

СУПЕРДИФфуЗИЯ И УСТОЙЧИВЫЕ ЗАКОНЫ

В. М. Золотарев

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
117966, Москва, Россия*

В. В. Учайкин*, В. В. Саенко

*Ульяновский государственный университет
432700, Ульяновск, Россия*

Поступила в редакцию 20 марта 1998 г.

Уравнение супердиффузии с дробной степенью лапласиана $\Delta^{\alpha/2}$ в N -мерном пространстве, описывает асимптотическое ($t \rightarrow \infty$) поведение обобщенного пуассоновского процесса с плотностью распределения пробегов (скачков) $\sim |x|^{-\alpha-1}$. Решения этого уравнения принадлежат классу сферически-симметричных устойчивых распределений. Приведены основные свойства этих решений, их представления в виде интегралов и рядов, результаты численных расчетов. Показано, что учет конечной скорости свободного движения частицы при $\alpha > 1$ сводится лишь к уменьшению коэффициента диффузии: форма распределения остается устойчивой. При $\alpha < 1$ ситуация радикально меняется: скорость расширения диффузионного пакета превышает скорость свободного движения частицы и уравнение супердиффузии теряет физический смысл.

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с возрастающим интересом к процессам аномальной диффузии [1, 2] в последние годы интенсивно обсуждается возможность обобщения уравнения диффузии

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}) \quad (1)$$

путем замены обычных операторов дифференцирования соответствующими операторами дробного порядка. С физической точки зрения замена $\partial/\partial t \rightarrow (\partial/\partial t)^\beta$, $\beta < 1$ ассоциируется с влиянием распределенных в среде ловушек, случайное время τ пребывания частиц в которых характеризуется плотностью вероятностей

$$q(t) \propto t^{-\beta-1}, \quad t \rightarrow \infty$$

с бесконечным средним значением, а введение дробного лапласиана $\Delta^{\alpha/2}$ ассоциируется с аномально широким распределением пробегов частиц,

$$p(r) \propto r^{-\alpha-1}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Первый режим называется субдиффузией (диффузионный пакет расплывается со временем медленнее, чем в случае обычной диффузии), второй — супердиффузией (пакет расплывается быстрее) [3–6]. Мы ограничимся здесь рассмотрением второго режима аномальной диффузии, отметив, что впервые уравнение с лапласианом дробного

*E-mail: uchaikin@themp.univ.sibirsk.su

($\alpha = 1/3$) порядка было предложено еще А. С. Мониним [7] (см. также [8]) в связи с описанием диффузии в турбулентной среде.

В работе [9] приведено обобщение уравнения (1) на случай супердиффузии в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^\alpha \rho(\mathbf{r}, t)$$

вместе с формулой

$$\hat{F} \nabla^\alpha \rho = k^\alpha \hat{\rho}(\mathbf{k}, t), \quad (2)$$

где

$$\hat{F} f \equiv \hat{f}(\mathbf{k}) = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

означает преобразование Фурье функции $f(\mathbf{r})$, а показатель α распространен на весь интервал $(0, 2)$. Заметим, однако, что при $\alpha \rightarrow 2$ формула (2) не переходит в результат

$$\hat{F} \nabla^2 \rho = -k^2 \hat{\rho},$$

справедливый для нормальной диффузии, а при $\alpha = 1$ оператор ∇^1 не совпадает с векторным оператором ∇ , что затрудняет интерпретацию оператора дробного дифференцирования как дробной степени дифференциального оператора.

Эти проблемы легко снимаются, если определить дробную производную Рисса стандартным образом — через лапласиан, как это сделано в книге [10], на которую, кстати, и ссылается автор работы [9]. Тогда уравнение супердиффузии примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -D(-\Delta)^{\alpha/2} \rho(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

где оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ определяется соотношением

$$(-\Delta)^{\alpha/2} \rho = \hat{F}^{-1} |k|^\alpha \hat{F} \rho. \quad (4)$$

Определение (4) остается справедливым и в случае произвольной размерности N пространства, векторы которого мы будем обозначать через x и k , а скалярное произведение $k_1 x_1 + \dots + k_N x_N$ — через kx , так что преобразование Фурье функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, запишется в виде

$$\hat{F} f \equiv \hat{f}(k) = \int e^{ikx} f(x) dx.$$

Явное представление дробного лапласиана осуществляется в виде гиперсингулярного интеграла

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = \frac{1}{d_{N,n}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\Delta_y^n f)(x)}{|y|^{N+\alpha}} dy,$$

где

$$(\Delta_y^n f)(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x - my)$$

— нецентрированные разности, n — любое целое число, превышающее α , а нормировочный множитель $d_{N,n}(\alpha)$ определяется формулой

$$d_{N,n}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \exp i x_1)^n |x|^{-N-\alpha} dx.$$

Подробное изложение теории риссова дифференцирования приведено в упоминавшейся уже книге [10], своего рода энциклопедии по дробному анализу.

