

## РАДИАЦИОННАЯ АСИМПТОТИКА ВЫНУЖДЕННОГО КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ

А. А. Заболотский\*

*Институт автоматизации и электрометрии  
Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 19 июня 1998 г.

В рамках точно интегрируемой модели исследуется асимптотическое решение, описывающее преобразование энергии при вынужденном комбинационном рассеянии. Модель учитывает движение заселенностей и нелинейный эффект Штарка. Рассматриваются начальные условия, приводящие к возникновению радиационного решения. Граничные условия отвечают инжектированию в среду мощных импульсов поля накачки и стокова поля постоянной амплитуды. Показано, что радиационная асимптотика такой задачи в пределе слабого возбуждения среды и в пределе сильных быстропеременных полей определяется ядрами уравнений Марченко, пропорциональными функциям, зависящим только от автомодельной переменной. Для этих случаев найдены аналитические решения. Для слабых полей проведены детальные численные расчеты, подтверждающие аналитические результаты. Исследуется также роль солитонной части непрерывного спектра задачи. Показана возможность генерации мощного солитона стокова поля на переднем фронте волнового пакета.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) света исследуется достаточно давно (см., например, [1]), однако интерес к этому явлению не ослабевает. Это связано с универсальностью и относительной простотой экспериментальной реализации явления. При инжектировании в среду мощных поля накачки и стокова поля в процессе ВКР генерируются пакеты импульсов; изучение природы и характеристик таких импульсов важно для практических целей.

Анализ моделей ВКР зачастую сталкивается с аналитическими трудностями, возникающими при описании поведения плотных пакетов импульсов с многими степенями свободы. Некоторые из этих трудностей могут быть преодолены в рамках точно решаемых или близких к интегрируемым моделям. Наиболее детальную информацию об эволюции полей в нелинейных средах можно получить, используя метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) [2]. Известно, что уравнения Максвелла—Блоха, описывающие ВКР в одномерной среде, интегрируемы в рамках МОЗР [3, 4] для физических начальных и граничных условий. Эволюционные уравнения модели ВКР родственны некоторым другим физическим моделям, например, модели четырехволнового смешения в среде с «керровской» нелинейностью, которая, в свою очередь, формально совпадает с «одноосной» киральной моделью на группе  $O_3$  и др. [5]. В связи с этим анализ

---

\*E-mail: Zabolotskii@iae.nsk.su

и методы решения модели ВКР представляют также самостоятельный теоретический интерес.

В моделях с сильными нелинейностями, таких как уравнения Максвелла—Блоха одночастотного взаимодействия поля с двухуровневой средой, модель ВКР и других, радиационная часть решения может давать основной вклад в описание динамики взаимодействия. Радиационное решение описывает, например, квазиавтомодельную асимптотику длинного лазерного усилителя [6]. В работах Захарова, Михайлова, Манакова, Габитова и Новокшенова МОЗР использовался для нахождения родственных автомодельных асимптотик модели комбинационного рассеяния [7, 8], уравнений Максвелла—Блоха для сред с невырожденным [9, 10] и вырожденным [11] одночастотными переходами. В работе [9] изучалась смешанная краевая задача для уравнений Максвелла—Блоха в двухуровневой среде для одночастотного перехода.

Модель Чу—Скотта [12], которая применялась в работах [8, 13, 14] для описания стимулированного комбинационного рассеяния, математически эквивалентна уравнениям Максвелла—Блоха для двухуровневого одночастотного лазерного усилителя [15]. Граничные условия для модели Чу—Скотта, отвечающие инжектированию в среду поля накачки и Стокса с постоянными амплитудами, исследовались в работах [13, 14]. Однако аналитическое решение, описывающее асимптотику, в этих работах не было найдено.

В настоящей работе изучается стимулированное комбинационное рассеяние в двухуровневой среде. Исследуется полностью интегрируемая модель, которая описывает изменение заселенностей, истощение накачки и нелинейный эффект Штарка. Рассматриваются граничные условия, отвечающие введению в торец образца волновых пакетов полей накачки и Стокса с произвольными постоянными амплитудами, и физические начальные условия для матрицы плотности среды, приводящие к вкладу действительного спектра в асимптотику. В работе найдены уравнения Марченко и асимптотическое приближенное выражение для ядра, отвечающего радиационной асимптотике, в общем случае. Явный вид радиационного решения уравнений Марченко находится в пределе слабого возбуждения среды и в пределе быстрого обмена энергией между мощными полями и средой. Численное моделирование, выполненное в пределе слабого возбуждения среды, используется для тестирования аналитических результатов.

Найденное для приведенных выше граничных условий аналитическое решение, описывающее радиационную асимптотику, является новым также для модели Чу—Скотта [13] и, соответственно, для математически идентичной модели лазерного усилителя [6]. Предложенный метод нахождения радиационной асимптотики и аналитические результаты могут быть применены к другим моделям нелинейной физики, например, к модели кирального поля или к модели взаимодействия двух поляризованных волн, распространяющихся в двухуровневой среде с керровской нелинейностью [5, 16].

При введении в среду мощных импульсов полей Стокса и накачки в общем случае, наряду с действительным спектром, необходимо учитывать «солитонную» часть спектра. В работе показано, что для бесконечно длинного ступенчатого импульса возможно возникновение части непрерывного спектра, лежащей в «солитонной» области спектральной плоскости. Для физических приложений зачастую требуется выявить условия возникновения импульса с мощным передним фронтом. Анализ зависимости динамики пакета солитонов от начальных условий, генерируемых в такой задаче, позволил найти условия, при которых на переднем фронте пакета возникает солитон с наибольшей амплитудой и наименьшей длительностью.

Структура работы такова. Следующий раздел посвящен постановке задачи. В третьем разделе приводятся уравнения МОЗР и находится приближенное асимптотическое выражение для ядра уравнений Марченко. В разд. 4 с помощью МОЗР изучается случай слабого возбуждения среды. Найдено радиационное решение, описывающее асимптотику решения для произвольных значений амплитуд полей накачки и Стокса на границе образца. Полученные аналитические результаты сравниваются с численными расчетами. В пятом разделе работы исследуется случай быстро изменяющихся полей. Найден явный вид аналитического решения, описывающего радиационную асимптотику. В разд. 6 полученные аналитические результаты применяются для объяснения аномальной формы импульсов стоксова поля, которые наблюдались в натурном эксперименте. В последнем разделе исследуется динамика солитонного пакета, который может генерироваться в системе. В Приложении найдена зависимость коэффициента рассеяния от времени для постоянных амплитуд полей накачки и Стокса и от медленно изменяющихся начальных данных.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть поле накачки и стоксово поле с амплитудами  $E_{1,2}$  соответственно распространяются в полубесконечной одномерной среде, расположенной вдоль оси  $x$ , с коэффициентом преломления  $n(\omega_j) = n_j$ , не зависящим от частоты:

$$E(x, t) = \sum_{1,2} \left( \frac{\hbar\omega_j}{2cn_j} \right)^{1/2} [e_j E_j(x, t) \exp [i(k_j x - \omega_j t)] + \text{с.с.}].$$

Здесь  $e_j$  — вектор поляризации,  $\omega_j$ ,  $k_j$  — несущая частота и волновой вектор соответственно. Условие резонанса с двухуровневой средой с частотой перехода  $\omega_0$  имеет вид

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_0 + \nu_0,$$

где  $\nu_0$  — расстройка. В дальнейшем везде, кроме разд. 7, полагаем  $\nu_0 = 0$ .

