

СУПЕРКРИТИЧЕСКАЯ КОНВЕКЦИЯ ПРИ СВЕРХБЫСТРОМ МГД-ВРАЩЕНИИ*С. В. Старченко**

*Геофизическая обсерватория «Борок»,
Филиал объединенного института физики Земли
Российской академии наук
152742, Борок, Ярославская обл., Россия*

Поступила в редакцию 24 июня 1998 г.

Аналитически исследована сильно нелинейная архимедова МГД-конвекция при условиях, характерных для жидких ядер планет Солнечной системы. Типичная для такой конвекции суперкритичность (гигантское число Рэлея) и сверхбыстрое вращение (малое число Экмана) приводят к тому, что диффузия и вязкость эффективны только в таких слоях, которые асимптотически узки по сравнению с радиусом ядра. Пограничные слои контролируют архимедову плавучесть, крупномасштабную скорость и магнитное поле, которое наблюдается у поверхности планеты. Перемежающиеся внутренние слои определяют мелкомасштабные (ненаблюдаемые) поля и преобладающую симметрию крупномасштабных магнитных полей. Впервые прямо доказано, что азимутальные осесимметричные течения доминируют в крупных масштабах, а в мелких масштабах доминируют вытянутые вдоль оси вращения конвективные ячейки. Выведена система, оптимальная для исследования магнитоконвекции ядер планет в крупных и мелких масштабах. Наши оценки великолепно согласуются с дорогостоящими численными и экспериментальными моделями суперкритической конвекции при быстром вращении. Подобные модели будут в состоянии решить проблему МГД-динамо в ядрах планет только тогда, когда их алгоритм станет основываться на описанных нами асимптотиках.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проблему магнитогидродинамического (МГД) динамо Земли и планет Солнечной системы еще Энштейн называл одной из пяти основных проблем физики, но принципиальный подход к ее разрешению стал проясняться лишь недавно. Поэтому до сих пор не была определена динамика наиболее активной части планеты — ее жидкого ядра, а ведь это ядро может определять эволюцию недр всей планеты. На поверхности планеты основным свидетелем активности ее жидкого ядра являются крупномасштабные магнитные поля. Их эволюцию можно проследить от времен, сравнимых с возрастом планеты (палеомагнетные исследования), до современности (космические исследования). Магнитные поля являются уникальнейшим средством, позволяющим всесторонне судить о фундаментальных свойствах, динамике и строении глубинных недр Земли и планет, поскольку нам закрыт прямой доступ в эти недра.

Простейшая полностью самосопряженная система МГД-динамо планет в приближении Бусинеска включает уравнение Навье—Стокса для бездивергентной скорости V (в системе координат, вращающейся вокруг оси z со скоростью вращения мантии Ω), уравнение Максвелла для бездивергентного магнитного поля B и уравнение диффузии

*E-mail: starche@borok.adm.yar.ru

легкой фракции для ускорения A , обусловленного архимедовой плавучестью:

$$\begin{aligned} A\mathbf{r}/L &= (2\Omega \times + D/Dt - \nu \nabla^2)\mathbf{V} - (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}/\mu_0\rho + \nabla P, \\ \left(\frac{D}{Dt} - \frac{1}{\mu_0\sigma} \nabla^2\right)\mathbf{B} &= (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{V}, \quad \left(\frac{D}{Dt} - k\nabla^2\right)A = \beta \frac{V_r}{r^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{V}\nabla$, P — суммарное давление. В жидком ядре Земли, внешний радиус которого $L = 3.5 \cdot 10^6$ м, плотность $\rho = 10^4$ кг/м³ и проводимость $\sigma = 4 \cdot 10^5$ См/м, мы имеем $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-6}$ с⁻¹, движущую работу конвекции β порядка 10^2 Дж/кг или больше, а коэффициенты диффузии k и вязкости ν меньше 10^{-5} м²/с. Граничными условиями являются условия прилипания для скорости, условия непрерывности для магнитного поля и условия, задающие основной источник магнитоконвекции — поле плавучести A [1]. Толщины вязкого (экманова) и диффузионного (архимедового) пограничных слоев прямо пропорциональны малым числам δ и ε :

$$\delta^2 \equiv \frac{\nu}{\Omega L^2} \ll 1, \quad \frac{1}{\varepsilon^3} = R \equiv \frac{\beta}{k\Omega} \gg 1, \quad \text{где } \beta \equiv \begin{cases} gG/4\pi k\rho w, \\ g\alpha Q/4\pi k\rho c_p. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь Q — тепловая, а G — гравитационная (композиционная) мощности источника конвекции, который расположен у внутренней границы жидкого ядра; g — ускорение силы тяжести на внешней границе у мантии, а α и c_p — термические параметры жидкости в ядре. Чисто гравитационный источник конвекции эффективней термического [1], соответственно, удельная гравитационная работа w заметно меньше удельной термической работы c_p/α в жидких ядрах планет Солнечной системы. Однако мощность термического источника может значительно превышать гравитационную в гигантских планетах [2], и поэтому оба эффекта должны учитываться в (2).

Прямые численные исследования (1) чрезвычайно затруднены из-за сильной концентрации физических полей A , \mathbf{V} и \mathbf{B} в пограничных и сдвиговых слоях, безразмерную толщину которых определяют $\delta \leq 10^{-7}$ и $\varepsilon \leq 10^{-4}$ из (2). Недавно ценой огромных затрат в прямых численных моделях удалось изменить эти параметры до 10^{-2} [2–8]. Поведение модельного магнитного поля впервые стало похожим на поведение геомагнитного поля, поскольку параметры были достаточно малы. Однако в обозримом будущем при подобных подходах к моделированию геодинамики реально малые параметры недостижимы.

Более перспективен асимптотический подход, при котором формально используют бесконечно малые параметры, что позволяет с высокой точностью разрешать структуру узких слоев.

