

ТЕПЛОВАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ АНОМАЛИЙ В НЕОДНОРОДНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СТРУКТУРАХ

А. М. Сатанин*, В. В. Скузоваткин

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603600, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 25 ноября 1998 г.

Исследован тепловой механизм подавления аномалий нелинейных характеристик неоднородных сред. Получено обобщенное выражение для эффективной нелинейной проводимости, которое позволяет учесть влияние теплоотода от горячих областей. Изучен характер расхождений в двумерных и трехмерных неоднородных структурах в зависимости от локальных параметров и микрогеометрии системы. Показано, что в критической области эффективная нелинейная проводимость среды может существенно превышать проводимость компонент.

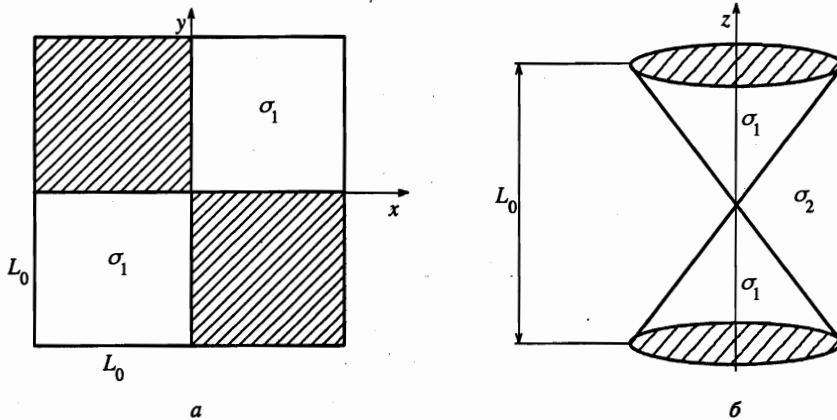
1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные электрические свойства случайно-неоднородных и периодических структур могут существенно отличаться от свойств их компонент. Такое отличие обусловлено тем, что эффективные характеристики определяются не только свойствами микрокомпонент, но также зависят от локального распределения полей и токов в среде. В последнее время было обнаружено, что эффективные нелинейные характеристики могут оказаться аномально чувствительными к микроструктуре вещества [1]. Ранее это было продемонстрировано в серии экспериментов, например, в [2] измерялась амплитуда третьей гармоники $V_{3\omega}$ на металлических пленках вблизи перехода металл — диэлектрик. Было показано, что критические индексы концентрационной зависимости $V_{3\omega}$ не универсальны: они зависят от метода приготовления пленок, т. е. от микроструктуры вещества. Резкое усиление нелинейных эффектов и их неуниверсальное поведение вблизи порога протекания продемонстрированы в [3–5].

Появление аномалий связывается с разогревом электронного газа в локальных областях, в которых ток просачивается через узкие перемычки, образованные плохо проводящим материалом. Именно области, где происходит концентрация поля и тока, дают основной вклад в нелинейные эффективные характеристики, например, в нелинейную проводимость, амплитуду третьей гармоники и коэффициент $1/f$ -шума [2, 3, 6, 7]. Очевидно, что локальное распределение температуры и условия теплообмена могут существенно повлиять на нелинейный отклик среды.

В данной работе исследуется влияние теплоотода (теплопроводности и теплообмена) на нелинейные свойства периодических структур. В качестве примера двумерной структуры изучается периодическая решетка типа «шахматной доски». В трехмерном

*E-mail: satanin@phys.unn.runnet.ru



Геометрия рассматриваемой структуры: *a* — фрагмент двумерной двухкомпонентной структуры, *б* — фрагмент касания двух конических участков в трехмерной среде

случае рассматривается упаковка чередующихся кубов, у которых окрестности соприкосновения смежных кубов аппроксимируются двумя конусами с «хорошей» проводимостью. Мы обобщим результаты работ [8–11], принимая во внимание теплопровод от «горячих» областей. Будут найдены условия, при которых нелинейный отклик определяется малыми сингулярными областями, и продемонстрирована роль теплового механизма стабилизации аномалий среды.

2. МОДЕЛЬ СТРУКТУРЫ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Геометрия двумерной структуры представлена на рис. *a*. Темным участкам соответствует проводимость σ_1 и теплопроводность κ_1 (металл), а светлым — σ_2 и κ_2 (диэлектрик). В трехмерных средах наиболее сингулярны области, образованные соприкосновением пирамидальных или конических областей. Мы будем обсуждать особенности в рамках точно решаемой модели, геометрия которой изображена на рис. *б*, внутренние области конусов имеют проводимость σ_1 и теплопроводность κ_1 (металл), а внешние — σ_2 и κ_2 (диэлектрик). Здесь мы предполагаем, что рассматриваемая структура (рис. *б*) представляет собой лишь фрагмент некоторой трехмерной решетки. Характерный размер элементарной ячейки как в двумерном, так и в трехмерном случае обозначим L_0 .

Электрический ток в структурах описывается выражением

$$\mathbf{j} = \sigma(T)\mathbf{e}, \tag{1}$$

где σ — функция, зависящая от температуры T . В отсутствие нагрева при $T = T_0$ (T_0 — равновесная температура среды) $\sigma(T_0)$ — периодическая функция, принимающая значения σ_1 и σ_2 в смежных областях. Ток и поле подчиняются уравнениям

$$\text{div } \mathbf{j} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{e} = 0 \tag{2}$$

и условиям на границах областей с разной проводимостью

$$(\mathbf{jn})_1 = (\mathbf{jn})_2, \quad (\epsilon \mathbf{e})_1 = (\epsilon \mathbf{e})_2, \tag{3}$$

где \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — нормальный и касательный векторы к границе раздела сред.