В приближении медленных огибающих уравнения Максвелла—Блоха, описывающие вынужденное комбинационное рассеяние, имеют вид (см., например, [20]):

$$\begin{aligned} \left( \partial_x + \frac{1}{v_1} \partial_t \right) E_1 &= -ib_1(N_3 - N_0)E_1 + i\kappa_0 R^* E_2, \\ \left( \partial_x + \frac{1}{v_2} \partial_t \right) E_2 &= -ib_1(N_3 - N_0)E_2 + i\kappa_0 R E_1, \\ \partial_t R &= 2i(b_1|E_1|^2 + b_2|E_2|^2)R + i\kappa_0 E_1 E_2^* N_3, \\ \partial_t N_3 &= i\kappa_0 E_1 E_2^* R + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (1)$$

Фазовые скорости равны  $v_1 = v_2 = v$ . Здесь  $v_i = c/n_i = \omega_i/k_i$ ,  $c$  — скорость света;  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\kappa_0$  — коэффициенты кубичной нелинейной восприимчивости в двухуровневой среде, выражающиеся через физические константы среды, которые даны, например, в работе [4];  $N_3$  — разность заселенностей уровней перехода,  $N_0$  — число атомов,  $R$  — поляризуемость среды,  $t$ ,  $x$  — временная и пространственные координаты соответственно.

Перепишем систему уравнений (1) в виде

$$\begin{aligned}\partial_T R_+ &= i[gR_+ F_3 + R_3 F_+] - 2i\nu_0 R_+, \\ \partial_T R_3 &= -\partial_z F_3 = \frac{i}{2}[R_+ F_- - R_- F_+], \\ \partial_z F_+ &= i[gF_+ R_3 + F_3 R_+].\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь

$$g = \frac{b_1 - b_2}{\kappa_0}, \quad z = \int_0^x \kappa_0 N_0(s) ds, \quad N_0^2(x) = N_3^2 + |R|^2, \quad T = \kappa_0 \int_0^\tau I_1(y) dy,$$

$$\tau = t - \frac{z}{c}, \quad I_1(T) = |E_1|^2 + |E_2|^2, \quad F_3 = \frac{|E_1|^2 - |E_2|^2}{I_1},$$

$$R_3 = \frac{N_3}{N_0}, \quad R_+ = \frac{R}{N_0} \exp \left[ i(b_1 + b_2) \int_0^\tau I_1(y) dy \right],$$

$$F_+ = 2 \exp \left[ i(b_1 + b_2) \int_{-\infty}^\tau I_1(s) ds \right] \frac{E_1 E_2^*}{I_1}, \quad F_- = F_+^*, \quad R_- = R_+^*.$$

Система (2) имеет интегралы:

$$|R_+|^2 + R_3^2 = 1, \quad |F_+|^2 + F_3^2 = 1. \quad (3)$$

Рассматриваются начальные условия, приводящие к появлению вклада действительного спектра в асимптотику. Предполагается, что начальное возбуждение среды описывается медленно меняющимися функциями координат  $R_3(z, 0)$ ,  $R_+(z, 0)$ . Граничные условия задаются следующим образом. В нелинейную среду в точке  $z = 0$  вводятся волновые пакеты — поля накачки и стоксова поля, — имеющие постоянные амплитуды  $E_1(0, \tau) = E_1(0, 0)$ ,  $E_2(0, \tau) = E_2(0, 0)$ . Численный анализ, выполненный для  $|g| < 1$ , показал, что для изучаемой модели радиационное решение описывает переход системы к устойчивому основному состоянию. Это состояние соответствует значениям полей и поляризации среды на бесконечности ( $z \rightarrow \infty$ ) таким, что

$$R_3(z, T) = -1, \quad R_+(z, T) = 0, \quad F_3(z, T) = -1, \quad F_+(z, T) = 0. \quad (4)$$

В разд. 7 исследуется случай бесконечно длинных импульсов полей Стокса и накачки и частичного однородного возбуждения среды в начальный момент.

### 3. АППАРАТ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

В работе посредством метода обратной задачи рассеяния для приведенных выше начальных и граничных условий исследуется, в основном, радиационная асимптотика модели (2). Солитонные и конечнозонные решения модели (2) построены в [17, 5, 18].

Радиационная асимптотика этой модели изучалась аналитически в работе автора, в которой рассматривался частный случай  $E_2(0, \tau) = 0$  и экспоненциально малой начальной поляризации:

$$\left| \ln \int_0^\infty |R_+(z, 0)| dz \right| \gg 1,$$

(см. [19]).

Система (2) для  $\nu_0 = 0$  представима в виде условия совместности двух следующих систем линейных уравнений [3, 4]:

$$\partial_z \Phi = L\Phi = \begin{pmatrix} -i(\zeta - g/2)R_3 & (\zeta + \varphi_+)R_+ \\ -(\zeta + \varphi_-)R_- & i(\zeta - g/2)R_3 \end{pmatrix} \Phi, \quad (5)$$

$$\partial_T \Phi = A\Phi = \frac{1}{4\zeta} \begin{pmatrix} i(2\zeta g - 1)F_3 & 2(\zeta + \varphi_+)F_+ \\ -2(\zeta + \varphi_-)F_- & i(2\zeta g - 1)F_3 \end{pmatrix} \Phi. \quad (6)$$

Здесь  $\zeta$  — спектральный параметр,  $\Phi$  — двухкомпонентная функция,  $\varphi_\pm = -g/2 \pm \pm(i/2)(1 - g^2)^{1/2}$ .

Перепишем спектральную проблему (5) в виде

$$\partial_z \Phi = i \begin{pmatrix} -\lambda n & -(\lambda + \phi_+)\mu \\ -(\lambda + \phi_-)\bar{\mu} & \lambda n \end{pmatrix} \Phi. \quad (7)$$

Здесь  $n = R_3$ ,  $\mu = iR_+$ ,  $\bar{\mu} = -iR_-$ ,  $\lambda = \zeta - g/2$ ,  $\phi_\pm = \varphi_\pm + g/2$ ,  $\lambda = \zeta - g/2$ .

Далее будем рассматривать случай  $g^2 < 1$ . При этом условии система стремится при  $z \rightarrow \infty$  к основному состоянию (4). Соответствующие граничному условию  $z = 0$  и асимптотическому состоянию (4) решения системы имеют вид  $\chi_0^{-,+} = \exp(-i\lambda\sigma_3 z)$ ,  $z = 0$ ,  $z \rightarrow \infty$  соответственно. Пусть  $\chi_0^{-,+}$  — фундаментальные матрицы решений Йоста ( $\chi_0^{-,+} \rightarrow \chi_0^{-,+}$  при  $z \rightarrow 0$ ,  $z \rightarrow \infty$  соответственно). Спектральная задача (7) обладает инволюцией:

$$\Phi(\lambda, z) = M\Phi(\lambda^*, z)^* M^{-1}, \quad (8)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим матрицу рассеяния  $\mathcal{S}$ :

$$\chi^- = \chi^+ \mathcal{S}(\lambda, t), \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}, \quad \det \mathcal{S} = 1. \quad (9)$$

Второй столбец матрицы Йоста

$$\chi^{-,+} = \begin{pmatrix} \psi_1^{-,+} & \bar{\psi}_1^{-,+} \\ \psi_2^{-,+} & \bar{\psi}_2^{-,+} \end{pmatrix}$$

аналитичен в верхней полуплоскости  $\lambda$ . Функции  $a(\lambda)$  и  $\bar{b}(\lambda)$  аналитичны в верхней полуплоскости, и  $a(\lambda)$  имеет там нули  $\lambda_j$ , являющиеся собственными значениями спектральной задачи (28). Из (8), (9) следует

$$\bar{\psi}_1^+ = \frac{\bar{\psi}_1^-}{a} + \frac{b^*}{a} \psi_1^+, \quad (10)$$

$$\bar{\psi}_2^+ = \frac{\bar{\psi}_2^-}{a} + \frac{b^*}{a} \psi_2^+. \quad (11)$$

Представим  $\psi^+(z, \lambda)$  в виде

$$\psi^+(z, \lambda) = \Phi_0(z, \lambda) + \int_z^\infty ds \begin{pmatrix} \lambda K_1(z, s) & (\lambda + \phi_+) K_2(z, s) \\ -(\lambda + \phi_-) K_2^*(z, s) & \lambda K_1^*(z, s) \end{pmatrix} \Phi_0(s, \lambda). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10), учитывая (8) и интегрируя с весами