Самосогласованная модель геодинамики суперкритична, поскольку ее число Рэлея R из (2) на много порядков превышает критическое для начала конвекции число $R_c \approx \approx \delta^{-2/3}$. Суперкритичность типична для МГД-динамо систем, поскольку генерация гидромагнитных полей возможна только тогда, когда интенсивность источников генерации превышает некоторую пороговую величину. Основная идея работы — найти асимптотики системы (1) в суперкритическом пределе, когда интенсивность источников генерации всех рассматриваемых полей формально считается бесконечно большой. Интенсивность генерации поля скорости \mathbf{V} и поля плавучести A характеризуют огромные числа: соответственно, обратное число Экмана $1/E = \delta^{-2} \leq 10^{14}$ и число Рэлея $R = \varepsilon^{-3} \leq 10^{12}$. Точность суперкритического приближения определяют E и $1/R$, которые появляются как малые параметры при лапласианах (Δ) в системе (9), которая

оптимизирует (1). Таким образом, суперкритическое приближение для планетарной системы (1) МГД-динамо должно быть чрезвычайно эффективно, поскольку его точность $\sim \max(E, 1/R) \leq 10^{-12}$, что заведомо превосходит точность всех известных прямых численных моделей, работающих в режиме реального времени [2–8].

Сверхкритическая конвекция типа (1), (2) моделировалась в лабораториях на Земле [2] и в космосе [3], причем критическое число Рэлея R_c превышалось на один-два порядка, однако воспроизвести планетарную гидродинамику так и не удалось. Последующие дорогостоящие численные эксперименты [4] показали, что сильно нелинейная суперкритическая ($R \gg 10^2 R_c$) конвекция принципиально отличается от сверхкритической. Известные до нашей работы методы требовали колоссальных затрат для моделирования быстровращающихся недр планет, где $R \gg 10^3 R_c \approx 10^6$, $\delta^2 \ll 10^{-6}$. Наиболее впечатляет модель [5], которая до сих пор была единственной моделью суперкритической МГД-конвекции, поскольку развиваемые до нашей работы подходы требовали чудовищных затрат. Авторы [5] потратили 2000 ч компьютерного времени *Cray C-90*, чтобы достичь значений $\delta^2 = 1.7 \cdot 10^{-6}$ и $R = 9.1 \cdot 10^6$, но так и не сумели воспроизвести даже порядок величины геомагнитного поля и его симметрию. В последующих работах (см. [6]) авторы ценой еще больших затрат приблизили свою модель к реальному геомагнитному полю, варьируя параметры системы. Однако остался открытым вопрос о том, как эти параметры определяют величину и структуру магнитных полей, скорости и архимедовой плавучести.

В данной работе типичные величины плавучести A_* , скорости V_* и магнитного поля B_* выражены аналитически через главные параметры системы. Аналитически оценены и наиболее характерные крупномасштабные, мелкомасштабные, пограничные и внутренние структуры магнитоконвекции. Это позволяет просто объяснить неудачу [5] и удачу [6], а также указать принципиальный подход для правильного воспроизведения магнитных полей планет, которые порождаются суперкритической турбулентностью при типично гигантских $R \geq 10^{12}$ и чрезвычайно малых $\delta^2 \leq 10^{-14}$. Очевидно, что ни прямое численное моделирование, ни эксперимент принципиально не в состоянии даже приблизиться к столь экстремальным величинам. Здесь мы предлагаем асимптотический подход, который необходимо включить в численный алгоритм для успешного разрешения проблемы суперкритической магнитотурбулентности при сверхбыстром вращении.

Для всех рассматриваемых планет мы вправе воспользоваться граничными условиями непроницаемости, непрерывности магнитного поля, постоянства плавучести и ее потока

$$V_r = 0, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_c, \quad A(r=1) = 0, \quad \partial A(r=cL)/\partial r = 0, \quad (3)$$

которые налагаются на систему (1) у границы с твердым (возможно частично) ядром (индекс «с») при $r = cL$ и у границы ядро—мантия (индекс «1») при $r = L$. Граничные условия (3) дополняются условиями прилипания $\mathbf{V} = \mathbf{V}_c$ на границе с твердым ядром (если оно есть). В планетах земного типа аналогичное условие прилипания $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1$ выполняется и на внешней границе. В планетах-гигантах Уране и Нептуне последнее (а возможно и первое) частично или полностью замещается условиями свободной границы.

Твердое ядро вращается со скоростью

$$\mathbf{V}_c = (0, V_{c\theta}, V_{c\varphi}),$$

а магнитное поле в нем (при $r \leq cL$) определяется уравнением

$$\mu_0 \sigma_c D \mathbf{B}_c / Dt = \nabla^2 \mathbf{B}_c$$

с граничными условиями

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{B}(r = cL).$$

Граница ядро—мантия вращается со скоростью

$$\mathbf{V}_1(r = L) = (0, V_{1\theta}, V_{1\varphi}),$$

а магнитное поле в проводящей части мантии (при $L \leq r \leq (1 + d_1)L$) определяется уравнением

$$\partial \mathbf{B}_1 / \partial t = \nabla \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{B}_1 / \mu_0 \sigma_1)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1(r = L).$$

В верхней — слабопроводящей — части мантии поле становится потенциальным: $\mathbf{B}_1 = -\nabla U$ с потенциалом, удовлетворяющим уравнению Лапласа $\nabla^2 U = 0$ при $r \geq (1 + d_1)L$. Именно это магнитное поле наблюдается с космических кораблей и на поверхности планеты, являясь основным источником информации о динамике скрытого от наблюдателя жидкого ядра.