Настоящая работа посвящена обсуждению физического смысла уравнения (3), его решений и области применимости. Имея в виду самостоятельную важность проблем одномерной и двумерной диффузии, мы рассмотрим N -мерную диффузию.

2. ПРОЦЕСС ЛЕВИ

Формально супердиффузию легко описать в рамках обобщения винеровского процесса. Для этого достаточно записать уравнение Колмогорова—Чепмена для стационарного марковского процесса с независимыми приращениями,

$$\rho(x, t) = \int \rho(x', t') \rho(x - x', t - t') dx', \quad (5)$$

$$x, x' \in \mathbb{R}^N, \quad t, t' \in \mathbb{R}_+, \quad 0 < t' < t, \quad \rho(x, 0) = \delta(x),$$

и рассмотреть класс его автомодельных решений

$$\rho^{(\alpha)}(x, t) = (Dt)^{-N/\alpha} g^{(\alpha)}(x(Dt)^{-1/\alpha}), \quad D > 0, \quad \alpha > 0. \quad (6)$$

Преобразование Фурье приводит уравнения (5), (6) к виду

$$\hat{\rho}^{(\alpha)}(k, t) = \hat{\rho}^{(\alpha)}(k, t') \hat{\rho}^{(\alpha)}(k, t - t'),$$

$$\hat{\rho}^{(\alpha)}(k, t) = \hat{g}^{(\alpha)}(k(Dt)^{1/\alpha}), \quad k \in \mathbb{R}^N.$$

Обозначив $(Dt)^{1/\alpha} = \lambda$, $(Dt')^{1/\alpha} = \lambda_1$ и $(D(t - t'))^{1/\alpha} = \lambda_2$, видим, что $\hat{g}^{(\alpha)}(k)$ удовлетворяет соотношению

$$\ln \hat{g}^{(\alpha)}(\lambda k) = \ln \hat{g}^{(\alpha)}(\lambda_1 k) + \ln \hat{g}^{(\alpha)}(\lambda_2 k) \quad (7)$$

при

$$\lambda^\alpha = \lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha. \quad (8)$$

В случае сферически-симметричных распределений $\hat{g}^{(\alpha)}(k)$ зависит лишь от $|k|$ и тогда решением уравнения (7) является (см. [11])

$$\hat{g}^{(\alpha)}(k) = e^{-|k|^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad (9)$$

следовательно,

$$\hat{\rho}^{(\alpha)}(k, t) = e^{-D|k|^{\alpha}t}. \quad (10)$$

Ограничение $\alpha \leq 2$ обусловлено тем, что при $\alpha > 2$ функция (9) теряет свойства характеристической функции, т. е. ее обратное преобразование Фурье перестает быть плотностью вероятностей (становится знакопеременным).

Преобразование Фурье (10) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \hat{\rho}^{(\alpha)}}{\partial t} = -D|k|^{\alpha} \hat{\rho}^{(\alpha)},$$

которое, согласно N -мерному аналогу формулы (4), в результате обратного преобразования приводит к уравнению для плотности вероятности

$$\frac{\partial \rho^{(\alpha)}}{\partial t} = -D(-\Delta)^{\alpha/2} \rho^{(\alpha)}(x, t), \quad \rho(x, 0) = \delta(x), \quad (11)$$

обобщающему (3) на N -мерный случай. В одномерном случае оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ переходит в производную Маршо [10]. Следуя работе [12], назовем рассматриваемый процесс процессом Леви. При $\alpha = 2$ он превращается в винеровский процесс.

Согласно (7)–(10), решения уравнения супердиффузии (11) принадлежат классу строго устойчивых N -мерных распределений [13, 14], точнее, составляют подмножество сферически-симметрических распределений этого класса, в число которых входит и многомерное гауссовское распределение ($\alpha = 2$). Важнейшей особенностью устойчивых распределений, отличных от гауссова, является то, что абсолютные моменты

$$\langle |x|^{\mu} \rangle \equiv \int g^{(\alpha)}(x) |x|^{\mu} dx$$

бесконечны при $\mu \geq \alpha$. Бесконечность дисперсии означает, что для характеристики ширины диффузионного пакета необходимо использовать другую меру. В качестве последней удобно принять радиус шара $R_p(t)$, содержащего фиксированную вероятность p

$$\int_{|x| < R_p(t)} \rho^{(\alpha)}(x, t) dx = p.$$

Подставляя сюда (6) и проводя замену переменной интегрирования, приходим к выражению

$$\int_{|x| < R_p(t)(Dt)^{-1/\alpha}} g^{(\alpha)}(x) dx = p,$$

означающему, что

$$R_p(t) \propto t^{1/\alpha}, \quad t \rightarrow \infty.$$

При $\alpha = 2$ мы имеем нормальную скорость расширения диффузионного пакета, при $\alpha < 2$ его ширина растет быстрее, чем в нормальном случае.

3. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Одномерные устойчивые законы подробно рассмотрены в книгах [13, 15]. Остановимся подробнее на некоторых свойствах N -мерных устойчивых плотностей

$$g_N^{(\alpha)}(x) = (2\pi)^{-N} \int \exp\{-ikx - |k|^\alpha\} dk, \quad (12)$$

через которые выражаются решения уравнений супердиффузии в N -мерном пространстве. Для первых трех размерностей с учетом сферической симметрии характеристических функций формула (12) принимает следующий вид:

$$g_1^{(\alpha)}(x) = \pi^{-1} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} \cos(s|x|) ds,$$

$$g_2^{(\alpha)}(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} J_0(s|x|) s ds,$$

$$g_3^{(\alpha)}(x) = (2\pi^2|x|)^{-1} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} \sin(s|x|) s ds.$$

Для произвольной размерности [13]

$$g_N^{(\alpha)}(x) = (2\pi)^{-N/2} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} J_{N/2-1}(s|x|) (s|x|)^{1-N/2} s^{N-1} ds. \quad (13)$$

Функции $f_N(r)$, определяющие зависимость сферически-симметричных плотностей от модуля вектора $r = |x|$,

$$f_N(|x|) = g_N^{(\alpha)}(x)$$

связаны дифференциальным соотношением

$$df_N/dr = -2\pi r f_{N+2}(r). \quad (14)$$

Наряду с интегральным представлением (13) для вычислительных и аналитических целей полезны представления устойчивых плотностей в виде двух рядов:

$$g_N^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\pi} (|x|\sqrt{\pi})^{-N} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma((n\alpha+N)/2) \Gamma(n\alpha/2+1)}{\Gamma(n+1)} \sin(\alpha n \pi/2) (|x|/2)^{-n\alpha},$$

$$g_N^{(\alpha)}(x) = \frac{2}{\alpha} (2\sqrt{\pi})^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma((2/\alpha)n + N/\alpha)}{\Gamma(n + N/2) \Gamma(n+1)} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{2n}.$$

Первый из них сходится при $\alpha \in (0, 1)$ и является асимптотическим при $\alpha \in [1, 2)$, второй, наоборот, сходится в области значений $\alpha \in [1, 2]$ и является асимптотическим для $\alpha \in (0, 1)$.

Еще одно интегральное представление для нечетных размерностей можно получить из симметричной одномерной плотности, записанной в виде [13]

$$g_1^{(\alpha)}(x) = \frac{\alpha}{\pi|\alpha - 1|} |x|^{1/(\alpha-1)} \int_0^{\pi/2} U_\alpha(\varphi) \exp \left\{ -|x|^{\alpha/(\alpha-1)} U_\alpha(\varphi) \right\} d\varphi, \quad (15)$$

где

$$U_\alpha(\varphi) = \left(\frac{\sin(\alpha\varphi)}{\cos \varphi} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \frac{\cos((\alpha - 1)\varphi)}{\cos \varphi}, \quad \alpha \neq 1,$$

последовательным применением формулы (14). В отличие от (13) это представление не содержит под интегралом осциллирующих функций и потому более удобно для численных расчетов (для $\alpha = 1$ в подобной формуле нет необходимости, поскольку плотности выражаются в элементарном виде, приведенном ниже).

Плотности $g_N^{(\alpha)}(x)$ выражаются через элементарные или специальные функции лишь в исключительных случаях:

$$g_N^{(2)}(x) = (4\pi)^{-N/2} e^{-x^2/4}$$

— закон Гаусса (с дисперсией, равной 2),

$$g_N^{(1)}(x) = \Gamma((N + 1)/2) [\pi(1 + x^2)]^{-(N+1)/2}$$

— закон Коши,

$$g_N^{(2/3)}(x) = \frac{\sqrt{3}}{6\pi^{N/2}} \frac{\Gamma(N/2 + 1/3)\Gamma(N/2 + 2/3)}{\Gamma(5/6)\Gamma(7/6)} |x|^{-N} e^{2/(27x^2)} W_{-N/2, 1/6}(4/(27x^2)),$$

где

$$W_{\nu, \mu}(z) = \frac{z^\nu e^{-z/2}}{\Gamma(\mu - \nu + 1/2)} \int_0^\infty e^{-t} (1 + t/z)^{\mu+\nu-1/2} t^{\mu-\nu-1/2} dt$$

— функция Уиттекера. Плотность $g_N^{(1/2)}(x)$ для нечетных размерностей $N = 2n + 1$ может быть представлена в виде

$$g_N^{(1/2)}(x) = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{\pi} \right)^{(N-1)/2} \int_0^\infty t^{N-1} L_N(t|x|) \sin t dt,$$

где

$$L_N(\sqrt{s}) = \frac{d^n}{ds^n} (\sqrt{s} + 1/4)^{-3/2}, \quad s > 0.$$

Например,

$$p_1^{(1/2)}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty (t|x| + 1/4)^{-3/2} \sin t dt,$$

$$p_3^{(1/2)}(x) = \frac{3}{16\pi^2} |x|^{-1} \int_0^{\infty} (t|x| + 1/4)^{-3/2} t \sin t dt$$

и т. д. Отметим, однако, что приведенные выше формулы для $g_N^{(1/2)}$ содержат под интегралом знакопеременную функцию и вследствие этого не имеют особых преимуществ по сравнению с формулами обратного преобразования Фурье (12), (13).

