

МНОГОЭЛЕКТРОННЫЙ ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ В АТОМАХ

Б. А. Зон*

Воронежский государственный университет
394693, Воронеж, Россия

Поступила в редакцию 8 декабря 1998 г.

Дан теоретический вывод формулы, описывающей N -электронную ионизацию атомов постоянным полем и лазерным излучением в туннельном режиме. Приведены численные примеры для атомов благородных газов.

PACS: 32.80.Fb, 87.64.Lg

1. ВВЕДЕНИЕ

Многоэлектронная ионизация атомов лазерным излучением впервые наблюдалась Сураном и Запесочным [1] в щелочноземельных атомах (обзор этой и других ранних работ см. в [2]). В настоящее время подобные исследования стали одним из главных направлений физики взаимодействия атомов с мощным лазерным излучением [3].

Для интерпретации накопленных экспериментальных данных предложен ряд теоретических моделей, связанных как с непосредственным воздействием лазерного излучения на атомные электроны [4–8], так и с образованием многозарядного иона в результате неупругих столкновений ранее возникших электронов с родительским ионом [9–11]. Данные модели позволяют объяснить многие наблюдаемые особенности явления [12–16]. Тем не менее сложности теоретического описания образования кратных ионов в лазерном поле, не связанного с неупругими столкновениями [4–8], не позволяют привлечь эти механизмы в должной степени для объяснения данных эксперимента.

В то же время известно, что образование однократных ионов в лазерном поле в туннельном режиме хорошо описывается относительно простыми формулами [17–19]. В работе [20] предложено эмпирическое обобщение этих формул для описания образования многозарядных ионов. Поэтому вполне естественно развитие существующей теории туннельного эффекта в атомах на случай отрыва от атома нескольких электронов одновременно. Решение этой проблемы и является целью данной работы.

Очевидным аналогом рассматриваемого явления в физике твердого тела является эффект Джозефсона. В работе [21] приводится ряд соображений, касающихся различия одночастичного и многочастичного туннельного эффекта. Сравнение этих выводов с результатами данной работы показывает, что для туннельного эффекта в атомах указанное различие является не столь тривиальным, как описано в [21].

*E-mail: zon@niif.vsu.ru

2. АСИМПТОТИКА МНОГОЭЛЕКТРОННОЙ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

Напомним вначале некоторые факты, упрощающие понимание основной идеи предлагаемой модели. Как известно, для описания оптических переходов в сложных атомах Бейтс и Дамгаард [22] развили метод Слейтера [23], сохранив в основном безузловой характер слейтеровских орбиталей. Для внешних атомных электронов эффективный заряд ядра перестает быть подгоночным параметром, в отличие от метода Слейтера, поскольку он совпадает с зарядом остаточного иона. Эффективное же главное квантовое число однозначно определяется энергией связи электрона. С этой целью рассматривается асимптотическая область движения электрона, где атомный потенциал становится кулоновским. Высокая точность метода Бейтса—Дамгаард в расчетах сил осцилляторов [24] вместе с ясным физическим обоснованием этого метода позволяют применять его и для расчета других атомных характеристик, определяемых большими расстояниями от атомного ядра.

Вероятность туннельного эффекта также определяется далекими от ядра расстояниями, где энергия взаимодействия электрона с внешним полем становится сравнимой с энергией притяжения электрона к остаточному иону. Поэтому для описания туннельного эффекта можно использовать метод Бейтса—Дамгаард. Подобная процедура была развита в недавней работе [25] для расчета туннельного эффекта в ридберговских молекулах, где приведены оценки условий применимости метода.

Пусть в процессе туннельного эффекта от атома отрывается N электронов, причем все эти электроны эквивалентны, т. е. принадлежат одной и той же атомной оболочке. Тогда асимптотическое поведение радиальной части N -электронной волновой функции в приближении Бейтса—Дамгаард определяется произведением асимптотик надлежащим образом симметризованных одноэлектронных функций:

$$\psi_{\nu l m}(\mathbf{r}) \sim C_{\nu l} b^{-3/2} \left(\frac{r}{b}\right)^{\nu-1} \exp\left(-\frac{r}{b}\right) Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right), \quad (1)$$

$$C_{\nu l} = (2\pi\nu)^{-1/2} \left(\frac{2}{\nu}\right)^{\nu} L(\varepsilon), \quad L(\varepsilon) = \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{(l+1/2)/2} (1-\varepsilon^2)^{-\nu/2}.$$