Эффективные характеристики неоднородной среды могут быть определены из выражения для усредненной по объему диссипации энергии

$$\langle \mathbf{j}\mathbf{e} \rangle = \sigma_e \mathbf{E}^2 + \chi_e \mathbf{E}^4 + \dots, \quad (4)$$

где мы произвели разложение (4) по степеням среднего поля $\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle$. В (4) использовано обозначение $\langle (\dots) \rangle$ для усреднения по объему (или площади) системы. Ниже мы ограничимся изучением кубической нелинейности. Разложение (4) справедливо, когда нелинейные поправки в известном смысле малы. Чтобы это имело место, необходимо выполнение неравенства $\sigma_e \gg \chi_e E^2$, которое будет справедливо, если соответствующим образом уменьшить среднее поле в образце. Такое ограничение означает, что мы находимся в режиме слабой нелинейности, а рост эффективной нелинейной проводимости означает сужение области линейной связи. В случае локальной связи между током и полем $\mathbf{j} = \sigma_e + \chi_e \mathbf{e}^2$ из выражения (4) можно показать (основываясь на теореме Телледжена [12]), что эффективная нелинейная проводимость χ_e определяется коррелятором четвертого порядка поля в линейной среде

$$\chi_e \mathbf{E}^4 = \langle \chi \mathbf{e}^4 \rangle \quad (5)$$

(обоснование приведено в [13, 14]). Из (5) следует, что эффективная проводимость будет обусловлена областями, которые дают основной вклад в интеграл $\int \chi \mathbf{e}^4 d\mathbf{r}$. Как было показано в [8–15], решения уравнений (1)–(3) в линейном случае имеют особенности вблизи микросужений, что приводит к росту выделения джоулева тепла. Поскольку функция $\langle \mathbf{j}\mathbf{e} \rangle$ пространственно неоднородна, вблизи особенностей возникают большие градиенты температуры. При этом следует учитывать теплообмен и неоднородное распределение температуры в системе. В свою очередь для вычисления эффективной нелинейной проводимости необходимо обобщить соотношение (5), которое ранее было получено для локальной связи между температурой и полем. Нелокальная связь между током и полем может качественно изменить характер сингулярностей.

Стационарное распределение температуры в среде описывается уравнением

$$-\nabla \kappa \nabla T = -\alpha(T - T_0) + \langle \mathbf{j}\mathbf{e} \rangle, \quad (6)$$

где κ — коэффициент теплопроводности, принимающий значения κ_1, κ_2 в различных компонентах, а α — коэффициент теплообмена, который также может быть различным в разных секторах.

При определении температуры в двумерной среде будем дополнительно учитывать теплообмен между пленкой и подложкой. Для этого используем модель, согласно которой поток тепла в подложку пропорционален разности температур пленки и подложки. Предполагается, что температура массивной подложки постоянна и равна T_0 . В рамках сделанных предположений уравнение для температуры формально имеет такой же вид, как и (6), где α — суммарный коэффициент теплообмена.

На границе секторов T удовлетворяет уравнениям

$$T_1 = T_2, \quad (\kappa \mathbf{n} \nabla T)_1 = (\kappa \mathbf{n} \nabla T)_2. \quad (7)$$

При заданной зависимости $\sigma(T)$ уравнения (1)–(7) определяют распределения электрического поля и температуры в неоднородной среде.

Нелинейные полевые слагаемые в выражении для тока возникают вследствие зависимости проводимости $\sigma(T)$ от температуры, которая определяется электрическим полем согласно (6). Ограничимся случаем кубической нелинейности. В указанном приближении можно положить

$$\sigma(T) = \sigma(T_0) + \beta \delta T, \quad (8)$$

где $\beta = \partial\sigma(T_0)/\partial T$, $\delta T = T - T_0$. Решение уравнения (6) записывается в виде

$$\delta T(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^2(\mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') \kappa^{-1}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (9)$$

где $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция Грина уравнения теплопроводности (6). Используя (8) и (9), левую часть (4) перепишем в виде

$$\langle (\sigma(T_0) + \beta \delta T) e^2 \rangle = \sigma_e E^2 + \frac{1}{V} \int \beta(\mathbf{r}) e^2(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^2(\mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') \kappa^{-1}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (10)$$

где V — объем (или площадь) системы. Сравнивая выражения (10) и (4), а также принимая во внимание теорему Телледжена, получим обобщенное соотношение для эффективной нелинейной проводимости в виде

$$\chi_e = \frac{1}{E^4 V} \int \beta(\mathbf{r}) e^2(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^2(\mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') \kappa^{-1}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (11)$$

где, как и в (5), справа стоит электрическое поле в линейной среде. Как следует из (9), при учете теплопроводности связь между температурой и электрическим полем становится нелокальной. Очевидно, что нелокальность приведет к уменьшению вклада сингулярных областей в эффективную нелинейную проводимость. Однако влияние теплопроводности может быть подавлено за счет большого теплообмена, когда слагаемое $-\nabla \kappa \nabla T$ в уравнении (6) мало по сравнению со слагаемым, учитывающим теплообмен. В этом случае $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ведет себя как $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и выражение (11) переходит в (5). Более детально предельные случаи будут изучены в следующем разделе.

3. ТЕПЛОВАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ АНОМАЛИЙ

Как видно из решения уравнений (2) и (3), микросужения в неоднородной среде приводят к фокусировке линий электрического поля и тока [8–11]. Следствием этого будет рост тепловыделения вблизи сингулярных областей. Нетрудно показать, что асимптотики распределения температуры не могут существенно зависеть от скачков коэффициентов теплопроводности и теплообмена. Мы продемонстрируем это путем точного решения уравнения (6) в Приложении В. Интересуясь характером расходимостей и механизмом стабилизации аномалий, ниже мы положим, что коэффициенты теплопроводности κ и теплообмена α в каждой области одинаковы, и вычислим эффективную нелинейную проводимость χ_e в первом порядке по нелинейности.