Остановимся еще на одном распределении, описывающем случайную напряженность электрического или гравитационного поля, создаваемую пуассоновским ансамблем точечных источников (распределение Хольцмарка):

$$g_3^{(3/2)}(x) = \frac{1}{2\pi^2 |x|^3} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left(z/|x|\right)^{3/2}\right\} z \sin z dz =$$

$$= \frac{3}{2\pi^2} \int_0^{\pi/2} \left[3|x|^3 U_{3/2}^2(\varphi) - 2U_{3/2}(\varphi)\right] \exp\left\{-|x|^3 U_{3/2}(\varphi)\right\} d\varphi,$$

$$\int_{|x|>r} g_3^{(3/2)}(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 + 3U_{3/2}(\varphi)r^3) e^{-U_{3/2}(\varphi)r^3} d\varphi.$$

С ним связано распределение пекулярных скоростей галактик во Вселенной, позволяющее, в свою очередь, оценить важнейший космологический параметр — среднюю плотность вещества [16].

Значения плотностей $g_3^{(\alpha)}(x)$ и их графическое представление можно найти в работах [17, 18].

4. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Как отмечалось в разд. 2, ширина диффузионного пакета, описываемого в рамках процесса Леви, растет пропорционально $t^{1/\alpha}$. При $\alpha < 1$ она растет быстрее, чем в баллистическом режиме (т. е. в случае свободного движения частиц с ограниченной предельной скоростью). Этот явно нефизический результат обусловлен автомодельностью процесса Леви, в котором нет места понятию скорости свободного движения частицы. И дело не только в условии $\alpha < 1$ — просто здесь этот эффект проявляется более выпукло. При $\alpha > 1$ вплоть до предельного значения $\alpha = 2$ эффект автомодельности проявляется в том, что в любой момент времени, сколь угодно близкий к начальному (когда частица находилась в начале координат), распределение $\rho(x, t)$ отлично от нуля во всем пространстве (в теории нормальной диффузии этот «дефект» отмечался еще Эйнштейном).

Освободиться от указанного дефекта можно переходом от винеровской модели к модели случайного блуждания частицы с конечной скоростью свободного движения v .

Мы рассмотрим следующую модель. В начальный момент времени $t = 0$ частица находится в начале координат $x = 0$ и пребывает там случайное время τ_0 , после чего смещается на случайный вектор ξ_1 со скоростью v и вновь пребывает в состоянии покоя

случайное время τ_1 , затем процесс продолжается аналогичным образом. Все случайные переменные $\tau_0, \tau_1, \xi_1, \tau_2, \xi_2, \dots$ взаимно независимы, времена τ_i имеют одинаковую плотность вероятности показательного вида

$$q(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad \mu > 0,$$

N -мерные векторы ξ_i также распределены одинаково.

Вместо одной частицы удобно рассматривать множество независимых траекторий и говорить о плотности $\rho(x, t)$ как о плотности числа частиц.

Итак, плотность частиц $\rho(x, t)$ в рассматриваемом случае состоит из двух компонент $\rho_0(x, t)$ и $\rho_v(x, t)$, относящихся соответственно к частицам в состоянии покоя и движения:

$$\rho(x, t) = \rho_0(x, t) + \rho_v(x, t). \quad (16)$$

За время dt плотность находящихся в ловушках частиц изменится на величину

$$d\rho_0(x, t) = \rho_0(x, t + dt) - \rho_0(x, t),$$

состоящую из двух частей. Первая часть — отрицательная, обусловлена выходом частиц из ловушек,

$$[d\rho_0(x, t)]_- = -\mu\rho_0(x, t)dt,$$

вторая — положительная, отражает попадание движущихся частиц в ловушки:

$$[d\rho_0(x, t)]_+ = \int dx' p(x') \mu \rho_0(x - x', t - |x'|/v) dt.$$

В результате приходим к следующему уравнению для $\rho_0(x, t)$:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = -\mu\rho_0 + \mu \int dx' p(x') \rho_0 \left(x - x', t - \frac{|x'|}{v} \right). \quad (17)$$

Напомним, что $p(x)dx$ есть вероятность того, что частица, вылетающая из начала координат, испытает первое столкновение в элементе объема $dx = dS d|x|$, обозначим через $P(x)dS$ вероятность того, что частица пересечет элементарную площадку dS сферы радиуса $|x|$ без взаимодействия на пути $|x|$. Вклад в плотность ρ_v такой частицы равен $(1/v)P(x)\delta(t - |x|/v)$. Заменив здесь x на x' и применив этот результат ко всем частицам, выходящим из ловушек и проходящим в окрестности точки x в момент времени t , получим:

$$\begin{aligned} \rho_v(x, t) &= \frac{1}{v} \int dx' \int dt' P(x') \delta \left(t' - \frac{|x'|}{v} \right) \mu \rho_0(x - x', t - t') = \\ &= \frac{1}{v} \int dx' P(x') \mu \rho_0(x - x', t - t'). \end{aligned} \quad (18)$$