Здесь Z — заряд остаточного иона, $a = \hbar^2/\mu e^2$ — боровский радиус, μ , e — масса и абсолютное значение заряда электрона, $b = a\nu/Z$, $\varepsilon = (l + 1/2)/\nu$. Постоянная $C_{\nu l}$ в формуле (1) определяется в квазиклассическом приближении без предположения о выполнении условия $l \ll \nu$, которое было принято в работе [19]. Вследствие этого возникает функция $L(\varepsilon)$, причем $L(\varepsilon) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом предельном переходе выражение (1) для постоянной $C_{\nu l}$ переходит в формулу (11) из [19], если в этой формуле исправить неточность: опустить число $e = 2.718 \dots$

Выражение (1) для $C_{\nu l}$ получено при условии $\varepsilon < 1$. Для $\varepsilon > 1$ квазиклассическое приближение оказывается неприменимым, и для нахождения постоянной $C_{\nu l}$ требуется применять численные методы (см., например, [26]).

Главное квантовое число ν определяется энергией связи электрона. Если E_1/e , $E_2/e, \dots$ — первый, второй и т. д. потенциал ионизации атома, то при каскадной ионизации главное квантовое число j -го электрона, оторванного от атома, есть

$$\nu_j = \left(\frac{2aE_j}{Z^2e^2}\right)^{-1/2}$$

Если же электроны эквивалентны и отрываются от атома одновременно, то для всех электронов

$$\nu = \left(\frac{2aE_N}{NZ^2e^2} \right)^{-1/2}, \quad (2)$$

где

$$E_N = \sum_{j=1}^N E_j$$

— энергия связи N электронов. Подчеркнем, что в рамках рассматриваемой модели асимптотическое поведение электронной волновой функции связанного состояния (1) зависит от того, сколько электронов отрывается от атома. Тем самым частично учитываются многоэлектронные эффекты в начальном состоянии атома. Формула эквивалентная (2) была получена в работе [20] эмпирически.

Будем теперь рассматривать N -электронную ионизацию как отрыв от атома N -электронного «сгустка» — своеобразной квазичастицы, обладающей массой $N\mu$ и зарядом $-Ne$. При этом в области, определяющей процесс ионизации, расстояние между электронами в сгустке будем считать много меньшим расстояния от атомного остатка до центра масс сгустка. Обозначив расстояние между i -м и j -м электронами через x_{ij} , а координату центра масс — через \mathbf{R} , запишем соответствующее неравенство:

$$x_{ij} \ll R. \quad (3)$$

Поскольку взаимодействие атома с лазерным излучением рассматривается в дипольном приближении, действие поля на N отдельных электронов полностью эквивалентно действию поля на квазичастицу с зарядом Ne , помещенную в точку \mathbf{R} . Что же касается взаимодействия этой квазичастицы с кулоновским полем атомного остова, то здесь погрешность имеет величину $\sim (x_{ij}/R)^2$, которая мала в силу принятого неравенства (3).

Проблема, которую необходимо решить для математического описания рассматриваемой модели, аналогична той, которая возникает, например, в теории α -распада ядер. Именно, требуется из одночастичных волновых функций системы в начальном состоянии сформировать волновую функцию квазичастицы $\Psi_{\{\nu lm\}}^{(N)}(\mathbf{R}, \{\mathbf{x}_i\})$ на больших расстояниях от системы-остатка (символы в фигурных скобках означают наборы квантовых чисел или координат отдельных частиц). Для решения этой проблемы рассмотрим асимптотику функции $\Psi_{\{\nu lm\}}^{(N)}$ при $R \rightarrow \infty$, являющейся произведением асимптотик одноэлектронных функций (1). Нетрудно видеть, что радиальные зависимости функций (1) вносят в асимптотику $\Psi_{\{\nu lm\}}^{(N)}$ множитель

$$\exp\left(-\frac{NR}{b}\right) \left(\frac{R}{b}\right)^{N(\nu-1)}$$

Для получения угловой зависимости конкретизируем схему введения переменных $\mathbf{R}, \{\mathbf{x}_i\}$. Поскольку в линейно поляризованном поле задача является осесимметричной, у невзаимодействующих электронов сохраняются проекции орбитальных моментов на направление поляризации. Поэтому азимутальные углы φ_i удобно оставить такими же,