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\lambda s)(\lambda + \phi_-^*)}{2\pi(\lambda + \phi_+)} d\lambda \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\lambda s)}{2\pi} d\lambda,$$

получаем следующие соответствующие уравнения Марченко:

$$\partial_z K_2(z, y) - i\phi_- K_2(z, y) + iF(z + y) + \int_z^\infty \partial_y F(y + s) K_1(z, s) ds = 0, \quad (13)$$

$$\partial_z K_1^*(z, y) + \int_z^\infty K_2^*(z, s) [\partial_y F(y + s) - i\phi_+ F(y + s)] ds = 0. \quad (14)$$

Здесь

$$F(z, T) = \int_{\mathcal{C}} \frac{b^*}{a} \frac{\exp[-i\lambda z]}{2\pi} d\lambda, \quad (15)$$

$\rho = (b^*/a)(\lambda, T)$  — коэффициент рассеяния, который содержит всю необходимую информацию для нахождения радиационного решения. Контур  $\mathcal{C}$  включает действительную ось и проходит выше полюсов в верхней половине комплексной плоскости. Вклад солитонов исследуется в последнем разделе работы. До этого ограничимся изучением вклада только радиационной части спектра, т. е. интегрирование в (15) проводится по действительной оси.

Соотношения между диагональными частями ядер  $K_{1,2}(z, z, T)$  и «потенциалом»  $n(z, T)$ ,  $r(z, T)$  находятся из (6) и (12) и имеют вид

$$i\mu(z, T) K_2^*(z, z, T) = [1 + iK_1(z, z, T)][n(z, T) - 1], \quad (16)$$

$$[1 + iK_1(z, z, T)]\mu^*(z, T) = -i[1 + n(z, T)]K_2^*(z, z, T), \quad (17)$$

откуда получаем

$$\mu(z, T) = \frac{2iK_2(z, z, T)U(z, T)}{|U(z, T)|^2 + |K_2(z, z, T)|^2}, \quad (18)$$

$$n(z, T) = \frac{|U(z, T)|^2 - |K_2(z, z, T)|^2}{|U(z, T)|^2 + |K_2(z, z, T)|^2}, \quad (19)$$

где  $U(z, T) = 1 + iK_1(z, z, T)$ .

Для решения уравнений Марченко следует вычислить ядро (15) с учетом временной зависимости данных рассеяния (105), найденной в Приложении. В этом разделе будем учитывать только вклад действительного непрерывного спектра  $\mathcal{C}_r$ , который определяет радиационную часть решения задачи. Заменим  $\lambda \rightarrow \lambda - g/2$ . После подстановки выражения (105) ядро (15) принимает вид

$$F(z + y, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp \left[ i \left( \frac{g}{2} - \lambda \right) (z + y) \right] \frac{r \exp(-2i\Omega T) + p}{c \exp(-2i\Omega T) + d}. \quad (20)$$

Здесь

$$\Omega(\lambda) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{2\lambda} - g \right)^2 + (1 - g^2)|F_+^2(0, 0)|},$$

$$r(\lambda) = A_{12} + \rho_0(i\Omega - A_{11}), \quad c(\lambda) = \rho_0 A_{21} + i\Omega + A_{11},$$

$$p(\lambda) = -A_{12} + \rho_0(i\Omega + A_{11}), \quad d(\lambda) = -\rho_0 A_{21} + i\Omega - A_{11},$$

$A_{ij}$  — значения компонент матрицы  $\|A\|$ , стоящей в правой части (6), в точке  $z = 0$ .

Знаменатель в правой части (20) обращается в нуль в точках

$$-T\Omega(\lambda_n) = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) + i\kappa(\lambda_n), \quad \kappa(\lambda_n) = \frac{1}{2} \ln \frac{d}{c}(\lambda_n). \quad (21)$$

Знак  $\Omega$  выбираем так, чтобы в пределах  $F_+(z = 0, T) = 0$ ,  $F_3(z = 0, T) = \pm 1 \operatorname{sign} \Omega$  совпадал бы со знаком  $F_3(z, T) \equiv F_3(0, T)$ , поскольку в этих пределах временная зависимость легко находится и имеет простой вид:

$$\rho(\lambda, T) = \rho_0 \exp \left[ i \int_0^T F_3(0, T) dT \left( 1 - \frac{1}{2\lambda} \right) \right].$$

Найдем асимптотическое выражение для ядра  $F(z, T)$  для больших  $T$ . Можно показать, оценивая интеграл методом перевала, что основной вклад в (20) вносит окрестность точки  $\lambda_s \sim \sqrt{T}$ . Для больших  $\lambda$  имеет место разложение

$$\Omega(\lambda_n) \approx \varepsilon \left( \Omega_0 + \frac{\alpha}{\lambda} \right) + O \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} \right)^2, \quad (22)$$

где  $\Omega_0 = (1/2)\sqrt{(1 - g^2)|F_+(0, 0)|^2 + g^2}$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $\alpha = -g/4\Omega_0$ ,  $\alpha_1$  — константа порядка единицы. Для физических сред  $g$  может быть как положительно, так и отрицательно.

Выберем для определенности  $g > 0$ . В этом разделе мы пренебрегаем последним членом в правой части (22). Заметим, что в рассматриваемых ниже предельных случаях  $\alpha_1 = 0$ .

Зависимость  $\rho_0$  от  $\lambda$  также найдена в Приложении, где показано, что почти для всех медленно изменяющихся начальных условий

$$\rho_0 = \frac{\lambda - i\phi_-^*}{\lambda} \frac{R_+(0, 0)}{\delta + R_3(0, 0)} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right].$$

Можно показать, что для больших  $\lambda$  в общем случае зависимость коэффициентов перед экспонентами в правой части (15) от спектрального параметра имеет вид

$$r = r_0 + O(1/\lambda), \quad p = p_0 + O(1/\lambda), \quad c = c_0 + O(1/\lambda), \quad d = d_0 + O(1/\lambda).$$

Найдем ядро  $F(z, T)$ , пренебрегая зависимостью этих коэффициентов от  $\lambda$ , т. е. вычислим следующий интеграл:

$$F(z + y, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp \left[ i \left( \frac{g}{2} - \lambda \right) (z + y) \right] H(\lambda, T). \quad (23)$$

Здесь

$$H(\lambda, T) = \frac{p_0 + r_0 \exp(-2i\Omega T)}{d_0 + c_0 \exp(-2i\Omega T)}.$$

Пусть  $F_3(0, T) \equiv F_3(0, 0) = \cos \beta_0 = \varepsilon |\cos \beta_0|$ . Режим взаимодействия, отвечающий граничным условиям  $\pi/2 \geq \beta_0 > 0$ , будем называть  $I$ -режимом взаимодействия, а режим, отвечающий условию  $\pi > \beta_0 > \pi/2$ , будем называть  $J$ -режимом. Ниже будет показано, что этим режимам отвечают ядра, пропорциональные функциям Бесселя  $I_k$  и  $J_k$  ( $k = 0, 1$ ) соответственно.