Завершают постановку задачи обыкновенные дифференциальные уравнения по времени, описывающие динамику мантии и твердого ядра. Для динамики твердого ядра решающим является баланс моментов вязких и электромагнитных сил, а в динамику мантии, возможно, не менее существенный вклад вносят не учтенные здесь эффекты (особые слои, гравитационно-прецессионное влияние и т. д.). В первом приближении массивная мантия неподвижна в нашей системе координат вращающейся с угловой скоростью Ω , а значительно более легкое твердое ядро вращается со значимой угловой скоростью $\sim V_*/L \leq 10^{-3}\Omega$.

2. ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Типичную плавучесть и скорость связывает баланс сил Кориолиса и Архимеда:

$$A_* = \Omega V_*,$$

который следует из первого уравнения системы (1) в центре слоя. У границ происходят резкие радиальные изменения переменных в (1) и мала радиальная компонента скорости V_r из-за условия непроникновения. Поэтому, используя доминирование радиальных производных $\partial/\partial r \sim 1/l_*$ и считая $V_r \approx (l_*/r)V_*$ в архимедовом пограничном слое толщиной $l_* \ll L$, получим

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla A - k \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \beta \frac{V_r}{r^2} = 0, \quad l_* = r \left(\frac{\Omega k L}{\beta r} \right)^{1/3}. \quad (4)$$

Здесь l_* — толщина архимедова слоя у внешней границы при $r = L$ (где $l_* = LR^{-1/3}$) или у внутренней границы при $r = cL$. Сравнивая в (4) второй член с последним, найдем типичные плавучесть и скорость:

$$A_* = \Omega V_* \simeq \beta \frac{l_*}{r^2}, \quad V_* = \frac{k^{1/3} \beta^{2/3}}{\Omega^{2/3} L} = R^{2/3} \frac{k}{L}. \quad (5)$$

Используя параметры [5], получим из (4) толщину $l_* = 17$ км, а из (5) скорость $V_* = 0.4$ см/с и типичную температуру $T_* = 3 \cdot 10^{-3}$ К ($T_* = A_*/g\alpha$, $A_* = 3 \cdot 10^{-7}$ м/с²), что великолепно согласуется с результатами [5]. Четыре модификации [5], рассмотренные в [6], также прекрасно согласуются с нашей асимптотической оценкой. Результаты (4), (5) хорошо согласуются и с безмагнитными гидромоделями, которые создавались в лабораториях [2], в космосе [3] и с помощью компьютеров [4]. Наши оценки (4), (5) удовлетворительно согласуются даже с результатами тех работ (см. [7, 8]), где используются лишь слегка суперкритические параметры, что свидетельствует о высокой точности и надежности предлагаемого асимптотического подхода.

Таким образом, типичная величина скорости слабо зависит от магнитного поля, которое, тем не менее, сильно влияет на характер МГД-течения. Поэтому не удивительно отсутствие собственного магнитного поля в такой планете, как Венера, где, возможно, даже сильные течения в ядре не удовлетворяют необходимым кинематическим условиям генерации [9].

В двух первых уравнениях системы (1) пренебрежимо малы члены $\sim D/Dt$ и $V_r = O(d_*/L)$ внутри пограничных гидромагнитных слоев толщиной $d_* \ll L$, где МГД-уравнения (1) упрощаются до

$$2i\Omega \cos(\theta) \mathcal{V} - \nu \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial r^2} = \frac{B_r}{\mu_0 \rho} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r}, \quad \frac{-1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r} = B_r \mathcal{V} + \mathcal{C}. \quad (6)$$

Здесь комплексная скорость $\mathcal{V} = V_\varphi - iV_\theta$ и магнитное поле $\mathcal{B} = B_\varphi - iB_\theta$ резко изменяются, а константа интегрирования \mathcal{C} и радиальное магнитное поле B_r практически неизменны, $\partial(\mathcal{C}, B_r)/\partial r \simeq 0$, поперек пограничного слоя. Также неизменны и константы интегрирования $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_c, \mathcal{B}_0$ в общем решении системы (6) у внутренней границы, где $\Delta r = r - cL \sim \delta L \ll L$:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 - \mu_0 \sigma B_r \left[\int_{r=cL}^{r=r} \mathcal{V} dr + \mathcal{C} \Delta r \right], \quad (7)$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_c \exp \left[- \left(2i \frac{\Omega}{\nu} \cos \theta + \frac{B_r^2 \sigma}{\nu \rho} \right)^{1/2} \Delta r \right] + \frac{-\sigma B_r \mathcal{C}}{2i \rho \Omega \cos \theta + \sigma B_r^2}.$$

Аналогично выглядит решение и у внешней границы, где другие константы интегрирования и $\Delta r = L - r \sim \delta L \ll L$.

Рассматривая балансы в (6), (7) и накладывая граничные условия (3), получим характерную толщину пограничного слоя d_* , типичное магнитное поле и отношение магнитной энергии к кинетической $M^2 B_*^2 / \rho \mu_0 V_*^2$:

$$\frac{d_*}{L} = \left\{ \begin{array}{l} \delta \\ \delta/S \end{array} \right., \quad \frac{B_*}{\sqrt{\rho/\sigma}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{S} \\ S \end{array} \right., \quad \frac{M^2 B_*^2}{\rho \mu_0 V_*^2} = M^2 \frac{\delta}{\epsilon} \left\{ \begin{array}{l} 1, \\ S, \end{array} \right. \quad (8)$$

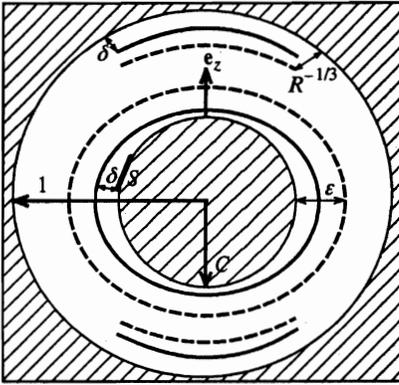


Рис. 1. Система координат вращается вокруг единичного вектора e_z , определяющего типичное вращение центральной сферы c . Внешняя сфера 1 почти неподвижна. Изображены гидромагнитные слои: Архимеда ($\epsilon = R^{-1/3}$), Экмана (δ) и Гартмана (δ/S)

где

$$S \equiv R^{2/3} q \delta = \mu_0 \sigma V_* L \delta = \frac{\mu_0 \sigma \nu^{1/2} k^{1/3} \beta^{2/3}}{\Omega^{7/6} L} = \begin{cases} \leq 1, \\ \geq 1. \end{cases}$$

Здесь $\epsilon \equiv V_*/L\Omega \ll 1$ — очень малое число Россби, $q \equiv k\mu_0\sigma < 1$ — малое число Роберта, а фактор $M \geq 2$ из-за смещения максимума магнитного поля от границы (зоны максимальной генерации) на несколько d_* [9, 10].