Как видно из уравнения (6), при учете теплопроводности и теплоотода в задаче появляется новый пространственный масштаб $L = \sqrt{\kappa/\alpha}$. Мы будем предполагать, что L много меньше размера элементарной ячейки L_0 . Нас будет интересовать характер обрезания аномалий эффективных характеристик. Мы покажем, что если в системе имеется малый параметр $L \ll L_0$, то в критической области может быть найден основной

вклад в эффективную нелинейную проводимость, который определяется лишь малыми сингулярными областями вблизи микронеоднородностей среды.

3.1. Нелинейная проводимость пленки

Электрическое поле и ток в линейном случае для решетки типа «шахматной доски» вычислены в работах [15, 16]. Решение исходной системы уравнений (1)–(3) удобно записать в комплексном представлении. Для простоты ограничимся случаем, когда внешнее поле E направлено вдоль одной из диагоналей квадратов. При таком выборе направления E квадрат электрического поля в смежных ячейках определяется согласно

$$\begin{aligned} |e_1(z)|^2 &= \frac{AE^2}{\sigma_1} K^{4\gamma} |X(z)|^2, \\ |e_2(z)|^2 &= \frac{AE^2}{\sigma_2} K^{4\gamma} |X(iz^*)|^2, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$X(z) = \left[\frac{\text{cn}(Kz/L_0, k)}{\text{sn}(Kz/L_0, k) \text{dn}(Kz/L_0, k)} \right]^{2\gamma}, \quad z = x + iy, \tag{13}$$

$\text{sn}(\cdot)$, $\text{cn}(\cdot)$, $\text{dn}(\cdot)$ — эллиптические функции Якоби, — полный эллиптический интеграл с модулем k (для квадрата $k = 1/\sqrt{2}$, $= 1.8541$); L_0 — длина стороны квадратной ячейки. Параметр γ связан с h выражением

$$\text{tg}(\pi\gamma) = \frac{1-h}{2\sqrt{h}}, \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Постоянная A определяется согласно

$$A = \frac{(1+h)\sigma_1}{2\Gamma^2(\gamma)K^{4\gamma}}, \quad I(\gamma) = \frac{\pi^{3/2}}{2K \cos(\pi\gamma)} \left[\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \right]^{-1}, \tag{15}$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Из (12) видно, что электрическое поле имеет особенности в углах решетки, где происходит концентрация поля. Как уже подчеркивалось, нас интересует вклад от особых областей, причем мы будем полагать, что тепловая длина L будет мала по сравнению с постоянной решетки L_0 . В этом случае можно упростить выражение для поля. Раскладывая (12) в ряд по малому параметру r/L_0 , получим

$$e_i^2(r, \vartheta) = \frac{AE^2}{\sigma_i} \left(\frac{L_0}{r}\right)^{4\gamma} \left(1 - \frac{2}{3}\gamma \left(\frac{Kr}{L_0}\right)^4 \cos(4\vartheta)\right), \tag{16}$$

где r, ϑ — полярные координаты, $i = 1, 2$. Нетрудно показать, что квадратичный коррелятор поля, который определяет эффективную линейную проводимость, будет сходиться несмотря на расходимость поля при $r \rightarrow 0$. Однако локальное выражение для эффективной нелинейной проводимости (5) может расходиться при определенных параметрах системы. Это свойство свидетельствует об аномальном росте нелинейной проводимости. Отметим, что характер расходимости определяется параметром γ , который зависит от отношения линейных проводимостей $h = \sigma_2/\sigma_1$ согласно (14). Если пренебречь нелокальными эффектами и вычислить нелинейную проводимость исходя из

локального выражения (5) с использованием разложения (16), то χ_e будет расходиться при $\gamma \geq \gamma = 1/4$ или $h \leq h_c = (\sqrt{2} - 1)^2$ (см. [8–11]).

Изучим теперь влияние теплоотвода на указанную расходимость. Подставляя (16) в правую часть (6), в первом приближении получим уравнение для температуры в виде

$$\left(-\Delta + \frac{1}{L^2}\right) \delta T = \frac{A E^2}{\alpha L^2} \left(\frac{L_0}{r}\right)^{4\gamma}, \quad (17)$$

где $L = \sqrt{\kappa/\alpha}$ — тепловая длина. Относительно теплообмена предполагается, что $L \ll \ll L_0$. Функция Грина уравнения (17) хорошо известна:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{L}\right), \quad (18)$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда. Чтобы выполнить интегрирование в (9) по угловой переменной, удобно использовать разложение:

$$K_0\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{L}\right) = I_0\left(\frac{r}{L}\right) K_0\left(\frac{r'}{L}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\vartheta) I_n\left(\frac{r}{L}\right) K_n\left(\frac{r'}{L}\right) \quad \text{при } r < r', \quad (19)$$

где $I_n(x), K_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя (при $r > r'$ соответствующее разложение получается из (19) путем перестановки местами r и r' в правой части). Интегрируя по угловой переменной, получим следующее выражение для температуры

$$\delta T(r) = \frac{A E^2 L_0^{4\gamma}}{\alpha L^2} \left[K_0\left(\frac{r}{L}\right) \int_0^r I_0\left(\frac{t}{L}\right) t^{1-4\gamma} dt + I_0\left(\frac{r}{L}\right) \int_r^{L_0} K_0\left(\frac{t}{L}\right) t^{1-4\gamma} dt \right]. \quad (20)$$

Исследуем асимптотики полученного решения. Чтобы найти выражение для δT на малых расстояниях, когда $r \ll L$, второй интеграл в правой части (20) запишем в виде

$$\int_r^{L_0} K_0\left(\frac{t}{L}\right) t^{1-4\gamma} dt = \int_0^{L_0} K_0\left(\frac{t}{L}\right) t^{1-4\gamma} dt - \int_0^r K_0\left(\frac{t}{L}\right) t^{1-4\gamma} dt. \quad (21)$$

После этого в первом интеграле можно положить $L_0 \rightarrow \infty$ (принимая во внимание свойства функции Бесселя и то, что $L_0/L \gg 1$), а в оставшихся интегралах в (20) можно использовать асимптотическое разложение функций Бесселя при малых значениях аргумента:

$$I_0(x) \sim 1, \quad K_0(x) \sim -\ln x.$$

В результате находим

$$\delta T(r) = \frac{A E^2}{\alpha} \left(\frac{L_0}{L}\right)^{4\gamma} \left[\frac{\Gamma^2(1-2\gamma)}{2^{4\gamma}} - \frac{1}{4(1-2\gamma)^2} \left(\frac{r}{L}\right)^{2(1-2\gamma)} \right]. \quad (22)$$

Из полученного выражения следует, что оно расходится только при $h \rightarrow 0$, когда $\gamma \rightarrow 1/2$.