как в исходной сферической системе координат с центром в ядре атома. Замена переменных будет касаться только модулей $\{r_i\}$ и полярных углов $\{\theta_i\}$. Поведение полиномов Лежандра, входящих в сферические функции (1), при $\theta \rightarrow 0$ определяется формулой

$$P_l^{|m|}(\cos \theta_i) \sim (-1)^{|m|} \frac{(l + |m|)! \sin^{|m|} \theta_i}{(l - |m|)! 2^{|m|} |m|!} = (-1)^{|m|} \frac{(l + |m|)! (r_i^2 - r_{iz}^2)^{|m|/2}}{(l - |m|)! 2^{|m|} |m|! r_i^{|m|}}.$$

Делая здесь замену $r_i \rightarrow R$, $r_{iz} \rightarrow R_z$ и вводя параболические координаты центра масс сгустка $\xi = R + R_z$, $\eta = R - R_z$, можно записать асимптотику N -электронной функции при $\xi \gg \eta$:

$$\Psi_{\{\nu l m\}}^{(N)}(\mathbf{R}, \{\mathbf{x}_i\}) = B \phi(\xi, \eta) \chi(\{r_i, \theta_i\}) \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im_j \varphi_j),$$

$$B = a^{-3/2} C_{\nu l}^N \left(\frac{Z}{\nu}\right)^{3N/2} \left(l + \frac{1}{2}\right)^{N/2} \prod_{j=1}^N \frac{(-1)^{|m_j|}}{|m_j|!} \left[\frac{(l + |m_j|)!}{(l - |m_j|)!}\right]^{1/2}, \quad (4)$$

$$\phi(\xi, \eta) \sim \exp\left[-\frac{N(\xi + \eta)}{2b}\right] \left(\frac{\xi}{2b}\right)^{N(\nu-1)} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{M/2}, \quad M = \sum_{j=1}^N |m_j|.$$

Здесь χ — волновая функция внутреннего движения электронов в сгустке, нормированная на единицу, причем среди $2N$ переменных $\{r_i, \theta_i\}$ независимых только $2(N - 1)$. Функция $\phi(\xi, \eta)$ описывает движение центра масс сгустка.

3. ВЕРОЯТНОСТЬ ТУННЕЛЬНОГО ЭФФЕКТА

Дальнейшее вычисление вероятности туннельного эффекта проводится по обычной схеме [17, 27] с учетом того, что масса электронного сгустка равна $N\mu$, а его заряд $-Ne$. Подставляя функцию $\phi(\xi, \eta)$ в уравнение Шредингера, описывающее движение по параболической координате ξ при $\xi \rightarrow \infty$,

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\phi}{d\xi} \right) + \left(\beta - \frac{E_N N \mu}{2\hbar^2} \xi \right) \phi = 0,$$

найдем постоянную разделения переменных:

$$\beta = \frac{N}{b} \left[N(\nu - 1) - \frac{M - 1}{2} \right]. \quad (5)$$

При этом центробежным потенциалом пренебрегаем, поскольку он быстро затухает при $\xi \rightarrow \infty$.

Считая теперь внешнее поле $F(t)$ медленно меняющимся, примем квазиклассическое приближение для волновой функции $\phi_F(\xi, \eta)$, описывающей движение центра масс электронного сгустка в поле. В подбарьерной области

$$\phi_F(\xi, \eta) = \kappa \left(\frac{\xi |p(\xi)|}{\hbar} \right)^{-1/2} \exp \left(\frac{1}{\hbar} \int_{\xi_1}^{\xi} |p(\xi)| d\xi \right), \quad (6)$$

$$p(\xi) = \hbar \left(-\frac{E_N N \mu}{2\hbar^2} + \frac{\beta}{\xi} + \frac{1}{4\xi^2} + \frac{N^2 e \mu}{4\hbar^2} F \xi \right)^{1/2}, \quad (7)$$

где ξ_1 — бóльший корень уравнения $p(\xi) = 0$. Сравнивая выражение (6) с функцией $\phi(\xi, \eta)$ из (4) в точке ξ_0 , лежащей в интервале

$$\frac{2\hbar^2 \beta}{E_N N \mu} \simeq b \ll \xi_0 \ll \frac{2E_N}{NeF} = \frac{eZ}{b\nu F}, \quad (8)$$