В трехмерном пространстве при показательном распределении пробега система уравнений (17), (18) описывает нестационарный перенос нейтронов с учетом запаздывания и, с точностью до некоторых деталей (отсутствие процессов поглощения и рассеяния, постоянство скорости), адекватна уравнениям (1.13), (1.14) книги [19]. При

$\mu \rightarrow 0$ она переходит в нестационарное односкоростное кинетическое уравнение с изотропным рассеянием, широко используемое в нейтронной физике [19, 20]. Ввиду этого мы назовем уравнения (18), (19) кинетическими уравнениями.

В пределе $v = \infty$ в сумме (16) остается лишь одно слагаемое:

$$\rho(x, t) = \rho_0(x, t),$$

удовлетворяющее уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mu \rho + \mu \int dx' p(x') \rho(x - x', t), \quad (19)$$

описывающему обобщенный пуассоновский процесс [21].

Возвращаясь к вероятностной интерпретации записанных уравнений, будем считать общим начальным условием для них

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x, 0) = \delta(x).$$

5. СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА И УРАВНЕНИЯ СУПЕРДИФФУЗИИ

Преобразуем уравнение Колмогорова (19) к уравнению для характеристической функции $\hat{\rho}(k, t)$ распределения $\rho(x, t)$:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\mu [1 - \hat{p}(k)] \hat{\rho}(k, t), \quad \hat{\rho}(k, 0) = 1, \quad (20)$$

где $\hat{p}(k)$ — компонента Фурье плотности вероятности перехода $p(x)$. Решение уравнения (20) имеет вид

$$\hat{\rho}(k, t) = \exp \{ - [1 - \hat{p}(k)] \mu t \}, \quad (21)$$

а его асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ определяется поведением $\hat{p}(k)$ при малых $|k|$.

Если второй момент распределения $p(x)$

$$\int p(x) x^2 dx = \bar{\xi}^2 < \infty, \quad (22)$$

то

$$1 - \hat{p}(k) \sim (\bar{\xi}^2/2) k^2, \quad |k| \rightarrow 0,$$

и характеристическая функция (21) в области больших t принимает вид

$$\hat{\rho}(k, t) \sim \hat{\rho}_{as}(k, t) = \exp \left\{ - \left(\mu t \bar{\xi}^2 / 2 \right) k^2 \right\}. \quad (23)$$

Поскольку

$$\frac{\partial \hat{\rho}_{as}(k, t)}{\partial t} = - \frac{\mu \bar{\xi}^2}{2} k^2 \hat{\rho}_{as}(k, t),$$

соответствующая этой асимптотике плотность удовлетворяет обычному диффузионному уравнению

$$\frac{\partial \rho_{as}}{\partial t} = D \Delta \rho_{as}(x, t)$$

с коэффициентом диффузии

$$D = \mu \bar{\xi}^2 / 2$$

и начальным условием

$$\rho_{as}(x, 0) = \delta(x).$$

Мы остановились здесь на этом, в общем-то, тривиальном факте, чтобы подчеркнуть, что асимптотика решения уравнения (19) при условии (22) является точным решением обычного диффузионного уравнения. В случае, когда (22) не выполняется, но имеет место условие

$$\int_{|x| > R} p(x) dx \sim AR^{-\alpha}, \quad R \rightarrow \infty, \quad (24)$$

асимптотика решения уравнения (19) совпадает с точным решением уравнения супердиффузии, в чем нетрудно убедиться, учитывая, что

$$1 - \hat{p}(k) \sim A'|k|^\alpha, \quad k \rightarrow 0,$$

и получая вместо (23)

$$\hat{\rho}(k, t) \sim \hat{\rho}_{as}(k, t) = \exp\{-\mu t A'|k|^\alpha\}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Согласно (6) и (10)

$$\rho_{as}(k, t) = \rho^{(\alpha)}(x, t) = (Dt)^{-N/\alpha} g^{(\alpha)}(x(Dt)^{-1/\alpha}), \quad (25)$$

где

$$D = \mu A'.$$

Иными словами, уравнение супердиффузии (11) описывает асимптотическое поведение плотности распределения частицы, совершающей с бесконечной скоростью блуждание в среде с ловушками, время пребывания в которых τ распределено по показательному закону, а плотность распределения пробегов (скачков) имеет степенной хвост вида $\tau^{-\alpha-1}$.