Генерация радиальной компоненты магнитного поля B_r происходит в основном объеме — вне зон максимально эффективной генерации у границ слоя, где генерируются компоненты $B_\varphi, B_\theta \approx MB_*$, которые перпендикулярны радиусу r . Поэтому типичная величина $B_r \approx B_*$, наблюдаемая на поверхностях ядер планет, обычно меньше величины MB_* , скрытой в глубине ядер. Соответственно из (8), используя результаты обзора [11], получим, что $S \leq 1$ для воспроизведения магнитных полей Земли, Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна, а для остальных планет и спутников $S < 1$.

С параметрами из [5] число $S = 6 > 1$, поэтому в (8) нижние случаи актуальны. Отсюда мы получаем слишком большое поле $MB_* \geq 2 \cdot 10^2$ Гс и отношение энергий $M^2 B_*^2 / \rho \mu_0 V_*^2 \geq 2 \cdot 10^3$. Этот результат прекрасно согласуется с [5]. Таким образом, можно сделать вывод, что геомагнитное поле могло быть воспроизведено в этой модели, но при $S \leq 1$. Авторы [5] добились удовлетворительного воспроизведения геомагнитного поля, варьируя тепловой поток на границе ядро—мантия в последующей работе [6], что равносильно необходимому уменьшению S при уменьшении параметра β . Однако, как видно из формулы (8), S можно уменьшить и за счет существенного уменьшения ν и k , которые в [5, 6] значительно больше величин, характерных для ядра Земли.

Измеряя расстояния в L , скорость в $V_* = R^{2/3}k/L$, время в L/V_* , плавучесть в $A_* = \Omega V_*$ и магнитное поле в $B_* = \sqrt{\mu_0 \rho \Omega V_* L \delta}$, из (1) получим оптимальную систему, где все переменные порядка единицы (см. рис. 1):

$$(\epsilon D/Dt + 2e_z \times -\delta^2 \nabla^2) \mathbf{V} + \nabla P - \delta(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \text{Ar},$$

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} - \frac{\delta}{S} \nabla^2 \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{V}, \quad \epsilon \frac{DA}{Dt} - \epsilon^3 \nabla^2 A = \frac{V_r}{r^2}, \quad (9)$$

$$\epsilon \equiv R^{-1/3} \ll R_c^{-1/3} \approx (\delta^{-2/3})^{-1/3} \ll 10^{-1}, \quad S \gg \delta.$$

Здесь безразмерная мера диффузии ϵ^3 мала при суперкритической конвекции, малость δ^2 соответствует сверхбыстрому вращению, а выполнение условия на S из (8) необходимо для возбуждения магнитного поля.

Пользуясь тем, что все переменные в (9) порядка единицы, мы можем легко оценить турбулентную диффузию, которая возникает при усреднении (черта над выражением) нелинейного члена $(\mathbf{V}\nabla A)$

$$\overline{\mathbf{V}\nabla A} \approx \mathbf{V}\nabla \int (\mathbf{V}\nabla A) dt \approx \int (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) dt \nabla^2 \bar{A} \approx \nabla^2 \bar{A}.$$

Аналогично оценим турбулентную вязкость, учитывая чрезвычайную малость $\epsilon \ll 10^{-3}$ в МГД-уравнениях (9),

$$\overline{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}} \approx (\nabla \times \int \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) dt) \times \mathbf{B} \approx \nabla \times (\nabla \times \bar{\mathbf{V}}).$$

Сравнивая усредненные нелинейные члены с линейными в усредненном уравнении (9), получим при $S \approx 1$ для турбулентных (черта сверху) величин

$$\bar{\delta}^2 \approx \delta, \quad \bar{\epsilon} \approx \sqrt{\epsilon} = R^{-1/9}, \quad \bar{q} = \bar{\epsilon}^2 / \bar{\delta}. \quad (10)$$

В ядре Земли усредненное число Рэлея достаточно велико, $\bar{R} = (\bar{\epsilon})^{-3} \approx 10^6$, и число Экмана достаточно мало, $\bar{\delta}^2 \approx 10^{-6}$, чтобы применять полученные выше решения в пограничных слоях. Соответствующее значение средней типичной скорости из (5) $\bar{V}_* \approx 10^{-3}$ м/с прекрасно согласуется с результатами новейших исследований в области сейсмографии ядра Земли [12]. А значение среднего типичного магнитного поля, полученное из (8), $\bar{B}_* \approx 1$ мТл = 10 Гс, также хорошо согласуется с результатами долговременных наблюдений магнитного поля у границы ядра с мантией [13]. Хорошо воспроизводит наша теория и магнитные поля планет (подробней см. Заключение).

Детали динамики определяет усредненная система, выведенная далее из (9), решение которой можно напрямую сравнить с наблюдаемыми полями планет. Система (9) — это система четырнадцатого порядка, поскольку она должна удовлетворить четырнадцать граничным условиям. Вследствие малости $\bar{\delta} \approx 10^{-2} - 10^{-4}$, $\bar{\epsilon} \approx 10^{-1} - 10^{-3}$ порядок понижается до четырех в основном объеме слоя, где система легко решается аналитически. Исходный порядок восстанавливается в пограничных слоях: там справедливо аналитическое решение (7) для \mathbf{V}, \mathbf{B} и упрощенное уравнение (4) для A .