На расстояниях $r \gg L$ распределение T обусловлено в основном теплообменом. В этой области температура пропорциональна величине выделяемого джоулева тепла:

$$T \propto (\sigma/\alpha)e^2.$$

Этот результат можно получить из (20) путем использования асимптотического разложения для функций Бесселя при $r \gg L$:

$$K_n\left(\frac{r}{L}\right) \sim \sqrt{\frac{\pi L}{2r}} \exp\left(-\frac{r}{L}\right), \quad I_n\left(\frac{r}{L}\right) \sim \sqrt{\frac{L}{2\pi r}} \exp\left(\frac{r}{L}\right). \quad (23)$$

Выражение (20) приводится к виду

$$\delta T(r) \approx \frac{AE^2}{\alpha} \left(\frac{L_0}{r}\right)^{4\gamma}. \quad (24)$$

Как видно из (24), температура быстро стремится к T_0 , что оправдывает использование асимптотического разложения для поля при вычислении коррелятора на расстояниях $L_0 \gg r \gg L$.

Рассмотрим теперь поведение эффективной нелинейной проводимости. Используя решение (20), можно переписать (11) в виде

$$\chi_e = \frac{\pi A^2 L_0^{8\gamma-2}}{\alpha L^2} \left(\frac{\beta_1}{\sigma_1} + \frac{\beta_2}{\sigma_2}\right) \times \left[\int_0^{L_0} dr r^{1-4\gamma} \left(K_0\left(\frac{r}{L}\right) \int_0^r I_0\left(\frac{t}{L}\right) t^{1-4\gamma} dt + I_0\left(\frac{r}{L}\right) \int_r^{L_0} K_0\left(\frac{t}{L}\right) t^{1-4\gamma} dt \right) \right]. \quad (25)$$

Представим эффективную нелинейную проводимость в виде суммы двух слагаемых $\chi_e^<$ и $\chi_e^>$, обусловленных вкладом в χ_e соответственно областей $r < L$ и $r > L$. Оценим вклад, возникающий от области $r < L$. Выражение в круглых скобках в (25) при малых r вычисляется подобно тому, как это было сделано при расчете (20), а интегрирование в (25) по r в интервале $0 \leq r \leq L$ дает

$$\chi_e^< \sim \frac{A^2}{16\alpha(1-2\gamma)} \left(\frac{\beta_1}{\sigma_1} + \frac{\beta_2}{\sigma_2}\right) \left(\frac{L}{L_0}\right)^{2(1-4\gamma)} \left[2^{3-4\gamma} \Gamma^2(1-2\gamma) - \frac{1}{(1-2\gamma)^2} \right]. \quad (26)$$

Для оценки вклада от области $r > L$ подставим в (25) асимптотическое разложение функций Бесселя при больших значениях аргумента (23). Интегрируя по r в (25) в пределах $L \leq r \leq L_0$, находим

$$\chi_e^> \sim \frac{A^2}{\alpha} \left(\frac{\beta_1}{\sigma_1} + \frac{\beta_2}{\sigma_2}\right) \frac{1}{2(1-4\gamma)} \left[1 - \left(\frac{L}{L_0}\right)^{2(1-4\gamma)} \right]. \quad (27)$$

Заметим, что выражение (27) можно получить непосредственно из (11), поскольку при интегрировании в (11) по области $r \gg L$ аргумент $|r - r'|$ в функции Грина (18) всегда много больше величины L и, следовательно, функция $K_0(|r - r'|/L)$ ведет себя как $2\pi L^2 \delta(r - r')$. Заменяя в (11) функцию Грина выражением $-L^2 \delta(r - r')$ и интегрируя по $r > L$, снова приходим к (27).

Обсудим зависимость эффективной нелинейной проводимости от величины теплообмена, т. е. от параметра L . Рассмотрим сперва случай, когда отношение линейных проводимостей ячеек $h > h_c$ или когда $\gamma < 1/4$. Если тепловая длина стремится к нулю, то вклад в нелинейную проводимость от (26) исчезает, а (27) принимает вид

$$\chi_e^> \sim \frac{A^2}{\alpha} \left(\frac{\beta_1}{\sigma_1} + \frac{\beta_2}{\sigma_2} \right) \frac{1}{2(1-4\gamma)}. \quad (28)$$

Это выражение совпадает с результатом, полученным в работах [9, 10]. Как следует из (28), в этом случае имеет место степенная расходимость эффективной нелинейной проводимости, когда $h \rightarrow h_c$ ($\gamma \rightarrow 1/4$).

Пусть теперь тепловая длина L фиксирована, а $h \rightarrow h_c$. Легко видеть, что при $h \rightarrow h_c$ функция (27) ведет себя как

$$\chi_e^> \sim \frac{A^2}{\alpha} \left(\frac{\beta_1}{\sigma_1} + \frac{\beta_2}{\sigma_2} \right) \ln \left(\frac{L_0}{L} \right). \quad (29)$$

В случае, когда $h < h_c$, выражение

$$\chi_e^> \sim \frac{A^2}{\alpha} \left(\frac{\beta_1}{\sigma_1} + \frac{\beta_2}{\sigma_2} \right) \frac{1}{2(4\gamma-1)} \left(\frac{L_0}{L} \right)^{2(4\gamma-1)} \quad (30)$$

аномально велико, поскольку $L_0 \gg L$.