Результат (25) легко может быть получен и более простым путем на основании свойств устойчивых законов. Подобно тому как при условии конечности второго момента (22) нормированная сумма

$$S_n = (Bn)^{-1/2} \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad B = \bar{\xi}^2,$$

n независимых случайных векторов ξ_i при $n \rightarrow \infty$ имеет N -мерное гауссовское распределение (центральная предельная теорема), при выполнении условия (24) нормированная сумма

$$S_n = (Bn)^{-1/\alpha} \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad B = B(\alpha, A), \quad (26)$$

при больших n описывается устойчивым распределением с показателем α (обобщенная предельная теорема). Распределение же числа слагаемых за время t дается законом Пуассона со средним значением $\bar{n} = \mu t$ и относительными флуктуациями $(\mu t)^{-1/2}$. Ввиду этого при $\mu t \rightarrow \infty$ в формуле (26) n можно заменить на μt . Учитывая, что при такой замене $\sum_{i=1}^n \xi_i$ переходит в случайный вектор $\xi(t)$ положения частицы в момент времени t , получим

$$\xi(t) = (Dt)^{1/\alpha} \zeta, \quad D = B\mu, \quad (27)$$

где ζ — случайный вектор с симметричной устойчивой плотностью $g^{(\alpha)}(x)$, откуда и следует формула (25).

6. ЭФФЕКТ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ

Чтобы учесть влияние конечной скорости свободного движения блуждающей частицы на асимптотику распределения $\rho(x, t)$, следует вернуться к уравнениям (17), (18) и провести анализ, аналогичный проведенному в разд. 5 для уравнения Колмогорова. Мы выполнили его, однако в силу громоздкости математических выкладок мы ограничимся в данной работе элементарным выводом, приводящим к тому же результату, что и более строгий анализ.

В случае конечной скорости v векторной сумме

$$S_n = (Bn)^{-1/\alpha} \sum_{i=1}^n \xi_i$$

соответствует случайное время

$$\theta = \sum_{i=1}^n \left(\tau_i + \frac{|\xi_i|}{v} \right).$$

В случае $\alpha > 1$ математическое ожидание $|\xi_i|$ конечно и при $n \rightarrow \infty$ в силу закона больших чисел можно положить

$$\theta \approx t = n(1/\mu + a/v), \quad a = \overline{|\xi_i|}. \quad (28)$$

Находя отсюда n

$$n = (1 + \mu a/v)^{-1} \mu t$$

и вводя обозначение

$$t_v = (1 + \mu a/v)^{-1} t,$$

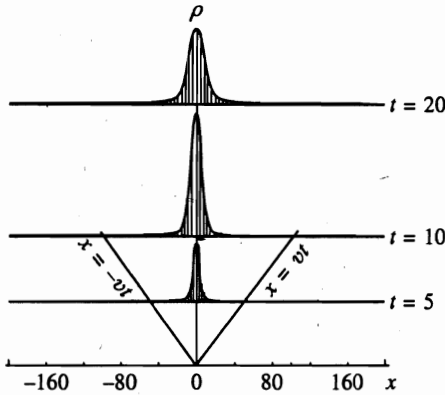


Рис. 1. Распределение $\rho(x, t)$ в случае одномерной супердиффузии для $\alpha = 3/2$, $\mu = 1$. Гистограммы — результаты метода Монте-Карло (10^4 траекторий, $v = 10$), представляющие решение кинетических уравнений (17), (18). Сплошные кривые — решения супердиффузионного уравнения (11) с использованием D_v вместо D

мы приходим к тому же результату, что и в разд. 5, только вместо t фигурирует t_v :

$$\hat{\rho}_{as}(x, t) = (Dt_v)^{-N/\alpha} g^{(\alpha)}(x(Dt_v)^{-1/\alpha}), \quad \alpha > 1. \quad (29)$$

Физически этот результат понятен: наличие конечной скорости свободного движения замедляет процесс расширения диффузионного пакета по сравнению со случаем $v = \infty$. Замена t на меньшее время t_v , как раз и учитывает (в асимптотическом смысле) это замедление.

Поскольку коэффициент диффузии и время входят в асимптотическую плотность в качестве произведения, результат (29) можно переписать в ином виде:

$$\rho_{as}(x, t) = (D_v t)^{-N/\alpha} g^{(\alpha)}(x(D_v t)^{-1/\alpha}), \quad \alpha > 1,$$

где

$$D_v = (1 + \mu a/v)^{-1} D.$$

Это позволяет нам записать для асимптотической плотности диффундирующей с конечной скоростью свободного движения частицы уравнение в дробных производных:

$$\frac{\partial \rho_{as}}{\partial t} = -D_v (-\Delta)^{\alpha/2} \rho_{as}(x, t).$$

Таким образом, учет влияния конечной скорости приводит лишь к изменению (уменьшению) коэффициента диффузии в уравнении с дробным лапласианом, что сохраняет форму асимптотического распределения, описываемого сферически-симметричным устойчивым законом. Но этот вывод справедлив только при условии $\alpha > 1$, которое использовалось при замене (28). При $\alpha < 1$ ситуация совершенно иная: асимптотическое распределение в случае конечной скорости никаким линейным преобразованием не приводится к решению с $v = \infty$.