Таким образом, сложное решение трехмерной системы (1) из семи уравнений сводится к простому решению одного почти двумерного уравнения (4). Наша теория позволяет получать и прямые турбулентные решения (9) при $\delta \ll 10^{-3}$, $\epsilon \ll 10^{-2}$. Дополнительная трудность при прямом исследовании суперкритической магнитотурбулентности — это разрешение структуры внутренних свободных гидромагнитных слоев, которые описаны в [14].

3. КРУПНЫЕ И МЕЛКИЕ МАСШТАБЫ ПОЛЕЙ

Крупномасштабные поля изменяются на расстояниях, значительно превосходящих толщину пограничных и внутренних (см. разд. 4) слоев. Так, в [5] безразмерная тол-

щина таких слоев характеризуется значениями $\delta = 1.3 \cdot 10^{-3}$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$. Даже самые мощные современные компьютеры не в состоянии разрешить структуру столь тонких слоев, и поэтому в [5, 6] использовали гипервязкость, чтобы избежать разрешения мелких масштабов, что типично для всех современных численных исследований [6–8]. Эффект гипервязкости замечательно согласуется с введенной нами выше оценкой величины турбулентных коэффициентов (10). Для значений параметров из [5] получаем из (10) $\bar{\delta} \approx \delta^{1/2} = 1/28$ и $\bar{\varepsilon} \approx \varepsilon^{1/3} = 1/6$, что совпадает с толщиной пограничных слоев на рис. 3 из [5]. Однако оценка (10), как и использование гипервязкости, являются грубыми и несколько искусственными. Необходимая коррекция величины турбулентных коэффициентов или уровня гипервязкости должна основываться на описанном ниже влиянии эффектов мелких масштабов на эффекты крупных масштабов и наоборот.

Для определенности рассмотрим магнитострофическое приближение $\varepsilon = 0$ и случай $S \leq 1$, типичный для ядер планет. Подставляя в (9) вместо $\mathbf{V}, \mathbf{B}, P, A$ величины $\mathbf{V} + \mathbf{v}, \mathbf{B} + \mathbf{b}, P + p, A + a$ и усредняя по крупным масштабам (черта над выражением), получим систему для крупномасштабных полей $\mathbf{V}, \mathbf{B}, P, A$:

$$\text{Ar} = 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{V} - \delta^2 \nabla^2 \mathbf{V} + \nabla P + \delta(\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathcal{L}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\delta}{S} \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B} + \mathcal{E}), \quad \frac{V_r}{r^2} = \varepsilon \frac{\partial A}{\partial t} + \varepsilon(\mathbf{V} \nabla A + \mathcal{A}) - \varepsilon^3 \nabla^2 A, \quad (11)$$

$$\mathcal{L} = \overline{\mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{b}}, \quad \mathcal{E} = \overline{\mathbf{v} \times \mathbf{b}}, \quad \mathcal{A} = \overline{\mathbf{v} \nabla a}.$$

Здесь влияние мелких масштабов на крупные учитывается усредненной (турбулентной) лоренцевой \mathcal{L} , электродвижущей \mathcal{E} и архимедовой \mathcal{A} силами. Отметим, что из этих трех только электродвижущая сила $\mathcal{E} = (\alpha + \beta \nabla \times) \mathbf{B}$ была объектом пристального внимания в предыдущих работах [8–10].

Пренебрегая малыми δ и $\delta \mathcal{L}$, получим \mathbf{V} из условия бездивергентности $\nabla \mathbf{V} = 0$ и уравнения моментов сил:

$$V_r = \frac{z}{r} V_z - \frac{1}{2r} \frac{\partial P}{\partial \varphi}, \quad V_\theta = -\frac{z}{2rs} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \frac{s}{r} V_z, \quad V_\varphi = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{s}{2} A. \quad (12)$$

Здесь

$$P = \int^z A z dz, \quad 2V_z = \int^z (\partial A / \partial \varphi) dz,$$

а нижние пределы интегрирования включают свободные функции от (t, s, φ) , которые необходимы для удовлетворения граничным условиям.

Пренебрегая ε и $\varepsilon \mathcal{A}$, получим $V_r = 0$, что ведет к осесимметризации $\partial(A, P) / \partial \varphi = 0$ в соответствии с (12). Таким образом, крупномасштабная скорость осесимметрична, направлена исключительно по азимуту $\mathbf{V} = V(t, r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\varphi$ и выражается однозначно через плавучесть A . Осесимметричная скорость V , плавучесть A и в общем случае неосесимметричное магнитное поле \mathbf{B} подчиняются простой крупномасштабной системе:

$$\mathbf{V} = \int^z \frac{\partial A}{\partial s} \frac{z dz}{2} - \frac{s}{2} A, \quad \frac{\partial A}{\partial t} = -\mathcal{A}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B} + \mathcal{E}). \quad (13)$$

Видно, что на динамику крупномасштабных полей существенное влияние оказывают мелкомасштабные поля $\mathbf{v}, \mathbf{b}, p, a$, которые подчиняются системе, следующей из (9) и (11):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{r} &= 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} - \delta^2 \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla p + \delta [\mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{b} + (\mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{b} - \mathcal{L})], \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \frac{\delta}{S} \nabla^2 \mathbf{b} &= \nabla \times [\mathbf{V} \times \mathbf{b} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + (\mathbf{v} \times \mathbf{b} - \mathcal{E})], \\ \frac{v_r}{r^2} = \varepsilon \frac{\partial a}{\partial t} + \varepsilon [\mathbf{V} \nabla a + \mathbf{v} \nabla A + (\mathbf{v} \nabla a - \mathcal{A})] - \varepsilon^3 \nabla^2 a. \end{aligned} \tag{14}$$

Замыкают полную систему (13), (14) граничные условия (3) и следующие непосредственно за (3) условия, причем вместо $\mathbf{V}, \mathbf{B}, P, A$ мы используем величины $\mathbf{V} + \mathbf{v}, \mathbf{B} + \mathbf{b}, P + p, A + a$. Дополнительно для внутренних мелкомасштабных полей должны выполняться условия перемежаемости (см. следующий раздел), а пограничные мелкомасштабные поля должны резко убывать при удалении от границ.