Вычисляя вычеты в правой части  $F$  (23) в полюсах (21):

$$\lambda_n = \frac{-\varepsilon\alpha T}{\pi n + \pi/2 - i\kappa_0 + \varepsilon\Omega_0 T}, \quad \kappa_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{d_0}{c_0},$$

получаем ряд по  $n$ . Умножим  $n$ -ый член этого ряда на экспоненту с показателем  $2i\varepsilon\alpha T[\pi n + \pi/2 - i\kappa + \varepsilon\Omega_0 T]/\varepsilon\alpha T - i\pi - 2\kappa_0 - 2i\varepsilon\Omega_0 T$ , получаем

$$F(z + s, T) = -i \frac{r_0 d_0 - p_0 c_0}{d_0^2} \frac{1}{2\pi i} \sum_n \exp \left[ -\frac{i(z+s)}{q_n} + i2\alpha T q_n + i\frac{g}{2}(z+y) - 2i\varepsilon\Omega_0 T \right]. \quad (24)$$

Здесь  $q_n = \varepsilon(\pi n + \pi/2 - i\kappa)/\alpha T + \Omega_0/\alpha$ . Для больших  $T$  интервал между  $q_n$  и  $q_{n+1}$  уменьшается, что оправдывает переход от суммирования по  $q_n$  к интегрированию по  $q$ . Для знака  $\varepsilon = +1$ , отвечающего  $I$ -режиму взаимодействия, получаем ядро

$$\begin{aligned} F(z + y, T) &= -\frac{g_\infty}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ \frac{i(z+y)}{q} + 2i\alpha T q \right] \exp \left[ -2iT\Omega_0 + i\frac{g}{2}(z+y) \right] \frac{dq}{q^2} = \\ &= g_\infty \frac{4|\alpha|T}{\sqrt{8|\alpha|(z+y)T}} I_1 \left( \sqrt{8|\alpha|(z+y)T} \right) \exp \left[ -2iT\Omega_0 + i\frac{g}{2}(z+y) \right], \quad (25) \end{aligned}$$

где  $I_1$  — функция Бесселя,  $g_\infty = (r_0 d_0 - p_0 c_0) / d_0^2$ .

В  $J$ -режиме взаимодействия решение для  $F_+(z, T)$  асимптотически ( $z \rightarrow \infty$ ) стремится к нулю. Знак  $\varepsilon = -1$  выбирается так, чтобы решение сшивалось с асимптотическим в линейном пределе, так как нулевая асимптотика для  $F_+(z, T)$  соответствует значению  $F_3|_{z \rightarrow \infty} = -1$ . Заменяя знаки  $\varepsilon$  и  $q$  в приведенных выше формулах, получаем ядро, отвечающее  $J$ -режиму взаимодействия:

$$F(z + y, T) = g_\infty \frac{4|\alpha|T}{\eta} J_1(\eta) \exp \left[ 2iT\Omega_0 + i\frac{g}{2}(z + y) \right], \quad (26)$$

где  $J_1(\eta)$  — функция Бесселя,  $\eta = \sqrt{8|\alpha|(z + y)T}$ .

Отметим, что асимптотика ядра  $F(z, T)$  при больших  $T$  для постоянных произвольных амплитуд полей  $E_{1,2}(z = 0, T) = \text{const}$  линейно зависит от функций Бесселя, так же как и в предельных случаях:  $F_3(0, T) \approx \pm 1$ .

Следующий шаг состоит в решении уравнений Марченко (13), (14) с ядром  $F(z + y, T)$ . Решение может быть найдено итерациями с использованием разложения по степеням  $1/\eta$  для больших  $\eta$ . Решение для  $F_+(z, T)$  будет состоять из последовательности пиков с уменьшающейся при  $z \rightarrow \infty$  амплитудой.

Покажем, что решение задачи может быть сведено к решению дифференциального уравнения первого порядка. Известно, что спектральная проблема (5) может быть сведена к спектральной проблеме Захарова—Шабата [2]. Соответствующее калибровочное преобразование имеет вид [3]

$$\Psi_z = D^{-1}\Phi,$$

$$D = [I\cos(\gamma/2) + i\sigma_3\sin(\gamma/2)] [I\cos(v/2) + i\sigma_1\sin(v/2)] [I\cos(\theta/2) + i\sigma_3\sin(\theta/2)]. \quad (27)$$

Здесь  $\sigma_i$  — матрицы Паули и введены обозначения

$$R_+ = e^{\pm i\theta} \sin v, \quad R_3 = \cos v, \quad \gamma = \int_0^z \theta_z \cos v \, dz,$$

$$\theta_z = \partial_z \theta, \quad \gamma \rightarrow 0, \quad z = 0, \quad v, \theta_z \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty.$$

Преобразование (27) сводит спектральную проблему (5) к виду

$$\partial_z \Psi = \begin{pmatrix} -i\lambda & \frac{1}{2}V \\ -\frac{1}{2}V^* & i\lambda \end{pmatrix} \Psi, \quad (28)$$

где

$$V(z, T) = \left[ (i\sqrt{1 - g^2} - \theta_z) \sin v + iv_z \right] e^{i\gamma}. \quad (29)$$

Соответствующие уравнения Марченко для  $1 > g^2$  имеют вид [2]:

$$K_1^{(1)}(z, y) + F^{(1)}(z + y) + \int_0^z F^{(1)}(y + s) K_2^{(1)}(z, s) ds = 0, \quad (30)$$

$$K_2^{(1)*}(z, y) - \int_0^z K_1^{(1)*}(z, s) F^{(1)}(y + s) ds = 0, \quad (31)$$

$$F^{(1)}(z) = \int_{\mathcal{E}} \frac{b^* \exp(-i\lambda z)}{a} d\lambda. \quad (32)$$

Связь между «потенциалом»  $V$  и ядрами  $K_{1,2}$  имеет вид [2]

$$V(z, T) = 4K_1^{(1)}(z, z, T), \quad (33)$$

$$\int_0^z |V(y, T)|^2 dy = -4K_2^{(1)}(z, z, T). \quad (34)$$

Временную зависимость  $\rho(T)$  находим с учетом замены матрицы  $\|A\|$  на матрицу  $\|A\|_g$ , которая получается из  $\|A\|$  калибровочным преобразованием (27). Для постоянных  $F_{3,+}(0, T) \equiv F_{3,+}(0, 0)$ ;  $R_{3,+}(z, 0) \equiv R_{3,+}(0, 0)$  соответствующие компоненты матрицы  $\|A\|_g$  не зависят от  $z$ ,  $T$  и зависимость  $\rho$  от  $\lambda$  и времени  $T$  дается общими выражениями (105), приведенными в Приложении. Решение системы уравнений Марченко (30), (31) мы можем найти в общем виде, следуя работе [11]. При этом удается выразить  $V(z, T)/T$  через функцию, зависящую только от автомодельной переменной. Затем, чтобы восстановить «потенциал»  $R_+(z, T)$ , необходимо решить уравнения (29), (33). Аналитически этого сделать не удастся. В то же время уравнения (30), (31) возникают и в физически интересном пределе слабого возбуждения среды, в котором соотношение (29) становится тривиальным и отвечает формальным равенствам

$$V(z, T) \equiv R_+(z, T), \quad R_3(z, T) \equiv -1. \quad (35)$$

В этом пределе калибровочное преобразование (27) становится тождественным.

#### 4. ПРЕДЕЛ СЛАБОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ СРЕДЫ

Модель Чу—Скотта [12] получается из (2) в пределе слабых полей ( $|\lambda| \ll |\phi_{\pm}|$ ). После пренебрежения возбуждением среды (35) и эффектом Штарка ( $g = 0$ ) получаем модель Чу—Скотта:

$$\begin{aligned} \partial_T V &= F_+, \\ \partial_z F_+ &= F_3 V, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\partial_z F_3 = -\frac{1}{2}(F_+^* V + F_+ V^*). \quad (37)$$

Значения функций и переменных такие же, как и выше (см. (2)). Модель Чу—Скотта представима в виде условия совместности линейных систем (28) и следующей системы:

$$\partial_T \Phi = \frac{1}{4\lambda} \begin{pmatrix} iF_3 & -iF_+ \\ -iF_- & -iF_3 \end{pmatrix} \Phi. \quad (38)$$

Уравнения Марченко совпадают с приведенными выше уравнениями (30), (31). Временная зависимость коэффициента рассеяния дается выражением (105), где  $\|A\|$  — матрица, стоящая в правой части (38), в точке  $z = 0$ . Для модели Чу—Скотта имеем точные соотношения:

$$\Omega = \frac{\varepsilon}{4\lambda}, \quad \varepsilon = \frac{F_3(0,0)}{|F_3(0,0)|}, \quad \alpha = \frac{1}{4}, \quad \alpha_1 = 0. \tag{39}$$