найдем величину κ :

$$\kappa(\eta; \xi_0) \simeq \left(\frac{N\xi_0}{2b} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_{\xi_0}^{\xi_1} |p(\xi)| d\xi \right) \phi(\xi_0, \eta). \quad (9)$$

Условие существования интервала (8) приводит к ограничению на внешнее поле

$$F \ll F_a \equiv \frac{eZ}{b^2\nu} = \frac{e}{a^2} \left(\frac{Z}{\nu} \right)^3, \quad (10)$$

которое отличается от условия, возникающего при описании одноэлектронного туннельного эффекта, лишь определением величины ν . Следует отметить, что если число ν существенно превышает единицу, что имеет место, в частности, для ридберговских состояний, то неравенство (10) заменяется на более сильное,

$$F < \frac{Z^3 e}{16\nu^4 a^2}, \quad (11)$$

следующее из условия существования потенциального барьера [28].

Формулы (6) и (9) определяют функцию $\phi_F(\xi, \eta)$ за барьером, для квадрата модуля которой, учитывая неравенства (8), имеем [27]

$$|\phi_F(\xi, \eta)|^2 = \frac{\hbar N \xi_0}{2b\xi p(\xi)} \left(\frac{\xi_0}{2b} \right)^{2N(\nu-1)} \left(\frac{\eta}{\xi_0} \right)^M \times \\ \times \exp \left[-\frac{N\eta}{b} - \frac{16\hbar^2}{3N^2 \mu e F} \left(\frac{E_N N \mu}{2\hbar^2} \right)^{3/2} - \beta \left(\frac{2\hbar^2}{E_N N \mu} \right)^{1/2} \ln \frac{NeF\xi_0}{8E_N} \right]. \quad (12)$$

Используя соотношения (2) и (5), нетрудно убедиться, что зависимость от произвольного параметра ξ_0 в формуле (12) фактически исчезает:

$$|\phi_F(\xi, \eta)|^2 = \frac{\hbar N (\eta/b)^M}{2^M \xi p(\xi)} \left(\frac{2F_a}{F} \right)^{2N(\nu-1)-M+1} \exp \left(-\frac{N\eta}{b} - \frac{2NF_a}{3F} \right). \quad (13)$$

Вероятность ионизации определяется потоком плотности вероятности (13) через плоскость, перпендикулярную оси z [27]:

$$W_{\nu l}^{(N)}(F) \sim 2\pi \int_0^{\infty} v_z |\phi_F(\xi, \eta)|^2 \rho d\rho, \quad v_z = \frac{2p(\xi)}{N\mu}, \quad \rho = \sqrt{\xi\eta}, \quad d\rho \simeq \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} d\eta.$$

Подставляя сюда формулы (4) и (13), получим

$$W_{\nu l}^{(N)}(F) = \frac{\pi\hbar}{a^2\mu} \frac{M!(l+1/2)^N C_{\nu l}^{2N}}{2^{M-2} N^{M+1}} \left(\frac{Z}{\nu}\right)^{3N-1} \prod_{j=1}^N \frac{(l+|m_j|)!}{(|m_j|!)^2 (l-|m_j|)!} \times \\ \times \left(\frac{2F_a}{F}\right)^{2N(\nu-1)-M+1} \exp\left(-\frac{2NF_a}{3F}\right). \quad (14)$$

Эта формула определяет вероятность N -электронного туннельного эффекта в постоянном поле с точностью до фактора перекрытия волновых функций оставшихся в атоме электронов с волновыми функциями этих же электронов в начальном состоянии. Очевидно, что этот фактор не может превышать единицу, более точная его оценка может быть проведена лишь численно. Заметим, что множитель N в показателе экспоненты в (14) отнюдь не исчерпывает зависимость этого показателя от N , как считается в [21]. В силу формул (2), (10) зависимость от N является значительно более сложной, она определяется спектром конкретного атома. Ниже (рисунок) приводится численный пример, иллюстрирующий это положение.