У твердых границ в линеаризованном слое Экмана—Гартмана пограничное мелкомасштабное поле полностью выражается через крупномасштабное и внутреннее мелкомасштабное поля:

$$\begin{aligned} v_\varphi - iv_\theta &= \mathcal{V} + (\mathcal{V}_{1,c} - \mathcal{V}) \exp\left(\pm \sqrt{2i \cos \theta + SB_r^2} \frac{\Delta r}{\delta}\right), \\ b_\varphi - ib_\theta &= \mathcal{B}_{1,c} \pm SB_r (\mathcal{V}_{1,c} - \mathcal{V}) \frac{1 - \exp\left(\pm \sqrt{2i \cos \theta + SB_r^2} \Delta r / \delta\right)}{\sqrt{2i \cos \theta + SB_r^2}}, \\ \{v, b\}_r &= -\frac{1}{rs} \int_{\Delta r=0}^r \left[\frac{\partial(\sin \theta \{v, b\}_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \{v, b\}_\varphi}{\partial \varphi} \right] r dr. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $\mathcal{V} = V + v_\varphi - iv_\theta$ у верхней границы слоя, где $v_{\varphi, \theta}$ — исключительно внутреннее поле; комплексное $\mathcal{V}_{1,c} \equiv V_{\varphi 1,c} - iV_{\theta 1,c}$; верхний знак (+) и $\Delta r = r - 1$ у границы с мантией, которая вращается со скоростью \mathbf{V}_1 ; нижний знак (-) и $\Delta r = r - c$ у границы с внутренним ядром, которое вращается со скоростью \mathbf{V}_c (см. выражения для \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_c после формулы (3)). Радиальная скорость v_r и магнитное поле b_r получены после интегрирования условия бездивергентности.

Мелкомасштабная пограничная плавучесть a в слое Архимеда находится из уравнения

$$\frac{v_r}{\varepsilon r^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{v_r}{\varepsilon} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial(A+a)}{\partial \theta} + \frac{V + v_\varphi}{s} \frac{\partial a}{\partial \varphi} - \mathcal{A}, \tag{16}$$

где используются те же значения v_r, v_θ и v_φ , что и в (15), а «растянутая» переменная $x = (r - 1)/\varepsilon$ около $r = 1$ и $x = (r - c)/\varepsilon$ около $r = c$.

Соответствующая крупномасштабным эффектам система (13), пограничное решение (15) и уравнение (16) вместе с приведенными ниже уравнениями для внутренних мелкомасштабных полей полностью определяют решение задачи. При этом используются только граничные условия (3) без условия непроникновения, поскольку остальные граничные условия уже учтены в (15).

4. ВНУТРЕННЯЯ ОСЕВАЯ КОНВЕКЦИЯ

Рассматривая внутренние мелкомасштабные поля, будем считать, что конвективные ячейки вытянуты вдоль оси вращения и

$$\partial s \sim s_* \ll \partial \varphi \sim \varphi_* \ll \partial z \sim 1.$$

Здесь звездочками обозначены характерные масштабы внутренней конвекции по соответствующим (z, s, φ) цилиндрическим осям координат. Примем также следующую из условия бездивергентности оценку для компонент скорости

$$V \sim 1 \geq v_z \sim v_* \gg v_\varphi \sim \varphi_* v_* \gg v_s \sim s_* v_*.$$

И, наконец, пренебрежем магнитными членами в первом силовом уравнении из (14). Позже, когда мы получим окончательную оценку, мы покажем, что наши изначальные предположения были правомочны.

Вдали от границ, пренебрегая соответствующими членами из (14), получим

$$\frac{v_z \cos \theta}{\varepsilon r^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 a}{\partial s^2} = \frac{V}{s} \frac{\partial a}{\partial \varphi} + \frac{\partial(a - A)}{\partial t}, \quad za = -\delta^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial s^2}. \quad (17)$$

Сравнивая члены (17) между собой, получим оценки

$$v_*/\varepsilon = \varepsilon^2 a_*/s_*^2 = a_*/\varphi_*, \quad a_* = \delta^2 v_*/s_*^2,$$

которые дают характерную осевую скорость $v_* \sim v_z$ и плавучесть $a_* \sim a$, а также масштаб по цилиндрическому радиусу s_* и по азимуту φ_* :

$$\chi \equiv v_*/a_* = \varepsilon^{3/2}/\delta, \quad s_* = \varepsilon^{3/4} \delta^{1/2}, \quad \varphi_* = \delta/\varepsilon^{1/2}. \quad (18)$$

Ведущий внутренний баланс в уравнении электромагнитной индукции

$$-(\delta/S) \partial^2 b_z / \partial s^2 \simeq B_s \partial v_z / \partial s$$

дает $b_* = S v_* s_*/\delta$ при типичном B_s порядка единицы.