Последнее обстоятельство легко понять из следующих соображений. Как отмечалось в разд. 2, ширина («радиус») диффузионного пакета растет со временем пропорционально $t^{1/\alpha}$. Наличие конечной скорости обращает в нуль плотность распределения вне шара радиуса $R = vt$. Поэтому, если $\alpha > 1$, влияние последнего (кинематического) ограничения ослабевает с течением времени, поскольку радиус пакета растет медленнее, чем $R = vt$. Однако при $\alpha < 1$ распределение, даваемое диффузионным уравнением (11), расплывается быстрее, чем $R = vt$, и кинематическое ограничение становится

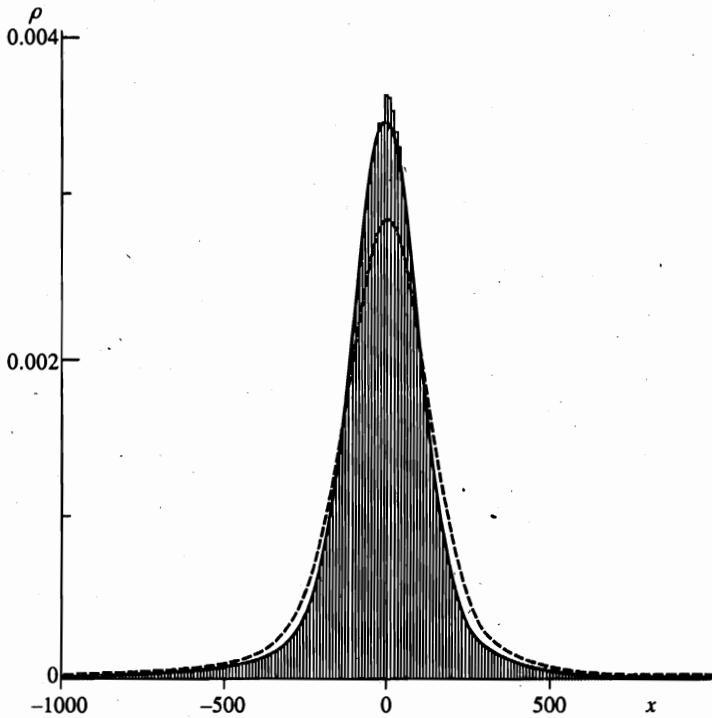


Рис. 2. Эффект конечной скорости ($\alpha = 3/2$, $\mu = 1$ и $t = 10^3$). Гистограмма — результат моделирования методом Монте-Карло ($2 \cdot 10^5$ траекторий, $v = 5$) решения кинетического уравнения; штриховая кривая — решение уравнения (11) с коэффициентом диффузии D ($v = \infty$), сплошная кривая — то же с коэффициентом D_v .

преобладающим фактором в формировании асимптотического распределения. Будучи зажатым сферой $R = vt$, это распределение имеет совершенно иной вид, чем устойчивое распределение. По-видимому, это означает, что уравнение (12) с лапласианом степени $\alpha/2$ при $\alpha < 1$ вообще неприменимо к описанию реальных процессов диффузии.

Приведенные на рис. 1–3 результаты моделирования методом Монте-Карло одномерного блуждания частицы в сопоставлении с решениями супердиффузионного уравнения подтверждают сделанные выше выводы: видно, что при $\alpha = 3/2$ замена D на D_v обеспечивает асимптотическое согласие решений супердиффузионного и кинетического уравнений, тогда как при $\alpha = 1/2$ решения этих уравнений совершенно различны по форме.

7. ВЫВОДЫ

1. Уравнение супердиффузии (11) описывает асимптотическое поведение обобщенного пуассоновского процесса с мгновенными (скачкообразными) независимыми приращениями, абсолютная величина которых распределена с плотностью $p(r) \propto r^{-\alpha-1}$, $0 < \alpha < 2$.

2. Решения уравнения (11) принадлежат классу сферически-симметричных устойчивых распределений $g^{(\alpha)}(x)$, свойства которых описаны в настоящей работе.