Будем теперь считать, что

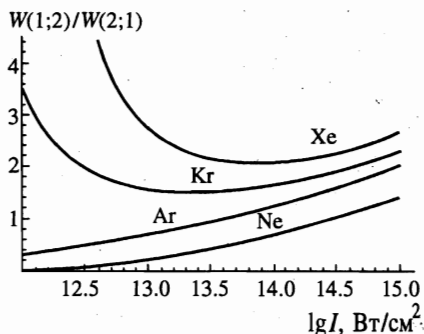
$$F(t) = F_0 \cos(\omega t), \quad (15)$$

где ω — частота лазерного поля. Как известно, туннельный эффект в лазерном поле возможен при малости параметра Келдыша [29]

$$\gamma = \frac{\sqrt{2\mu E_1}}{eF} \omega,$$

где E_1 — энергия связи одного электрона. Повторяя все выкладки работы [29] для «частицы» с массой $N\mu$ и зарядом $-Ne$, легко увидеть, что N -электронный туннельный эффект возможен при малости параметра

$$\gamma_N = \frac{\sqrt{2\mu E_N/N}}{eF} \omega. \quad (16)$$



Отношение вероятностей образования трехзарядных ионов атомов благородных газов по двум разным каналам (см. текст).

Поскольку энергия отрыва от атома каждого последующего электрона возрастает, для реализации N -электронного туннельного эффекта требуются меньшие поля, чем для N -электронного туннельного каскада.

Подставляя (15) в (14), усредним получаемое выражение по времени в интервале $t \in [-\pi/2\omega, \pi/2\omega]$ [18]¹⁾. Вследствие неравенства (10) возникающий интеграл можно вычислить методом перевала. При выполнении условия (11) перевальной точкой является значение $t = 0$, и в результате получаем окончательную формулу:

$$W_{\nu l}^{(N)}(F_0) = \frac{\sqrt{3\pi\hbar}}{a^2\mu} \frac{M!(l+1/2)^N C_{\nu l}^{2N}}{2^{M-3/2} N^{M+3/2}} \left(\frac{Z}{\nu}\right)^{3N-1} \prod_{j=1}^N \frac{(l+|m_j|)!}{(|m_j|!)^2 (l-|m_j|)!} \times \\ \times \left(\frac{2F_a}{F_0}\right)^{2N(\nu-1)-M+1/2} \exp\left(-\frac{2NF_a}{3F_0}\right). \quad (17)$$

Повторим, что зависимость показателя экспоненты от N в (17) не сводится к множителю N , выписанному явно.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

К сожалению, полученные формулы не могут быть непосредственно связаны с экспериментом, поскольку наряду с вероятностью прямого образования N -зарядных ионов существует много каскадных каналов, а также механизмы ионизации, обусловленные неупругими столкновениями электронов и ионов [9–11]. Для сопоставления теории с экспериментом необходимо решение соответствующих кинетических уравнений, что должно быть предметом отдельной работы. Поэтому в данном разделе рассматриваются лишь несколько иллюстративных примеров.

На рисунке представлено отношение вероятностей образования трехзарядных ионов атомов благородных газов в результате двухкаскадных процессов: $A \rightarrow A^+ \rightarrow A^{3+}$ и $A \rightarrow A^{2+} \rightarrow A^{3+}$. Эти вероятности обозначены через $W(1; 2)$ и $W(2; 1)$ соответственно. Они одинаково зависят от длительности лазерного импульса. Как видно, отношение $W(1; 2)/W(2; 1)$ не равно единице, как следует из результатов работы [21].

Любопытным представляется также следующий результат: вероятности двухэлектронного туннельного эффекта для нейтральных атомов могут быть большими вероятностей одноэлектронного туннельного эффекта в соответствующих однозарядных ионах. Так, для атома Ag вероятность двухэлектронного процесса превышает вероятность одноэлектронного процесса для иона Ag^+ начиная с интенсивностей $I > 10^{14.88}$ Вт/см², для Kг — при $I > 10^{14.76}$ Вт/см²; для Хе — при $I > 10^{14.34}$ Вт/см². В то же время для легких атомов благородных газов Ne и Ne вероятности одноэлектронного туннельного эффекта в соответствующих однозарядных ионах примерно на два порядка больше вероятностей двухэлектронного процесса в нейтралах в поле $I \simeq 10^{15}$ Вт/см². Эти факты свидетельствуют о богатстве возможных экспериментальных ситуаций, возникающих при многофотонном туннельном эффекте.

