= [(f + g)(a_1 e^{Qz} + a_2 e^{-Qz}) + (f - g)(b_1 e^{Pz} + b_2 e^{-Pz})] \cos(qy). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$ , входящие в (2.13), определяются из граничных условий, накладываемых на вектор директора  $\mathbf{n}(x, y, z)$  и описываемых поверхностной энергией  $W$ .

### 3. УЧЕТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Для анализа влияния величины энергии  $W$  сцепления нематика с подложкой на образование флексоэлектрической структуры рассмотрим граничные условия в виде [3]

$$\begin{aligned} W\theta_1 \pm K_3 \partial_z \theta_1 &= 0, \quad z = \pm L/2, \\ W\theta_2 \pm K_3 \partial_z \theta_2 &= 0, \quad z = \pm L/2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

(мы предполагаем, что поверхностная энергия на разных пластинах одинакова). Подставляя (2.13) в (3.1), получаем систему четырех уравнений для определения коэффициентов  $a_i, b_i$ . Приравняв ее определитель к нулю, имеем

$$\det \hat{S} = 0, \quad (3.2)$$

где матрица  $\hat{S}$  равна

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{S}_Q & \hat{S}_P \\ (f+g)\hat{S}_Q & (f-g)\hat{S}_P \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_Q = \begin{pmatrix} (W + K_3Q) \exp(QL/2) & (W - K_3Q) \exp(-QL/2) \\ (W - K_3Q) \exp(-QL/2) & (W + K_3Q) \exp(QL/2) \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_P = \begin{pmatrix} (W + K_3P) \exp(PL/2) & (W - K_3P) \exp(-PL/2) \\ (W - K_3P) \exp(-PL/2) & (W + K_3P) \exp(PL/2) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (3.2) сводится к условию

$$\det \hat{S}_Q \det \hat{S}_P = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\left[ \operatorname{th}(QL) + \frac{2\xi Q}{1 + \xi^2 Q^2} \right] \left[ \operatorname{th}(PL) + \frac{2\xi P}{1 + \xi^2 P^2} \right] = 0, \quad (3.3)$$

где  $\xi = K_3/W$  — характерная длина, определяющая влияние ограничивающей твердой поверхности на ориентацию НЖК в некоторой пристеночной области.

Как видно из формул (2.7), (2.10), при любых значениях  $E$  и  $q$  величина  $P$  является вещественной. С учетом (3.3) это означает, что система уравнений (3.1) имеет нетривиальное решение только при условии

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{2h\rho}{\rho^2 - h^2}, \quad (3.4)$$

где

$$h = L/\xi, \quad \rho = iQL, \quad (3.5)$$

что с учетом (2.7), (2.11) определяет дисперсионную зависимость  $E(q)$ :

$$E(q) = \sqrt{\frac{\left(\frac{\rho^2}{L^2} K_3 + K_2 q^2\right) \left(\frac{\rho^2}{L^2} K_3 + K_1 q^2\right)}{\frac{\rho^2}{L^2} \epsilon K_3 + (\epsilon K_1 + e^2) q^2}}.$$

Минимизируя последнее выражение, получаем критические значения волнового числа и поля, соответствующие поверхностной энергии  $W$ :

$$q_c = \frac{\rho}{L} \sqrt{\frac{\mu K_3}{e^2 + \epsilon K_1}}, \quad (3.6)$$

$$E_c = \frac{\rho}{L} \sqrt{\frac{K_3}{\epsilon}} \delta,$$

где

$$\mu = \frac{e}{\sqrt{K_1 K_2}} \sqrt{e^2 + \epsilon(K_1 - K_2)} - \epsilon, \quad (3.7)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu + \epsilon} \left(1 + \frac{\mu K_2}{e^2 + \epsilon K_1}\right) \left(1 + \frac{\mu K_1}{e^2 + \epsilon K_2}\right)},$$

$\rho = \rho(W, L, K_3)$  — наименьший из корней уравнения (3.4), так как именно он определяет пороговое значение поля. Рассмотрим предельные случаи.

При жестком сцеплении директора с подложкой, т.е.  $W = \infty$ , граничные условия (3.1) принимают форму

$$\begin{pmatrix} \theta_1(z = \pm L/2) \\ \theta_2(z = \pm L/2) \end{pmatrix} = 0. \quad (3.8)$$

Из уравнения (3.4) находим  $\rho = \pi$ . В одноконстантном приближении, т.е. при  $K_1 = K_2 = K_3$ , формулы (3.6) совпадают с результатами работы [13]. Асимптотика критического поля при  $W \rightarrow \infty$  имеет вид

$$E_c \approx E_c^\infty \left(1 - \frac{2K_3}{WL}\right),$$

где

$$E_c^\infty = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{K_3}{\epsilon}} \delta$$

— пороговое значение для жестких граничных условий.