Коэффициенты в правой части (20) имеют вид

$$r^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{4\lambda} \left[ i\rho_0^{(1)} (\varepsilon - F_3(0,0)) + F_+(0,0) \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \approx \frac{r_0^{(1)}}{4\lambda}, \tag{40}$$

$$p^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{4\lambda} \left[ i\rho_0^{(1)} (\varepsilon + F_3(0,0)) - F_+(0,0) \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \approx \frac{p_0^{(1)}}{4\lambda}, \tag{41}$$

$$c^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{4\lambda} \left[ i(\varepsilon + F_3(0,0)) - \rho_0^{(1)} F_-(0,0) \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \approx \frac{c_0^{(1)}}{4\lambda}, \tag{42}$$

$$d^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{4\lambda} \left[ i(\varepsilon + F_3(0,0)) + \rho_0^{(1)} F_-(0,0) \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \approx \frac{d_0^{(1)}}{4\lambda}. \tag{43}$$

В дальнейшем пренебрегаем членами  $O(1/\lambda)$  в квадратных скобках, т. е. в (40)–(43)  $\rho_0^{(1)}$ ,  $r_0^{(1)}$ ,  $p_0^{(1)}$ ,  $c_0^{(1)}$ ,  $d_0^{(1)}$  не зависят от  $\lambda$ . С учетом (39) получаем, что ядро  $F^{(1)}(x+y, T)$  дается выражениями (25) и (26). Для  $J$ -режима находим

$$F^{(1)}(z+y, T) = \frac{g_\infty^{(1)}}{\sqrt{2(z+y)T}} J_1\left(\sqrt{2(z+y)T}\right), \tag{44}$$

где  $J_1$  — функция Бесселя,  $g_\infty^{(1)} = (r_0^{(1)}d_0^{(1)} - p_0^{(1)}c_0^{(1)}) / (d_0^{(1)})^2$ . Для  $I$ -режима ядро отличается от (44) заменой функций Бесселя  $J_1 \rightarrow I_1$ . В случае  $R_+(z, 0) = 0$  нетрудно показать, что  $\rho_0(\lambda) = 0$ , при этом

$$g_\infty^{(1)}|_{\rho_0=0} = \frac{2|\sin \beta_0|}{(1 + |\cos \beta_0|)^2}.$$

Чтобы найти радиационное решение уравнений Марченко (30), (31), используем, следуя работе [11], формулу сложения Гегенбауера. Рассмотрим  $J$ -режим взаимодействия. Заменяем переменные  $\xi = \sqrt{2zT}$ ,  $\zeta = \sqrt{2yT}$  и представим  $F^{(1)}(z+y, T)$  в виде  $F^{(1)}(z+y, T) = T \mathcal{F}^{(1)}\left(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}\right)$ . Разложим функцию  $\mathcal{F}^{(1)}\left(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}\right)$  по функциям Бесселя:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1)}\left(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}\right) &= \frac{g_\infty^{(1)}}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} J_1\left(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}\right) = \\ &= g_\infty^{(1)} \frac{2}{\xi\zeta} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (2k-1) J_{2k-1}(\zeta) J_{2k-1}(\xi). \end{aligned} \tag{45}$$

Здесь использованы свойства полинома Гегенбауера  $C_l^k$  (см. например, [21]):

$$C_l^{2k-1}(0) = 0, \quad C_l^{2k}(0) = (-1)^k \frac{(k+l)!}{l! k!}.$$

Введем функции

$$\mathcal{K}_{1,2}^{(1)}(z, y) = T^{-1} K_{1,2}^{(1)}(z, y, T)$$

и разложим их по функциям Бесселя  $J_{2k-1}$ :

$$\mathcal{K}_1^{(1)}(z, y) = \mathcal{K}_1^{(1)}(\xi, \zeta) = \frac{2}{\xi\zeta} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}_k^{(1)}(\xi) J_{2k-1}(\zeta), \quad (46)$$

$$\mathcal{K}_2^{(1)}(z, y) = \mathcal{K}_2^{(1)}(\xi, \zeta) = \frac{2}{\xi\zeta} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k^{(1)}(\xi) J_{2k-1}(\zeta). \quad (47)$$

Используем свойство биортогональности функций Бесселя и Неймана  $Y_k$ :

$$\int_{\mathcal{C}} J_m(\zeta) Y_k(\zeta) d\zeta = a_k \delta_{km}, \quad a_0 = 2\pi i, \quad a_k = \pi i, \quad k > 0, \quad (48)$$

где интегрирование ведется по контуру  $\mathcal{C}$  вокруг центра комплексной плоскости. Умножая уравнения Марченко на  $Y_{2k-1}$  и интегрируя вдоль контура  $\mathcal{C}$ , находим

$$\mathcal{R}_l^{(1)}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{ln}^{(1)} \mathcal{F}_n^{(1)}(\xi) + \mathcal{F}_k^{(1)}(\xi), \quad (49)$$

$$\mathcal{F}_l^{(1)}(\xi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{ln}^{(1)} \mathcal{R}_n^{(1)}(\xi). \quad (50)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k^{(1)} &= (-1)^{k-1} 2g_{\infty}^{(1)} (2k-1) J_{2k-1}(\xi), \quad \mathcal{O}_{kl}^{(1)} = (-1)^{k-1} 4g_{\infty}^{(1)} (2k-1) \mathcal{W}_{kl}^{(1)}, \\ \mathcal{W}_{kl}^{(1)}(s) &= \int_0^s J_{2k-1}(\sigma) J_{2l-1}(\sigma) \sigma^{-1} d\sigma. \end{aligned} \quad (51)$$

Для  $I$ -режима взаимодействия получается такая же алгебраическая система уравнений после замены функций Бесселя  $J_k$  на  $I_k$ . Интегралы (51) сводятся к табличным, например,

$$\begin{aligned} \int I_{2k-1}(x) I_{2j-1}(x) x^{-1} dx &= 2^{1-2j-2k} x^{-2+2j+2k} F \left[ \left( j+k-1, j+k-\frac{1}{2} \right), \right. \\ &\left. (2j, 2k, 2k+2j-1), x^2 \right] / [(j+k-1) \Gamma(2j) \Gamma(2k)]. \end{aligned}$$

Здесь  $F$  — гипергеометрическая функция, а  $\Gamma$  — гамма-функция. Решение алгебраической системы (49), (50) найдем, используя формулу Крамера

$$\mathcal{F}_k^{(1)} = \frac{\det \|M_k^{(1)}\|}{\det \|M^{(1)}\|}, \quad (52)$$

где

$$\|M^{(1)}\| = \delta_{ij} + \mathcal{O}_{ik}^{(1)} \mathcal{O}_{kj}^{(1)},$$

$\|M_k^{(1)}\|$  отличается от  $\|M^{(1)}\|$  заменой  $k$ -го столбца на вектор  $\mathcal{F}_k^{(1)}$ . Имеем

$$\frac{1}{4\xi} \frac{d}{d\xi} \ln \det \|M^{(1)}\| = \frac{1}{\det \|M^{(1)}\|} \sum_{k=1}^{\infty} \det \|M_k^{(1)}\| J_{2k-1}. \quad (53)$$

Сравнивая (52) и (53) и используя правило дифференцирования детерминантов, находим формальное решение для  $\mathcal{K}_2^{(1)}$  (47):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_k^{(1)}(\xi) J_{2k-1}(\xi) = \mathcal{K}_2^{(1)}(\xi, \zeta) = \frac{1}{4\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \det (\delta_{kl} + \|\mathcal{O}^{(1)}\| \|\mathcal{O}^{(1)*}\|). \quad (54)$$

Для того чтобы найти  $\mathcal{K}_1^{(1)}(\xi, \xi)$ , представим (49), (50) в векторной форме, принимая во внимание, что  $\|\mathcal{O}^{(1)}\|$  — действительная матрица:

$$(I + \|\mathcal{O}^{(1)}\|^2) \mathcal{R}^{(1)} = \mathcal{F}^{(1)}. \quad (55)$$