Если $L \neq 0$, то из (26) следует, что вклад в эффективную нелинейную проводимость, обусловленный областью $r < L$, расходится степенным образом только при $h \rightarrow 0$.

Мы использовали наиболее сингулярные слагаемые в разложении поля (16) для вычисления нелинейной проводимости. Оценим теперь вклад отброшенных слагаемых. Поправку к χ_e , связанную со вторым слагаемым в выражении (16), обозначим $\delta\chi_e$; $\delta\chi_e = \delta\chi_e^< + \delta\chi_e^>$. В области $r \ll L_0$ поправка к квадрату электрического поля мала по параметру r/L_0 . При вычислении $\delta\chi_e^<$ интегрирование ведется по области $r < L$, в этом случае $\delta\chi_e^<$ будет мало по параметру L/L_0 . Выражение для $\delta\chi_e^>$ находится аналогично (27):

$$\delta\chi_e^> \sim \frac{9\pi\gamma^2 K^8 A^2}{25\alpha} \left(\frac{\beta_1}{\sigma_1} + \frac{\beta_2}{\sigma_2} \right) \frac{1 - (L/L_0)^{2(5-4\gamma)}}{5-4\gamma} \sim \frac{9\pi\gamma^2 K^8 A^2}{25\alpha(5-4\gamma)} \left(\frac{\beta_1}{\sigma_1} + \frac{\beta_2}{\sigma_2} \right). \quad (31)$$

Из полученных выражений (27) и (31) следует, что характер поведения эффективной нелинейной проводимости в критической области определяется параметром γ . При этом необходимо различать случаи $\gamma < 1/4$ и $\gamma > 1/4$. При $\gamma < 1/4$ ($h > h_c$) выполняется неравенство $\chi_e^< \ll \chi_e^>$, а $\chi_e \sim A^2 \beta_1 / (\sigma_1 \alpha)$. Что касается поправки $\delta\chi_e$, то она оказывается порядка χ_e . Это означает, что при вычислении χ_e по формуле (11) в общем случае необходимо интегрировать по всей площади элементарной ячейки и использовать точное выражение для электрического поля (12). Однако в критической области, когда $\gamma < 1/4$, но $\gamma \rightarrow 1/4$ или $\gamma > 1/4$, мы имеем соответственно

$$\chi_e \sim \frac{A^2 \beta_2}{\sigma_2 \alpha} \ln \left(\frac{L_0}{L} \right)$$

и

$$\chi_e \sim \frac{A^2 \beta_2}{\sigma_2 \alpha} \left(\frac{L_0}{L} \right)^{2(4\gamma-1)},$$

где для простоты считается, что основной вклад в нелинейную проводимость дает вторая компонента. При этом основной вклад в χ_e^2 дает область интегрирования $r \sim L$. Таким образом, поправки к нелинейной проводимости, возникающие при учете следующих членов в разложении квадратов полей, оказываются малыми в критической области.

3.2. Нелинейная проводимость трехмерной среды

В трехмерном случае мы ограничимся анализом среды с коническими особыми областями (см. рис. б). Электрическое поле вблизи вершины касания двух конусов вычислено в Приложении А. Квадрат напряженности электрического поля, определяющий диссипацию внутри и вне конусов, дается выражением

$$e^2(r, \vartheta) = \frac{AE^2}{\sigma(\vartheta)} \left(\frac{L_0}{r}\right)^{4\gamma} s(\vartheta), \tag{32}$$

$$s(\vartheta) = (f'(\vartheta))^2 + \lambda^2 f^2(\vartheta),$$

где величина $\sigma(\vartheta)$ равна σ_1 в области $\vartheta < \vartheta_0$ и σ_2 в области $\vartheta_0 < \vartheta < \pi/2$; E — амплитуда внешнего электрического поля; A — константа, зависящая от параметров структуры, функция $f(\vartheta)$ и ее производная $f'(\vartheta)$ описывают угловую зависимость решения (см. Приложение А); $\lambda = 1 - 2\gamma$.

Предварительно вычислим вклад в коррелятор $\langle \chi e^4 \rangle$, обусловленный особенностями тока в конической области без учета теплопроводности. Подставляя найденное решение для поля в (5), получим

$$\langle \chi e^4 \rangle = \frac{\text{const}}{L_0^3} \int_0^{L_0} dr r^2 r^{4(\lambda-1)} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \chi(\vartheta) s^2(\vartheta). \tag{33}$$

Из (33) следует, что интеграл расходится при $\lambda_c = 1/4$ или при $\gamma_c = 3/8$. Зная λ_c , из выражения (45) можно найти критическое значение параметра h_c как функции угла ϑ_0 . Для полноты укажем, что численное решение уравнения (45) дает следующие максимальные значения критических параметров: $h_c = 0.094$, $\vartheta_{0c} = 55.50$.

Учтем теперь влияние теплопроводности. Функция Грина уравнения (6) имеет вид

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{\exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/L)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

При вычислении T по формуле (9) используем следующее разложение для функции Грина:

$$\frac{\exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/L)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{rr'}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) I_{n+1/2}(r/L) K_{n+1/2}(r'/L) \quad \text{при } r < r' \tag{34}$$

(при $r > r'$ в (34) r и r' следует поменять местами). После подстановки (34) и (32) в (9) и интегрирования по угловой переменной получим

$$\delta T(r, \vartheta) = \frac{AE^2}{\alpha L^2} \frac{L_0^{4\gamma}}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta) Q_n \times$$

$$\times \left[K_{n+1/2} \left(\frac{r}{L}\right) \int_0^r I_{n+1/2} \left(\frac{t}{L}\right) t^{3/2-4\gamma} dt + I_{n+1/2} \left(\frac{r}{L}\right) \int_r^{L_0} K_{n+1/2} \left(\frac{t}{L}\right) t^{3/2-4\gamma} dt \right], \tag{35}$$