Для неограниченного образца, которому соответствует  $W = 0$ , из (3.4) получаем  $\rho = 0$ , что с учетом определения (3.5) приводит к линейной зависимости  $E(q)$ :

$$E = q \sqrt{\frac{K_1 K_2}{\epsilon K_1 + e^2}}.$$

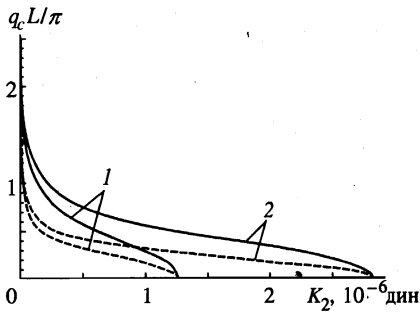
Таким образом, в этом случае эффект не является пороговым, т.е.  $E_c^0 = 0$ , и каждой величине поля  $E$  соответствует свое значение волнового числа  $q$ , т.е. свой период флексоэлектрической структуры [11, 13]. При малых энергиях  $W$  решение имеет вид

$$E_c \approx \sqrt{\frac{2W}{\epsilon L}} \delta.$$

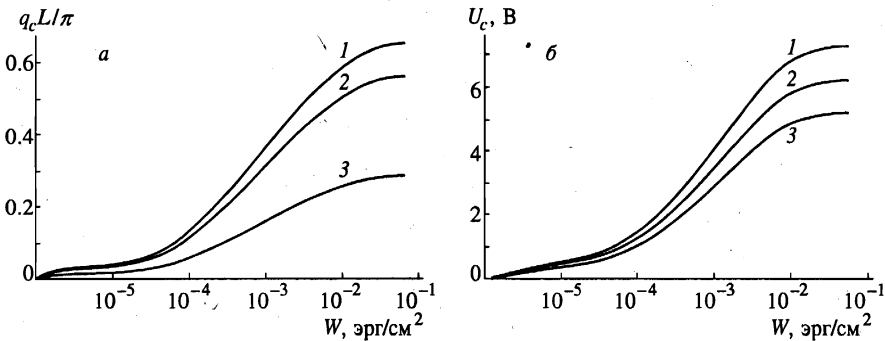
Очевидно, что величина  $\rho$  монотонно возрастает с ростом  $W$  от  $\rho|_{W=0} = 0$  до  $\rho|_{W=\infty} = \pi$ .

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ

Проанализируем полученные результаты. Как видно из формул (3.6), (3.7), тип структуры, возникающей в гомеотропно ориентированной ячейке НЖК под действием внешнего электрического поля, определяется знаком величины  $\mu$ , зависящей от параметров нематика:  $e, \epsilon, K_1, K_2$ . При  $\mu > 0$  функция  $E(q)$  имеет минимум в точке  $q_c \neq 0$ ,



**Рис. 1.** Зависимость критического волнового числа  $q_c$  от модуля упругости  $K_2$  для различных величин разности флексоэлектрических коэффициентов  $e_1 - e_3$ : 1 —  $0.33 \cdot 10^{-11}$  Кл/м; 2 —  $0.5 \cdot 10^{-11}$  Кл/м. Сплошные линии соответствуют  $W = \infty$  (жесткое сцепление), штрихи —  $W = 0.001$  эрг/см<sup>2</sup> (мягкие граничные условия). При расчетах использованы типичные значения параметров НЖК:  $\epsilon_a = 0.1$ ,  $K_1 = 0.7 \cdot 10^{-6}$  дин,  $K_3 = 0.5 \cdot 10^{-6}$  дин,  $L = 10^{-3}$  см



**Рис. 2.** Зависимости пороговых характеристик нематика  $q_c$  (а) и  $U_c$  (б) от энергии сцепления с подложкой  $W$  для различных величин разности флексоэлектрических коэффициентов  $e_1 - e_3$ : 1 —  $0.33 \cdot 10^{-11}$  Кл/м; 2 —  $0.5 \cdot 10^{-11}$  Кл/м; 3 —  $0.67 \cdot 10^{-11}$  Кл/м. При расчетах использованы те же значения параметров НЖК, что и на рис. 1,  $K_2 = 10^{-6}$  дин

а при  $\mu \leq 0$  наименьшему значению поля соответствует  $q = 0$ . Существенно, что этот знак не зависит от модуля Франка  $K_1$ .