Решение уравнения (55) представим в векторном виде:

$$\mathcal{R}^{(1)} = \frac{1}{2i} \left[ (I + i \|\mathcal{Q}^{(1)}\|)^{-1} \mathcal{F}^{(1)} + (I - i \|\mathcal{Q}^{(1)}\|)^{-1} \mathcal{F}^{(1)} \right]. \quad (56)$$

Окончательно находим

$$\mathcal{K}_1^{(1)}(\xi, \zeta) = \frac{1}{4\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \frac{\det [I + i \|\mathcal{O}^{(1)}\|]}{\det [I - i \|\mathcal{O}^{(1)}\|]}. \quad (57)$$

Вместо соотношений (33), (34) получаем

$$V(\zeta, T) = 4T \mathcal{K}_1^{(1)}(\zeta, \zeta), \quad (58)$$

$$\int_0^{\zeta} |V(\eta)|^2 d\eta = -4T \mathcal{K}_2^{(1)}(\zeta, \zeta). \quad (59)$$

Из (58) следует, что поле  $V(z, \tau)$  пропорционально функции, зависящей только от автомодельной переменной  $\zeta = \sqrt{2zT}$ . Решение, описывающее динамику поля  $V(\zeta, T)$ , имеет вид

$$V(\zeta, T) = \frac{T}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \frac{\det [I + i \|\mathcal{O}^{(1)}\|]}{\det [I - i \|\mathcal{O}^{(1)}\|]}. \quad (60)$$

Отметим, что для  $g^2 < 1$  решение уравнения (29) с левой частью (60) позволяет найти радиационную асимптотику для общего случая произвольного возбуждения среды и без пренебрежения эффектом Штарка. В этом случае решение, очевидно, не является автомодельным, хотя и определяется автомодельной функцией  $\mathcal{K}_1(\zeta, \zeta)$ .

Радиационная часть решения системы (2) для  $\pi/2 > \beta_0 > 0$  состоит из двух частей: растущей, пропорциональной (для малых  $T$ ) функции Бесселя  $I_1$ , и затухающих осцилляций (см. рис. 1, 2). Для  $\pi > \beta_0 > \pi/2$  решение состоит из затухающих осцилляций (рис. 3). Соответствующее ядро  $\mathcal{F}^{(1)}(\eta)$  пропорционально функции Бесселя  $J_1(\eta)$ .

В работах [6] и [9], в которых изучались уравнения Максвелла—Блоха для одночастичного лазерного усилителя, показано, что для первоначально почти полностью инвертированной среды решение уравнений также имеет аналогичную зависимость от

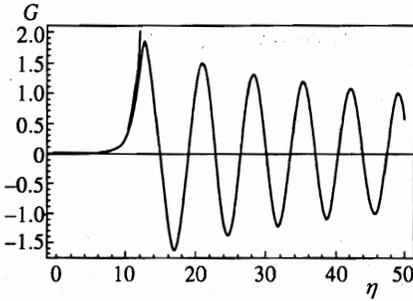


Рис. 1

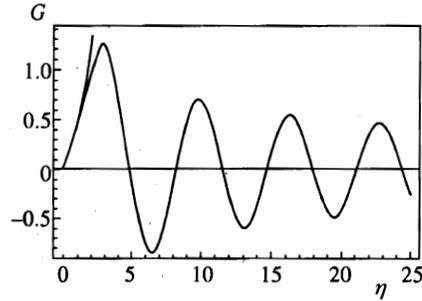


Рис. 2

Рис. 1. *I*-режим взаимодействия. Найденная численно зависимость  $G(\eta) = (\eta/4T)V(\eta, T)$ , см. (36), от автомодельной переменной  $\eta = \sqrt{4zT}$  для  $\beta_0 = 10^{-4}$ ,  $\rho_0 = 0$ . Показан также график линейного решения, найденного для малых  $T$ , т. е. функции  $g_0 I_1(\eta)$ . Линейное решение проходит выше графика численного решения (62)

Рис. 2. То же, что на рис. 1, для угла  $\beta_0 = 0.25\pi$

автомодельной переменной. В этих работах рассматривались начальные условия, отвечающие малому отклонению от полной инверсии среды и флуктуациям поля. В настоящей работе найдено более общее решение для ситуации, отвечающей в случае лазерного усилителя произвольной начальной инверсии среды.

Рассмотрим следующие условия:

$$-\log[|\beta_0|^{-1}] \gg 1, \quad -\log[|\rho_0|^{-1}] \gg 1. \tag{61}$$

В случае лазерного усилителя условие (61) отвечает почти полной начальной инверсии. Малый угол Блоха  $\beta_0$  описывает квантовые флуктуации поля или слабое затравочное стоксово поле, и  $\rho_0$  описывает квантовые флуктуации поляризуемости среды [9]. Если  $\beta_0 = 0$ , то процесс конверсии среды происходит при  $\rho_0 \neq 0$  [6]. Аналогично, для исследуемой в работе модели в случае  $\rho_0 = 0$  для инициации процесса конверсии энергии необходимо затравочное стоксово поле  $E_2(0, \tau)$ , форма которого определяет передний фронт асимптотического решения. Строго говоря, при  $\beta_0 = \rho_0 = 0$  классическая модель неприменима, так как не учитывает квантовых флуктуаций вакуума и среды. Однако для большого числа фотонов классическая модель удовлетворительно описывает динамику полей.

Для действительных начальных значений полей и в отсутствие расстройки автомодельное решение модели Чу—Скотта описывается следующим уравнением:

$$\mathcal{B}''_{\eta\eta}(\eta) + \frac{1}{\eta} \mathcal{B}'_{\eta}(\eta) = \sin \mathcal{B}(\eta), \tag{62}$$

где

$$V(z, T) = \frac{4T}{\eta} \mathcal{B}'_{\eta}(\eta), \quad \eta = \sqrt{4zT}.$$

В уравнениях Марченко (78), (79) можно пренебречь интегральными частями для малых  $\eta$ . Для больших  $\eta$  нелинейными членами можно пренебречь только для достаточно малых коэффициентов  $|g_{\infty}|$  в *J*-режиме взаимодействия. В первом случае линейное

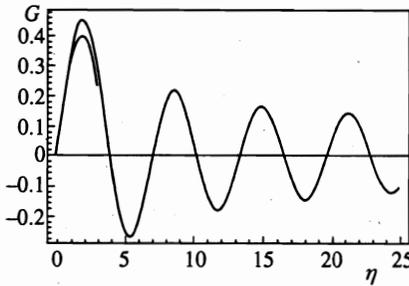


Рис. 3

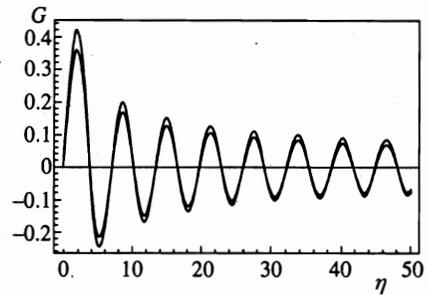


Рис. 4

Рис. 3.  $J$ -режим взаимодействия. То же, что на рис. 1 для угла  $\beta_0 = 0.75\pi$ . Показан график линейного решения  $g_0 J_1(\eta)$ , проходящий ниже графика численного решения

Рис. 4. Сравнение численных результатов с аналитическими для модели Чу—Скотта в  $J$ -режиме. Приводится найденная численно зависимость функции  $G(\eta) = (\eta/4T)V(\eta, T)$  от  $\eta = \sqrt{4zT}$  для  $\beta_0 = 0.8\pi, \rho_0 = 0$ . Показан также график линейного решения  $g_\infty J_1(\eta)$ , имеющий меньшую амплитуду осцилляций