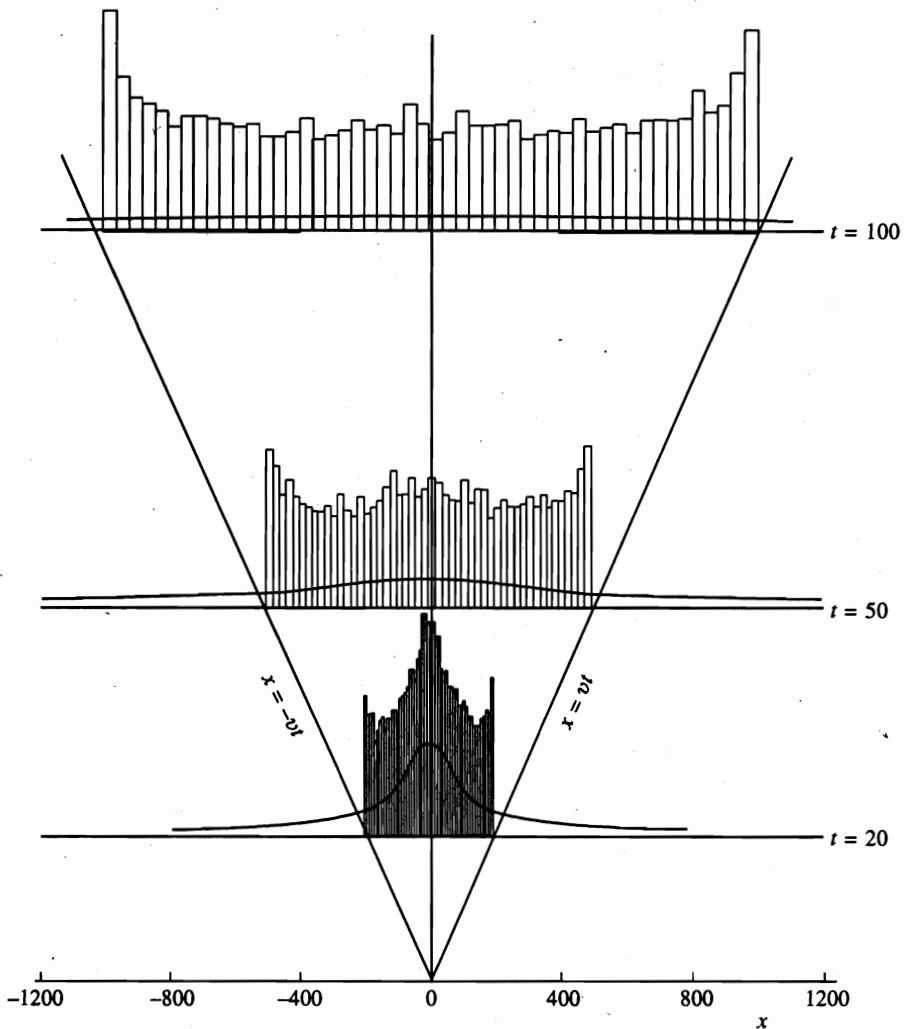


Рис. 3. Распределение $\rho(x, t)$ в случае одномерной супердиффузии для $\alpha = 1/2, \mu = 1$. Гистограммы — результаты метода Монте-Карло (10^4 траекторий, $v = 10$), сплошные кривые — решения уравнения (11).

3. При $\alpha \in [1, 2]$ уравнение супердиффузии описывает и асимптотическое поведение распределения блуждающей частицы с конечной скоростью v свободного движения (при условии замены D на $D_v = (1 + \mu a/v)^{-1} D$, где a — средний пробег, а $1/\mu$ — среднее время пребывания в ловушке).

4. При $\alpha < 1$ супердиффузионный пакет расплывается в пространстве быстрее, чем пакет свободно движущихся частиц, и решения супердиффузионного и кинетического уравнений имеют совершенно разные асимптотики.

Последнее может служить основанием для вывода о неприменимости супердиффузионного уравнения к описанию реальных физических процессов в области характеристического показателя $\alpha < 1$.

Литература

1. J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Phys. Rep.* **195**, 127 (1990).
2. M. V. Isichenko, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 961 (1992).
3. R. R. Nigmatullin, *Phys. Stat. Sol. (b)* **123**, 739 (1984).
4. R. Metzler, W. G. Glöckle, and T. F. Nonnenmacher, *Physica A* **211**, 13 (1994).
5. H. C. Fogedby, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2517 (1994).
6. К. В. Чукбар, *ЖЭТФ* **108**, 1875 (1995).
7. А. С. Монин, *ДАН СССР* **105**, № 2, 256 (1955).
8. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, часть 2, Наука, Москва (1967), с. 509.
9. *A. Comptes, Phys. Rev. E* **53**, 4191 (1996).
10. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск (1987), с. 357.
11. П. Леви, *Стохастические процессы и броуновское движение*, Наука, Москва (1972), с. 164.
12. E. W. Montroll and B. J. West, in *Fluctuation Phenomena*, ed. by E. W. Montroll and J. L. Lebowitz, North-Holland, Amsterdam (1979), p. 61.
13. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Мир, Москва (1983).
14. V. M. Zolotarev, in *Contributions to probability*, ed. by J. Gani and V. K. Rohatgi, Acad. Press. Inc. (London) (1981), p. 283.
15. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*, Гостехиздат, М.-Л. ГИТТЛ (1949).
16. M. Rowan-Robinson, A. Lawrence, W. Saunders et al., *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **247**, 1 (1990).
17. V. V. Uchaikin and G. G. Gusarov, *Proc. 3th Symp. on the Renormalization Group*. Дубна, ОИЯИ (1997), с. 417.
18. V. V. Uchaikin and G. G. Gusarov, *J. Math. Phys.* **38**, 2453 (1997).
19. С. Б. Шихов, *Вопросы математической теории реакторов*, Атомиздат, Москва (1973).
20. К. Кейз, П. Цвайфель, *Линейная теория переноса*, Мир, Москва (1972).
21. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2. Мир, Москва (1984).