где $I_{n+1/2}(x)$ и $K_{n+1/2}(x)$ — функции Бесселя,

$$Q_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta P_n(\cos \vartheta) s(\vartheta).$$

Исследуем асимптотики полученного решения. На малых расстояниях, когда $r \ll L$, δT вычисляется аналогично (22):

$$\delta T(r, \vartheta) = \frac{AE^2}{\alpha} \left(\frac{L_0}{L}\right)^{4\gamma} \left(\frac{r}{L}\right)^{2-4\gamma} F(r, \vartheta), \quad (36)$$

где

$$F(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta) Q_n [n(n+1) - (3-4\gamma)(2-4\gamma)]^{-1} + \\ + \frac{\Gamma((3-4\gamma)/2)\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(3/2)} 2^{2(1-2\gamma)} Q_0 + \cos \vartheta Q_1 \frac{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma((1-4\gamma)/2)}{\Gamma(5/2)} 2^{2(1-2\gamma)} \left(\frac{r}{2L}\right) + \dots$$

При $r \gg L$, используя асимптотическое разложение функций Бесселя из (35), находим

$$\delta T(r, \vartheta) \sim \frac{AE_0^2}{\alpha} s(\vartheta) \left(\frac{L_0}{r}\right)^{4\gamma}. \quad (37)$$

Выражение (37) соответствует локальному пределу, поскольку при $r \gg L$, как это не сложно показать из (34) с использованием (23), функция Грина ведет себя приблизительно как $4\pi L^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Аналогично двумерному случаю, в этой области связь нелинейного тока с электрическим полем вследствие теплоотвода становится локальной.

Оценим значение эффективной нелинейной проводимости. Как и в случае пленки, представим χ_e в виде суммы вкладов от области $r < L$ и $r > L$. Основной вклад в $\chi_e^<$, возникающий за счет окрестности $r < L$, можно вычислить, подставляя асимптотики температуры (36) и электрического поля (32) в левую часть формулы (10) и интегрируя по объему в пределах выбранной области. В трехмерном случае квадрат электрического поля и температура зависят сложным образом от угловой переменной, что не позволяет точно вычислить интеграл по ϑ в выражении для χ_e . Однако аномальный рост величины эффективной проводимости определяется зависимостью от r электрического поля и температуры. Поэтому для приближенного вычисления χ_e достаточно рассмотреть интеграл по r , так как угловой интеграл дает несингулярный множитель порядка единицы. В результате получим

$$\chi_e^< \sim \frac{\beta_2 A^2 Q_0}{\sigma_2 \alpha (5-8\gamma)} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{3-8\gamma}. \quad (38)$$

Используя выражение (45) из Приложения А нетрудно показать, что знаменатель в (38) не может обращаться в нуль, когда параметры конусов подчиняются неравенствам

$$0 < h < 1, \quad 0 < \vartheta_0 < \pi/2.$$

Вклад от области $r > L$ найдем, подставляя (37), (32) в (10) и интегрируя в пределах $L < r < L_0$:

$$\chi_e^> \sim \frac{\beta_2 A^2 Q_0}{\sigma_2 \alpha (3 - 8\gamma)} \left[1 - \left(\frac{L}{L_0} \right)^{3-8\gamma} \right]. \quad (39)$$

Из (39) следует, что при $L = 0$ имеет место расходимость χ_e при конечном значении параметра h_c , который определяется из $\gamma_c = 3/8$. Если тепловая длина фиксирована, то в (39) происходит логарифмическое обрезание расходимости. Таким образом, как и в случае пленки, учет теплоотвода приводит к обрезанию расходимости.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Ранее было показано [8–11], что при локальной связи между током и полем эффективная нелинейная проводимость двухкомпонентных периодических решеток аномально велика вблизи порога протекания. На пороге протекания она расходится при конечном значении отношения линейных проводимостей $h = \sigma_2/\sigma_1$.

В данной работе исследован тепловой механизм обрезания расходимостей и показано, что учет теплоотвода от горячих областей может привести к устранению особенностей эффективных нелинейных характеристик при конечных значениях параметра h . Отметим, что геометрические эффекты обрезания аномалий обсуждались в [17].

Полученные результаты показывают, что критические значения h_c , обнаруженные в [8–11] для двумерных сред, и аналогичное значение h_c для трехмерной среды (рассмотренной в данной работе), во многом определяют поведение эффективной проводимости χ_e и при учете теплоотвода. Учет теплопроводности и теплоотвода приводит к тому, что в рассматриваемой проблеме появляется новый характерный масштаб — тепловая длина L , которая играет роль параметра обрезания особенностей. Вместе с тем в нелинейном режиме параметр L определяет пространственный размер критической области, которая является источником аномального роста эффективной нелинейной проводимости χ_e . При фиксированном значении L , когда $h \rightarrow h_c$, эффективная нелинейная проводимость χ_e превышает характерную нелинейную проводимость компонент χ_0 :

$$\chi_e \sim \chi_0 \ln(L_0/L),$$

где L_0 — период решетки. В критической области $h < h_c$ возникает большой параметр усиления эффективной нелинейной проводимости, $L_0/L \gg 1$. Так, в двумерном случае при $\gamma < 1/4$, согласно (26) и (27), эффективная нелинейная проводимость конечна, но ее величина превышает нелинейную проводимость компонент:

$$\chi_e \sim \chi_0 (L_0/L)^{2(4\gamma-1)}.$$

Аналогичное свойство имеет место и в трехмерном случае при $\gamma < 3/8$ (см. (38) и (39)); в случае конических особенностей

$$\chi_e \sim \chi_0 (L_0/L)^{8\gamma-3}.$$

Выше уже подчеркивалось, что физический механизм эффективного усиления нелинейности связан с фокусировкой линий тока и поля микросужениями («микромостиками») в неоднородной среде. Таким образом, эффективная нелинейная проводимость