решение уравнений Марченко описывает передний фронт решения, отвечающий  $I$ - и  $J$ -режимам взаимодействия. Рассмотрим интеграл (15) в пределе малых  $T$ , таких что знаменатель в правой части (20) не обращается в нуль. Для малых  $T$  и  $\sigma = 1/\lambda$  фактор  $\exp(2i\Omega T)$  в знаменателе может быть заменен на 1. Перепишем (20) в виде

$$F_0^{(1)}(z + s, T) = -\frac{\sin \beta_0}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\sigma}{\sigma^2} [1 - \exp(2iT\sigma)] \exp[-i(z + s)/\sigma]. \quad (63)$$

Интегрируя в положительном направлении вокруг сингулярности  $\sigma = 0$ , получаем из (63)

$$\begin{aligned} F_0^{(1)}(z + s, T) &= -\frac{\sin \beta_0}{8\pi} \int_{\mathcal{C}_+} \frac{d\sigma}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{i}{\sigma}(z + s) + 2iT\sigma\right] = \\ &= g_0^{(1)} \frac{T}{\sqrt{\zeta^2 + \xi^2}} I_1\left(\sqrt{\zeta^2 + \xi^2}\right) = T \mathcal{F}_0^{(1)}, \end{aligned} \quad (64)$$

где  $\zeta = \sqrt{2Tz}, \xi = \sqrt{2Ts}$ ;  $I_1$  — функция Бесселя,  $g_0^{(1)} = |\sin \beta_0|$ . Решение для  $J$ -режима получается из (64) заменой функций Бесселя  $I_1 \rightarrow J_1$ .

Другой линейный предел отвечает  $J$ -режиму взаимодействия и случаю малых  $|g_\infty|$ , т. е.  $\pi - \beta_0 \ll \pi$ . Соответствующее ядро имеет вид (см. (26))

$$F^{(1)}(z + y, T) = \frac{g_\infty^{(1)} T}{\eta} J_1(\eta), \quad \eta = \sqrt{2(z + y)T}.$$

Решение (26) описывает затухающие осцилляции поля  $V(z, T)$  вблизи устойчивого состояния (4).

В первом линейном пределе (малые  $T, \eta$ ) решение уравнений Марченко (13), (14) очевидно:

$$\mathcal{K}_1^{(1)}(\zeta, \zeta) = \mathcal{F}_0^{(1)}(\zeta),$$

$$V(z, T) = 4K_1^{(1)}(\zeta, \zeta, T) = 4Tg_0^{(1)}\mathcal{F}_0^{(1)}(\zeta) = \frac{4Tg_0^{(1)}}{\eta}I_1(\eta), \quad (65)$$

где  $\eta = \sqrt{2}\zeta = \sqrt{4zT}$ . Соответственно для  $J$ -режима следует заменить  $I_1 \rightarrow J_1$ . При достаточно малых  $\eta$  решение (65) справедливо для любых  $\beta_0$  (см. рис. 1–3). Для второго линейного предела соответствующее решение получается формальной заменой в (65)  $I_1 \rightarrow J_1$ ,  $g_0^{(1)} \rightarrow g_\infty^{(1)}$ . Уравнения Марченко не определяют знак поля, поэтому находим его, сшивая полученное решение с линейным решением.

На рис. 4 представлены результаты сравнения численного исследования автономной асимптотики модели Чу—Скотта и решения (65), выраженного через  $\mathcal{F}^{(1)}$  (32). Численный анализ показывает, что при  $\beta_0 = 0.9\pi$  максимальное отклонение численного решения от аналитического в точке максимума первого пика меньше 1%. Для  $\beta_0 = 0.8\pi$  ошибка не более 3%. При  $\beta_0 = 0.7\pi$  ошибка не более 8%. При дальнейшем уменьшении  $\beta_0$  ошибка растет и линейное приближение становится неприменимым.

Численные результаты показывают, что аналитическое решение, найденное во втором линейном пределе, может удовлетворительно описывать радиационное решение от  $\beta_0 = \pi$  до углов  $\beta_0 \approx 0.75\pi$ , при этом  $g_\infty$  меняется от 0 до  $\approx 1.1$ .

Численное моделирование, проведенное для нелинейной области, показывает, что построенная теория правильно описывает радиационное решение для больших и малых  $T$ . Амплитуда осцилляций радиационной части решения зависит от  $\beta_0$ , в то же время общий вид радиационной части решения сохраняется для всех углов  $\beta_0$ , что также подтверждает автономный характер асимптотики ВКР для приведенных выше начальных и граничных условий.

## 5. ПРЕДЕЛ МОЩНЫХ БЫСТРОПЕРЕМЕННЫХ ПОЛЕЙ

Современная лазерная техника позволяет использовать для исследования нелинейных процессов мощные световые поля. Если число фотонов поля накачки и стоксова поля, пролетающих через единичный элемент объема среды, больше числа активных атомов в этом элементе объема, то происходит быстрый обмен энергией между полем и средой. Для достаточно сильных полей производная ядра  $K_{1,2}$  по  $z$  пропорциональна  $\lambda$  и может достигать значений больше единицы. Для реальных физических сред  $|\phi_+|$  изменяется в диапазоне 0.15–1.5. Считаем, что в пределе сильных полей  $|\lambda| \gg |\phi_+|$ . В этом пределе можно использовать приведенные выше уравнения аппарата МОЗР, исключив  $\phi_\pm$  из уравнений, приведенных в разд. 3. Например, решения упрощенной спектральной проблемы связаны соотношением ( $g = 1$ )

$$\bar{\psi}_1^+ = \frac{\bar{\psi}_1^-}{a} + \frac{b^*}{a}\psi_1^+. \quad (66)$$

Решение редуцированной спектральной проблемы представимо в виде

$$\chi^+(z, \lambda) = \Phi_0^+(z, \lambda) - \int_z^\infty ds \begin{pmatrix} \lambda K_1^{(0)}(z, s) & \lambda K_2^{(0)}(z, s) \\ -\lambda \bar{K}_2^{(0)}(z, s) & \lambda \bar{K}_1^{(0)}(z, s) \end{pmatrix} \Phi_0^+(s, \lambda). \quad (67)$$

Уравнения Марченко находим, интегрируя (66) с весом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\lambda s)}{2\pi\lambda} d\lambda.$$

Окончательно получаем

$$K_1^{(0)}(z, y) + F^{(0)}(z + y) + \int_0^z F^{(0)}(y + s) K_2^{(0)}(z, s) ds = 0, \tag{68}$$

$$K_2^{(0)*}(z, y) - \int_0^z K_1^{(0)*}(z, s) F^{(0)}(y + s) ds = 0, \tag{69}$$

здесь

$$F^{(0)}(z + y) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\rho(\lambda, z)}{2\pi\lambda} \exp\left[-i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(z + y)\right] d\lambda. \tag{70}$$

Зависимость  $\rho$  от  $T$  также дается выражением (105), приведенном в Приложении. Ядро (70) вычисляем так же, как и в разд. 3, используя точные равенства

$$\Omega = \frac{\varepsilon}{4\lambda}, \quad \varepsilon = \frac{F_3(0, 0)}{|F_3(0, 0)|}, \quad \Omega_0 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{4}, \quad g = 1. \tag{71}$$

Можно, как и выше, показать, что коэффициенты перед экспонентами в правой части (70) допускают разложение  $r = r_0 + O(1/\lambda) + \dots$ , где  $r_0$  не зависит от  $\lambda$ . Подставляя выражение для  $\rho_0$ , найденное в Приложении, и повторяя процедуру, изложенную в разд. 3, находим ядро, отвечающее  $I$ -режиму взаимодействия:

$$F^{(0)}(z + y, T) = g_{\infty}^{(0)} I_0\left(\sqrt{2(z + y)T}\right) \exp\left[\frac{i}{2}(z + y) - iT\right]. \tag{72}$$

$J$ -режиму отвечает ядро

$$F^{(0)}(z + y, T) = g_{\infty}^{(0)} J_0\left(\sqrt{2(z + y)T}\right) \exp\left[\frac{i}{2}(z + y) + iT\right]. \tag{73}$$