В случае  $\epsilon K_2/e^2 < 1$  в ячейке НЖК при  $E = E_c$  происходит фазовый переход из однородного гомеотропного состояния в периодическую флексоэлектрическую структуру (периодический эффект Фредерикса) с волновым числом  $q_c$ , причем существование флексоэлектрической поляризации, т. е. требование  $e \neq 0$ , является необходимым условием такого перехода. В этом состоит принципиальное отличие поведения во внешнем электрическом поле гомеотропно ориентированной нематической ячейки от ячейки, ориентированной планарно, так как в последней периодическое распределение директора может возникать и в отсутствие флексоэлектрического эффекта [4-8]. Тот факт, что появление периодической структуры контролируется именно модулем Франка  $K_2$ , связан с возникающей при таком переходе деформацией кручения, которая описывается этим коэффициентом.

Для  $\epsilon K_2/e^2 \geq 1$  при  $E = E_c$  имеет место обычный (аперриодический) эффект Фредерикса. Этот критерий не зависит от величины энергии сцепления нематика с подложкой.

Зависимость пороговых характеристик нематика от поверхностной энергии  $W$  представлена на рис. 2. Заметим, что при  $W > 0.01$  эрг/см<sup>2</sup> эти характеристики су-

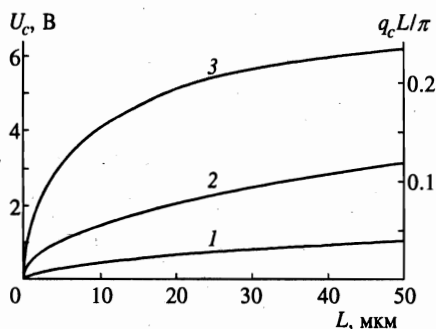


Рис. 3. Зависимости пороговых характеристик от толщины ячейки  $L$  для различных значений поверхностной энергии  $W$  при  $\epsilon_1 - \epsilon_3 = 0.33 \cdot 10^{-11}$  Кл/м: 1 — 0.001 эрг/см<sup>2</sup>; 2 — 0.01 эрг/см<sup>2</sup>; 3 — 0.1 эрг/см<sup>2</sup> (остальные параметры НЖК те же, что и на рис. 2). Кривые 1–3 одновременно описывают поведение функций  $U_c(L)$  и  $q_c(L)$

щественно не изменяются. Видно, что функция  $q_c(W)$  более чувствительна к величине разности флексоэлектрических коэффициентов, чем  $U_c(W)$ .

На рис. 1 приведена зависимость критического волнового числа  $q_c L / \pi$  от модуля Франка  $K_2$  для различных величин разности флексоэлектрических коэффициентов в случаях жестких и мягких граничных условий. На графике видно существование критического значения  $K_2^0$ , определяемого равенством  $\epsilon K_2^0 / e^2 = 1$ : при  $K_2 < K_2^0$  имеет место периодический флексоэлектрический эффект, при  $K_2 \geq K_2^0$  — аperiodический переход Фредерикса.

На рис. 3 изображены графики зависимостей  $U_c$  и  $q_c$  от толщины ячейки  $L$  для различных значений энергии взаимодействия НЖК с подложкой. Заметно, что критические параметры очень чувствительны к толщине ячейки и, следовательно, полученные зависимости могут быть использованы для экспериментального определения энергии сцепления нематика с подложкой и разности флексоэлектрических коэффициентов.

## Литература

1. P. G. de Gennes, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon Press, Oxford (1993).
2. С. Чандрасекар, *Жидкие кристаллы*, Мир, Москва (1980).
3. С. А. Пикин, *Структурные превращения в жидких кристаллах*, Наука, Москва (1981).
4. F. Lonberg and R. B. Meyer, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 718 (1985).
5. M. Simões, A. J. Palangana, L. R. Evangelista et. al., *Phys. Rev. E* **54**, 3765 (1996).
6. A. J. Palangana, M. Simões, and L. R. Evangelista, *Phys. Rev. E* **56**, 4282 (1997).
7. C. Oldano, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1098 (1986).
8. E. Miraldi, C. Oldano, and A. Strigazzi, *Phys. Rev. A* **34**, 4348 (1986).
9. Ю. П. Бобылев, С. А. Пикин, *ЖЭТФ* **72**, 369 (1977).
10. Y. P. Bobylev, V. G. Chigrinov, and S. A. Pikin, *J. de Phys. Coll.* **40**, C3-331 (1979).
11. R. B. Meyer, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 918 (1969).
12. P. Galatola, C. Oldano, and M. Rajteri, *Phys. Rev. E* **49**, 1458 (1994).
13. В. П. Романов, Г. К. Скляренко, *ЖЭТФ* **112**, 1675 (1997).