В пограничных слоях Экмана—Гартмана (15) $\partial z \sim \delta$ и вдали от экватора ($s \neq c, 1$) основной баланс в уравнении плавучести

$$\varepsilon^2 \partial^2 a / \partial z^2 \simeq v_z \partial a / \partial z$$

дает $\varepsilon^2/\delta = v_*$. Окончательно получаем оценки характерной внутренней скорости v_* , магнитного поля b_* , электродвижущей силы $\alpha_* = v_* b_*$ и основное ограничение на исходные малые параметры:

$$v_* = \varepsilon^2/\delta, \quad b_* = S \varepsilon^{11/4} / \delta^{3/2}, \quad \alpha_* = S \varepsilon^{19/4} / \delta^{5/2}, \quad S \varepsilon^{3/2} \ll \delta. \quad (19)$$

Эта оценка вместе с (18) используется в заключительном разделе для описания магнитогидродинамики недр планет. Наши первоначальные предположения выполняются, если $\varepsilon^2 \leq \delta$ и $S \varepsilon^{3/2} \ll \delta$, что типично в ядрах планет. Обычно последнее условие перекрывает первое и является поэтому главным ограничением при использовании турбулентных (10) или гипервязких значений $\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}$ вместо более малых значений ε, δ . В [5]

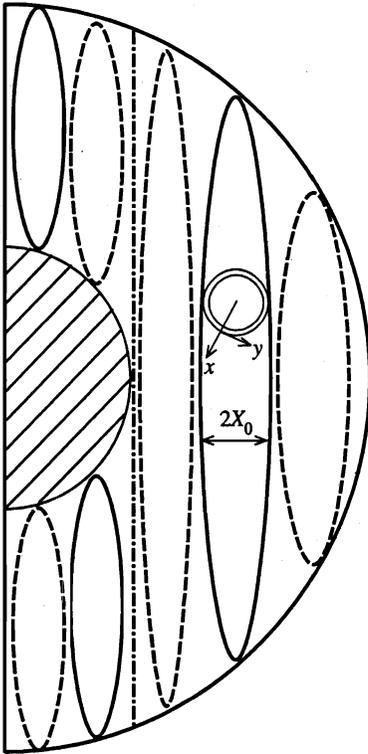


Рис. 2. Структура конвективных ячеек в сечении $\varphi = \text{const}$. Сплошной линией изображены ячейки с линиями тока по часовой стрелке, пунктиром — против. Локальная координата x направлена поперек ячейки, y — вокруг. Штрих-пунктирная линия — образующая тангенциального цилиндра. Переходный слой вдоль цилиндра (не изображен) и внутренняя сфера разделяют различные конвективные зоны

основное из условий (19) не выполнено, поэтому неудивительно, что их результаты не отражают симметрию геомагнитного поля, которая определяется внутренней конвекцией (см. Заключение).

Опишем пространственную структуру выделенной конвективной ячейки, которая вдали от границ вытянута вдоль оси вращения z (см. рис. 2). В сечении $z = \text{const}$ такая ячейка ограничена кривой $X(s, \varphi) = \text{const}$, которая примыкает к соседним кривым, подобно пчелиным сотам. Согласно оценке (18), «растянутая» поперек ячейки переменная $x = X(s, \varphi)/s_*$. Дополним нашу локальную систему координат координатой $y = y(s, \varphi)$, которая идет вокруг ячейки и ортогональна x, z .

Воспользуемся тем, что компоненты b_x и v_x порядка $s_* \equiv \epsilon^{3/4} \delta^{1/2}$ из-за условия бездивергентности, принимающего вид $\partial(v_x, b_x)/\partial x \simeq 0$. Учитывая малость p, b и v_x в z - и y -компонентах силового уравнения, получим для v_y, v_z, a из (14) и (17)

$$-\frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = r \cos \theta a, \quad -\frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = y_r r a, \quad -\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{v_z \cos \theta + y_r v_y}{\chi r^2}, \quad (20)$$

$$\{v_z, v_y\} = -\chi r \{ \cos \theta, y_r \} [C(e^{kx} - \cos(kx)) + D \sin(kx)],$$

$$a = k^2 [C(e^{kx} + \cos(kx)) - D \sin(kx)].$$

Здесь $x \leq 0, |x| \sim 1, y_r \equiv \hat{e}_y \hat{e}_r, C, D(t, z, y)$ — свободные функции, определяемые в пограничных слоях, $k = [\chi r (y_r^2 + \cos^2 \theta)]^{1/4}$ — корень характеристического уравнения. Граничное условие — это условие перемежаемости $v_z, v_y = 0$ при $x = 0$.

Радиус ячейки определяется расстоянием

$$X_0 = x_0 s_* = \frac{\pi}{k} s_* = \frac{\pi s_*}{[\chi r (y_r^2 + \cos^2 \theta)]^{1/4}}$$

между нулями синуса в (20). Соответственно в сечении $\varphi = \text{const}$ количество ячеек

$$N_0 \simeq \frac{1}{2X_0} \simeq \frac{1}{10(\varepsilon\delta^2)^{3/8}}$$

типично велико. Так, $N_0 \simeq 10^2$ при значениях $\varepsilon \simeq 10^{-2}$ и $\delta \simeq 10^{-3}$ из [5]. При столь большом количестве ячеек их структуру невозможно разрешить численно. Поэтому в [5] использовали гипервязкость, что на порядок повышает значения δ и ε в малых масштабах. Таких гипервязких ячеек всего семь, что прекрасно согласуется с рис. 3 из [5].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравним полученные нами результаты с наблюдаемыми магнитными полями планет [11], чтобы подтвердить нашу теорию и описать конвекцию в ядрах планет. Прежде всего обратим внимание на то, что собственные магнитные поля Земли, Сатурна, Урана и Нептуна очень близки по абсолютной величине. И это несмотря на то, что строение недр этих планет принципиально различно [2, 15–17]. Значит, в ядрах этих планет течения сильно турбулентизованы, поскольку только тогда сильно сглаживаются основные параметры $\bar{S} \leq 1$, $\bar{\delta} \approx \sqrt{\delta} \approx 10^{-3}$, $\bar{\varepsilon} \approx \sqrt{\varepsilon} \approx 10^{-2}$, которые, согласно (10), мало различаются при даже заметном разбросе начальных молекулярных величин. Большее поле Юпитера может быть объяснено тем, что относительный размер его жидкометаллического ядра заметно больше, чем в остальных планетах [17]. Поэтому наблюдаемое поле Юпитера мало отличается от поля (8) на границе ядро—мантия.