в критической области (вблизи перехода металл — диэлектрик) определяется не только значениями нелинейных проводимостей компонент среды, но она существенным образом зависит также от распределения полей в среде. Указанное свойство необходимо принимать во внимание при проектировании искусственных нелинейных сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-02-16923а) и в рамках Программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (проект № 2480).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Электрическое поле вблизи конических особенностей

Найдем электрическое поле вблизи вершины касания двух конусов. Решение уравнений (2) будем искать в виде

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla \varphi, \quad (40)$$

где потенциал удобно записать как

$$\varphi = EL_0 \left(\frac{L_0}{r} \right)^{4\gamma} f(\vartheta),$$

а функция $f(\vartheta)$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} f + \lambda(\lambda + 1)f = 0. \quad (41)$$

Решение (41) при $\vartheta < \vartheta_0$ следует взять в виде

$$f_1 = aP_\lambda(\cos \vartheta), \quad (42)$$

где $P_\lambda(x)$ — функция Лежандра, а для углов $\vartheta_0 < \vartheta < \pi/2$ в виде

$$f_2 = b \left[\frac{1}{2} (1 - \cos(\pi\lambda)) P_\lambda(\cos \vartheta) + \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} Q_\lambda(\cos \vartheta) \right], \quad (43)$$

где $Q_\lambda(x)$ — функция Лежандра второго рода.

Функции f_1 и f_2 на поверхности конуса подчиняются граничным условиям

$$f(\vartheta_0)_1 = f(\vartheta_0)_2, \quad f'(\vartheta_0)_1 = hf'(\vartheta_0)_2, \quad (44)$$

где $f' = \partial f / \partial \vartheta$. Отметим, что решение в области углов ($\vartheta > \pi/2$) получается из (42) и (43) путем продолжения нечетным образом по углу (в силу граничных условий по внешнему полю). Подставляя (42) и (43) в граничные условия (44), нетрудно получить, что общее решение имеет место, если выполнено соотношение

$$\begin{aligned} hP_\lambda(x) \left[\frac{1}{2} (1 - \cos(\pi\lambda)) P_{\lambda+1}(x) + \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} Q_{\lambda+1}(x) - xF_\lambda(x) \right] = \\ = F_\lambda(x) [P_{\lambda+1}(x) - xP_\lambda(x)], \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$x = \cos \vartheta_0, \quad F_\lambda(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(\pi\lambda)) P_\lambda(x) + \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} Q_\lambda(x).$$

Уравнение (45) позволяет определить зависимость параметра λ от h и ϑ_0 .

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Распределение температуры в неоднородной решетке

Приведем решение уравнения (6) с граничными условиями (7) в случае, когда коэффициенты теплопроводности и теплообмена принимают различные значения в смежных секторах: κ_1, α_1 и κ_2, α_2 . Будем считать, что $\alpha_1/\kappa_1 = \alpha_2/\kappa_2$ (это соотношение имеет место для металлов). Как и в основном тексте статьи, введем длину $L = \sqrt{\kappa_1/\alpha_1}$. Уравнение для δT будет аналогично (17), но параметр α в правой части (17) теперь зависит от угловой переменной ϑ . Чтобы решить (17) с граничным условием (7), в данном случае δT удобно представить как

$$\delta T = \delta T_a + \delta T_b.$$

Здесь δT_a — распределение температуры, возникающее вследствие выделения джоулева тепла внутри секторов, δT_b возникает за счет появления источников тепла на границах сред с различным коэффициентом теплопроводности. Функция Грина уравнения (17) в однородном пространстве известна (см. (18)), поэтому

$$\delta T_a = \frac{L_0^{4\gamma}}{2\pi} \int K_0 \left(\frac{|r-r'|}{L} \right) \frac{AE^2}{\alpha(\vartheta')L^2} (r')^{-4\gamma} r' dr' d\vartheta', \tag{46}$$

$$\delta T_b = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^4 \int K_0 \left(\frac{r}{L}, \vartheta; \frac{r'}{L}, \vartheta_j \right) \rho(r') r' dr', \tag{47}$$

где $\rho(r)$ — плотность источников тепла на границах $\vartheta_1 = \pi/4, \vartheta_2 = 3\pi/4, \vartheta_3 = 5\pi/4$ и $\vartheta_4 = 7\pi/4$. При записи (47) учтена симметрия отражения относительно осей x и y для функции δT . Используя свойства функций Бесселя, из уравнения (47) можно получить следующее значение производной $\partial\delta T_b/\partial\vartheta$, например, для границы $\vartheta = \pi/4$:

$$\frac{\partial\delta T_b(r, \pi/4 + \delta)}{\partial\vartheta} = \frac{1}{2} \rho(r) r^2 \text{sign } \delta, \tag{48}$$

где $\delta \rightarrow 0$. Как и следовало ожидать, функция δT_b имеет скачок нормальной производной на границах, в то время как $\delta T_a, \delta T_b, \partial\delta T_a/\partial\vartheta$ непрерывны. Плотность источников $\rho(r)$ определяется из граничных условий (7). Если записать эти условия относительно $\delta T_a, \delta T_b$ и использовать (48), то получим

$$\rho(r) = 2 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial\delta T_a(r, \pi/4)}{\partial\vartheta}. \tag{49}$$

Подставляя в (49) выражение (47), приходим к выражению для плотности источников

$$\rho(r) = -\frac{AE^2 L_0^{4\gamma}}{\pi L^2} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{1}{r^2} \int_0^{L_0} \frac{t dt}{t^{4\gamma}} \left[K_0 \left(\frac{r+t}{L} \right) - K_0 \left(\frac{|r-t|}{L} \right) \right]. \tag{50}$$