¹⁾ Значения $t \in [\pi/2\omega, 3\pi/2\omega]$ приводят к $F(t) < 0$, и туннелирование происходит в направлении отрицательной полуоси z .

Данная работа была стимулирована докладом [20]. Автор благодарен проф. W. Sandner за проявленный интерес к работе, а WE-Heraeus-Stiftung — за предоставленную возможность участвовать в работе семинара. Выражаю также глубокую благодарность Н. Б. Делоне и участникам руководимого им семинара в ИОФ РАН за полезное обсуждение. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-02-18035).

Литература

1. В. В. Суран, И. П. Запесочный, Письма в ЖТФ 1, 973 (1975).
2. N. B. Delone, V. V. Suran, and B. A. Zon, in *Multiphoton Ionization of Atoms*, eds. by S. L. Chin and P. Lambropoulos, Academic Press (1984), p. 235.
3. L. F. DiMauro and P. Agostini, *Adv. At. Mol. Phys.* 35, 79 (1995).
4. K. C. Kulander, *Phys. Rev. A* 36, 2726 (1987); 38, 778 (1988).
5. C. A. Ullrich, U. J. Goosman, and E. K. U. Gross, *Phys. Rev. Lett.* 74, 872 (1995).
6. P. Maragakis and P. Lambropoulos, *Laser Phys.* 7, 679 (1997).
7. F. H. M. Faisal, *Phys. Lett. A* 187, 180 (1994). A. Becker and F. H. M. Faisal, *Phys. Rev. A* 50, 3256 (1994); *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 29, L197 (1996). F. H. M. Faisal and A. Becker, *Laser Phys.* 7, 684 (1996); F. H. M. Faisal, A. Becker, and J. Muth, in *Report on WE-Heraeus-Seminar «Strong Field Phenomena»*, Berlin (1998).
8. P. A. Golovinski, *Laser Phys.* 7, 655 (1997).
9. K. Boyer and C. K. Rhodes, *Phys. Rev. Lett.* 54, 1490 (1985).
10. М. Ю. Кучиев, Письма в ЖЭТФ 45, 319 (1987). M. Yu. Kuchiev, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 28, 5093 (1995); *Phys. Lett. A* 212, 77 (1996).
11. P. B. Corkum, *Phys. Rev. Lett.* 71, 1994 (1993).
12. B. Walker, B. Sheely, L. F. DiMauro et al., *Phys. Rev. Lett.* 73, 1227 (1994).
13. S. Augst, A. Talebpour, S. L. Chin et al., *Phys. Rev. A* 52, R917 (1995).
14. A. Talebpour, C. Y. Chien, and S. L. Chin, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 29, 5725 (1996).
15. A. Talebpour, C. Y. Chien, Y. Liang et al., *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 30, 1721 (1997).
16. S. Larochelle, A. Talebpour, and S. L. Chin, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 31, 1201 (1998).
17. Б. М. Смирнов, М. И. Чибисов, ЖЭТФ 49, 841 (1965).
18. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ 50, 1393 (1966).
19. М. В. Аммосов, Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, ЖЭТФ 91, 2008 (1986).
20. U. Eichmann, H. Maeda, and W. Sandner, in *Report on WE-Heraeus-Seminar «Strong Field Phenomena»*, Berlin, (1998).
21. Б. Н. Захарьев, Изв. АН СССР, сер. физич. 47, 859 (1983).
22. D. Bates and A. Damgaard, *Phil. Trans. A* 242, 101 (1949).
23. P. Gombas, *Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik*, Basel (1950) (перевод: П. Гомбаш, *Проблема многих частиц в квантовой механике*, Изд-во иностр. лит., Москва (1952)).
24. И. И. Собельман, *Введение в теорию атомных спектров*, Наука, Москва (1977).
25. Б. А. Зон, ЖЭТФ 112, 115 (1997).
26. А. А. Радциг, Б. М. Смирнов, *Справочник по атомной и молекулярной физике*, Атомиздат, Москва (1980).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974), § 77, задача 1.
28. H. A. Bete and E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms*, New York (1957); (перевод: Г. Бете, Е. Солпитер, *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*, Физматгиз, Москва (1960)).
29. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ 45, 1945 (1964).