Симметрия наблюдаемого крупномасштабного поля определяется тем, как соотносятся внутренняя мелкомасштабная турбулентность и крупномасштабное азимутальное течение, которые, согласно (8), (19) (см. [8, 9, 15]) характеризуются соответственно следующими числами Рейнольдса

$$R_\alpha \simeq \bar{\varepsilon}^{19/4} R_\Omega / \bar{\delta}^{5/2} (\approx 10) \quad \text{и} \quad R_\Omega \simeq \bar{S} / \bar{\delta} (\approx 10^3). \quad (21)$$

Если удовлетвориться очень грубой оценкой, приведенной в скобках, то для рассматриваемых планет R_α^2 в десять раз меньше R_Ω . При выполнении такого условия поля, симметричные относительно оси вращения, почти на порядок больше асимметричных. Это наблюдается на Земле и Юпитере по малому углу наклона (около десяти градусов) магнитного диполя к оси вращения. Несколько меньший размер ядра Сатурна по сравнению с ядром Юпитера приводит к увеличению $\bar{\delta}$ почти в полтора раза (согласно (2) и [17]). Соответственно, при прочих равных условиях в ядре Сатурна R_Ω почти на два порядка превосходит R_α^2 . Такое сильное доминирование осесимметричного динамо-механизма над асимметричным приводит к очень малому наклону наблюдаемого магнитного диполя Сатурна.

Активность ядер Урана и Нептуна должна быть несколько меньше, чем ядер Юпитера и Сатурна. Это приводит к большему значению $\bar{\varepsilon}$ и, согласно (2), R_α^2 в (21) становится сравнимым с R_Ω . В результате асимметричное поле сравнимо с осесимметричным, что и демонстрируется близким к 50 градусам наклоном магнитного диполя для обеих планет [15].

Еще меньшую активность следует ожидать в ядрах Меркурия и Марса [17], где, согласно (8), $\bar{S} \ll 1$. В результате динамо-число $R_\alpha R_\Omega$ мало, по-видимому, оно едва

превосходит величину, критическую для генерации крупномасштабного поля в ядрах этих планет. При этом генерируются очень малые иррегулярные крупномасштабные поля.

Активность ядра Венеры порядка $1/\varepsilon^3$, и ее эффективная вязкость δ^2 , согласно (2), на два порядка выше, чем в ядре Земли, из-за того что Венера вращается в 243 раза медленней. Такая высокая активность и большая вязкость, согласно (19) и (21), приводят к почти полному подавлению внутренней мелкомасштабной турбулентности. В результате динамо-число в ядре Венеры заведомо меньше критического и крупномасштабное поле там не генерируется. Таким образом, повышение активности планеты может приводить и к понижению ее наблюдаемого поля. Последнее ясно видно, если сопоставить поля Урана и Нептуна и их активности.

Мы показали, что наша теория в состоянии связать наблюдаемые магнитные поля планет с общеизвестными особенностями их строения и динамики. Более детально поведение поля определяется оптимальной системой (9), которая упрощается до (13)–(17), если разделить поля на мелкомасштабные и крупномасштабные. Численное решение наших систем с учетом (10) и (19) будет несравнимо дешевле и реалистичней, чем применение общепринятых прямых подходов, в которых используется гипервязкость.

В заключение сформулируем основные результаты.

1) Впервые аналитически оценены типичные величины, определяющие характер и главные структуры суперкритической МГД-конвекции при сверхбыстром вращении.

2) Впервые сформулирован подход, позволяющий в принципе решить проблему МГД-динамо планет и сопутствующую проблему суперкритической турбулентности.

3) Выведена простая система, детально описывающая архимедову магнитоконвекцию ядер планет в крупных и мелких масштабах. Впервые доказано, что азимутальные осесимметричные течения доминируют в крупных масштабах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 970564402 и № 960564048).

Литература

1. С. И. Брагинский, ДАН **149**, 8 (1963).
2. F. H. Busse, Chaos **4** (2), 123 (1994).
3. J. E. Hart, G. A. Glatzmaier, and J. Toomre, J. Fluid Mech. **173**, 519 (1986).
4. G. A. Glatzmaier and P. Olson, Geoph. Astroph. Fluid Dyn. **70**, 113 (1993).
5. G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, Phys. Earth Planet Int. **91**, 63 (1995).
6. G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, Contemporary Physics **38**, № 4, 269 (1997).
7. A. Tilgner and F. H. Busse, J. Fluid Mech. **332**, 359 (1997).
8. R. Hollerbach and C. A. Jones, Nature **365**, 541 (1993).
9. S. V. Starchenko, Geoph. Astroph. Fluid Dyn. **77**, 55 (1994).
10. S. V. Starchenko and M. Kono, Geoph. Astroph. Fluid Dyn. **82**, 93 (1996).
11. Л. В. Ксанфомалити, Астроном. вестник **32**, 37 (1998).
12. X. Song and P. G. Richards, Nature **382**, 221 (1996).
13. J. Bloxham and A. Jackson, J. Geophys. Res. **97**, 19537 (1992).
14. С. В. Старченко, ЖЭТФ **112**, 2056 (1997).
15. A. A. Ruzmaikin and S. V. Starchenko, Icarus **93**, 82 (1991).
16. D. E. Loper, Geophys. J. Roy. Astron. Soc. **54**, 389 (1978).
17. В. Н. Жарков, В. П. Трубинин, *Физика планетных недр*, Наука, Москва (1980).