Таким образом, формулы (46), (47) вместе с (50) представляют собой точное решение уравнения (17) с граничными условиями (7). Выражение (46) можно упростить, если

воспользоваться теоремой сложения для функций Бесселя и проинтегрировать в (46) по угловой переменной:

$$\begin{aligned} \delta T_a = & \frac{1}{2L^2} AE^2 L_0^{4\gamma} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \left[K_0 \left(\frac{r}{L} \right) \int_0^r \frac{t dt}{t^{4\gamma}} I_0 \left(\frac{t}{L} \right) + I_0 \left(\frac{r}{L} \right) \int_r^\infty \frac{t dt}{t^{4\gamma}} K_0 \left(\frac{t}{L} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{\pi L^2} AE^2 L_0^{4\gamma} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n(\pi/4 - \vartheta)) + \sin(2n(\pi/4 + \vartheta))}{n} \times \\ & \times \left[K_{2n} \left(\frac{r}{L} \right) \int_0^r \frac{t dt}{t^{4\gamma}} I_{2n} \left(\frac{t}{L} \right) + I_{2n} \left(\frac{r}{L} \right) \int_r^\infty \frac{t dt}{t^{4\gamma}} K_{2n} \left(\frac{t}{L} \right) \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

Рассмотрим асимптотики решения. На малых расстояниях $r \ll L$ в (51) (и в аналогичных разложениях (47) и (50)) основной вклад при интегрировании дает область малых r . Поэтому при вычислении интегралов, содержащих функции Бесселя, можно использовать приближенные соотношения

$$I_n(x) \sim (1/n!) x^n, \quad K_n(x) \sim ((n-1)!/2) (2/x)^n, \quad K_0(x) \sim -\ln x.$$

Проводя интегрирование, а затем суммирование в (51) (и в соответствующих представлениях (47) и (50)), получим

$$\begin{aligned} \delta T^{(k)}(r, \vartheta) = & \frac{AE_0^2}{2} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \frac{\Gamma^2(1-2\gamma)}{2^{4\gamma}} \left(\frac{L_0}{L} \right)^{4\gamma} - \\ & - \left(\frac{r}{L} \right)^{2-4\gamma} \left(\frac{L_0}{L} \right)^{4\gamma} \left(\frac{AE_0^2}{(2-4\gamma)^2 \alpha_k} + C_k \cos((2-4\gamma)(\vartheta_k - \vartheta)) \right), \end{aligned} \quad (52)$$

где $k=1$ соответствует области $-\pi/4 < \vartheta < \pi/4$, а $k=2$ — области $\pi/4 < \vartheta < 3\pi/4$; $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi/2$;

$$C_1 = AE_0^2 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{1}{(2-4\gamma)^2 \sin(\pi\gamma)}, \quad C_2 = -(\alpha_1/\alpha_2) C_1.$$

Решения в других секторах нетрудно получить, используя симметрию задачи. На расстояниях $r \gg L$ слагаемое $-\Delta\delta T$ в уравнении (17) пренебрежимо мало, поэтому

$$\delta T(r, \vartheta) = \frac{AE^2}{\alpha(\vartheta)} \left(\frac{L_0}{r} \right)^{4\gamma}. \quad (53)$$

Отметим, что, строго говоря, нельзя использовать (53) на расстояниях порядка L вблизи границ. В этой области вследствие теплопроводности температура плавно меняется от значения $(AE^2 L^2/\kappa_1)(L_0/r)^{4\gamma}$ до значения $(AE^2 L^2/\kappa_2)(L_0/r)^{4\gamma}$. Однако анализ асимптотик (52) и (53) показывает, что различия в значениях α и κ в смежных секторах не меняют зависимости δT от координаты r . Как видно из проведенного анализа, асимптотики δT существенным образом определяются только характером расходимости поля и соотношением между теплоотводом и теплопроводностью. Приведенные аргументы позволяют оправдать использование одинаковых значений α и κ для качественного анализа расходимостей в тексте статьи.

Литература

1. in *Proc. of the Fourth International Conference on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media*, Physica A **241**(1-2) (1997).
2. M. A. Dubson, Y. C. Hui, M. B. Weissman, and J. C. Garland, Phys. Rev. B **39**, 6807 (1989).
3. Y. Yagil and G. Deutscher, Phys. Rev. B **46**, 16115 (1992).
4. Y. Gefen, W. H. Shih, R. B. Laibowitz, and J. M. Viggiano, Phys. Rev. Lett. **57**, 3097 (1986).
5. R. K. Chakrabarty, K. K. Bardhan, and A. Basu, Phys. Rev. B **44**, 6773 (1991).
6. D. J. Bergman, Phys. Rev. B **39**, 4598 (1989).
7. А. М. Сатанин, А. А. Снарский, К. П. Сличенко, И. В. Бессудков, ЖТФ **68**(5), 132 (1998).
8. А. М. Dykhne, Phystech J. **2**, 3 (1996).
9. А. М. Сатанин, В. В. Скузоваткин, С. В. Хорьков, Письма в ЖЭТФ **64**, 495 (1996).
10. А. М. Сатанин, В. В. Скузоваткин, С. В. Хорьков, ЖЭТФ **112**, 643 (1997).
11. А. М. Сатанин, В. В. Скузоваткин, Письма в ЖЭТФ **66**, 115 (1997).
12. П. Пенфильд, Р. Спенс, С. Дюинкер, *Энергетическая теория электрических цепей*, Энергия, Москва (1974).
13. A. Aharony, Phys. Rev. Lett. **58**, 2726 (1987).
14. D. Stroud and P. M. Hui, Phys. Rev. B **37**, 8719 (1988).
15. Ю. П. Емец, *Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой*, Наукова думка, Киев (1986).
16. Ю. П. Емец, ЖЭТФ **96**, 701 (1989).
17. А. М. Сатанин, В. В. Скузоваткин, С. В. Хорьков, Письма в ЖЭТФ **65**, 521 (1997).