Здесь  $g_{\infty}$  с учетом найденного в Приложении  $\rho_0 = iR_+(0, 0)/(\delta + R_3(0, 0))$  имеет вид

$$g_{\infty}^{(0)} = \frac{4\varepsilon [\sin \beta_0 (\delta + \cos v_0)^2 - \cos \beta_0 \sin^2 v_0 + i \sin \beta_0 (\delta + \cos v_0)]}{(\delta + \cos v_0) (\varepsilon + \cos \beta_0) - \sin \beta_0 \sin v_0}, \tag{74}$$

$$\delta = \text{sign } R_3(0, 0), \quad R_3(0, 0) = \cos v_0, \quad R_+(0, 0) = \sin v_0.$$

Далее ограничимся рассмотрением  $J$ -режима. Разложим  $F^{(0)}(z + y, T)$  (73) по функциям Бесселя:

$$\begin{aligned} F^{(0)}\left(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}, z\right) &= g_{\infty}^{(0)} J_0\left(\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}\right) \exp\left[i\frac{1}{4T}(\xi^2 + \zeta^2) + iT\right] = \\ &= g_{\infty}^{(0)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2k J_{2k}(\zeta) J_{2k}(\xi) \exp\left[i\frac{1}{4T}(\xi^2 + \zeta^2) + iT\right]. \end{aligned} \tag{75}$$

Здесь  $\zeta = \sqrt{2zT}$ ,  $\xi = \sqrt{2yT}$ . Разложим  $\mathcal{K}_{1,2}^{(0)} = T^{-1} K_{1,2}^{(0)}$  по функциям Бесселя:

$$\mathcal{K}_1^{(0)}(z, y, T) = \mathcal{K}_1^{(0)}(\xi, \zeta, T) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k^{(0)}(\xi) J_{2k}(\zeta) \exp \left[ i \frac{1}{4T} (\xi^2 + \zeta^2) + iT \right], \quad (76)$$

$$\mathcal{K}_2^{(0)}(z, y, T) = \mathcal{K}_2^{(0)}(\xi, \zeta, T) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k^{(0)}(\xi) J_{2k}(\zeta) \exp \left[ i \frac{1}{4T} (\xi^2 - \zeta^2) + iT \right]. \quad (77)$$

Используя свойство биортогональности (48) и повторяя процедуру, изложенную в разд. 3, получаем из (68), (69) следующую алгебраическую систему:

$$\mathcal{R}_l^{(0)}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{ln}^{(0)} \mathcal{P}_n^{(0)}(\xi) + \mathcal{F}_l^{(0)}(\xi), \quad (78)$$

$$\mathcal{P}_l^{(0)}(\xi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{ln}^{(0)} \mathcal{R}_n^{(0)}(\xi). \quad (79)$$

Здесь

$$\mathcal{O}_{kl}^{(0)} = g_{\infty}^{(0)} (-1)^k 2k \mathcal{W}_{kl}^{(0)}, \quad \mathcal{F}_k^{(0)}(\xi) = g_{\infty}^{(0)} (-1)^k 2k J_{2k}(\xi).$$

Интегралы

$$\mathcal{W}_{kl}^{(0)}(s) = \int_0^s J_{2k}(\sigma) J_{2l}(\sigma) \sigma d\sigma \quad (80)$$

сводятся к табличным

$$\begin{aligned} \int I_{2k}(x) I_{2j}(x) x dx &= 2^{-1-2j-2k} x^{2+2j+2k} F \left[ \left( j+k+\frac{1}{2}, 1+j+k, 1+j+k \right), \right. \\ &\left. (2j+1, 2+j+k, 1+2k, 1+2j+2k), x^2 \right] / [(j+k+1) \Gamma(2j+1) \Gamma(2k+1)], \\ \int J_{2k}(x) J_{2j}(x) x dx &= 2^{-1-2j-2k} x^{2+2j+2k} F \left[ \left( j+k+\frac{1}{2}, 1+j+k, 1+j+k \right), \right. \\ &\left. (2j+1, 2+j+k, 1+2k, 1+2j+2k), -x^2 \right] / [(j+k+1) \Gamma(2j+1) \Gamma(2k+1)]. \end{aligned} \quad (81)$$

Здесь  $F$  — гипергеометрическая функция, а  $\Gamma$  — гамма-функция. Решение системы (78), (79) находим так же, как в предыдущем разделе. Используя формулу Крамера (52), где  $\|M^{(0)}\| = \delta_{ij} + \mathcal{O}_{ik}^{(0)} \mathcal{O}_{kj}^{(0)}$  ( $\|M_k^{(0)}\|$  отличается от  $\|M^{(0)}\|$  заменой  $k$ -го столбца на вектор  $\mathcal{F}_k^{(0)}$ ), находим

$$\mathcal{K}_2^{(0)}(\xi, \xi) = \frac{1}{2\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \det (\delta_{kl} + \|\mathcal{O}^{(0)}\| \|\mathcal{O}^{(0)*}\|). \quad (82)$$

Ядро  $\mathcal{K}_1^{(0)}(\xi, \xi)$  найдем, как и выше, используя (78), (79) для действительной матрицы  $\|\mathcal{O}^{(0)}\|$ . Представляя (78), (79) в векторной форме

$$(I + \|\mathcal{O}^{(0)}\|^2) \mathcal{R}^{(0)} = \mathcal{F}^{(0)}, \tag{83}$$

находим

$$\mathcal{R}_1^{(0)}(\xi, \xi) = \frac{1}{2i\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \ln \frac{\det [I + i\|\mathcal{O}^{(0)}\|]}{\det [I - i\|\mathcal{O}^{(0)}\|]} \right\} \exp \left( \frac{i}{2T} \xi^2 + iT \right). \tag{84}$$

Введем функцию

$$Q_{\pm}^{(0)} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \det (I \pm i\|\mathcal{O}^{(0)}\|) \tag{85}$$

и представим найденное решение в форме

$$\mathcal{R}_2^{(0)}(\xi, \xi) = \frac{1}{2} (Q_+^{(0)} + Q_-^{(0)}), \tag{86}$$

$$\mathcal{R}_1^{(0)}(\xi, \xi) = \frac{1}{2i} (Q_+^{(0)} - Q_-^{(0)}) \exp \left( \frac{i}{2T} \xi^2 + iT \right). \tag{87}$$

Используя (18), (19), находим решение

$$R_+(z, T) = \frac{2 \operatorname{Re} Q_+^{(0)} \left[ 1 + i \operatorname{Im} Q_+^{(0)} \exp \left( (i/2T)\xi^2 + iT \right) \right]}{1 + (1/2) \left[ Q_+^{(0)2} + Q_-^{(0)2} \right] - 2 \operatorname{Im} Q_+^{(0)} \sin \left( (1/2T)\xi^2 + T \right)}, \tag{88}$$

$$R_3(z, T) = \frac{1 - Q_+^{(0)} Q_-^{(0)} - 2 \operatorname{Im} Q_+^{(0)} \sin \left( (1/2T)\xi^2 + T \right)}{1 + (1/2) \left[ Q_+^{(0)2} + Q_-^{(0)2} \right] - 2 \operatorname{Im} Q_+^{(0)} \sin \left( (1/2T)\xi^2 + T \right)}. \tag{89}$$

### 6. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Покажем, что полученные результаты могут быть использованы для объяснения аномалий в форме стоксова поля, наблюдавшихся в экспериментах по комбинационному рассеянию [22] в рамках модели Чу—Скотта. В ядро  $F^{(1)}$  дают вклады поля на границе среды  $z = 0$  и начальная поляризация среды  $\{R_+(z, 0), R_3(z, 0)\}$ . Для малых  $\rho_0$  коэффициент может быть представлен в виде суммы

$$\rho(\lambda, T) \simeq \frac{A_{12}}{2i\Omega} [\exp(-2i\Omega T) - 1] + \rho_0 \exp(-2i\Omega T) + O(\rho_0^2, A_{12}^2, \rho_0 A_{12}). \tag{90}$$

В (90) первый член в правой части ассоциируется со стимулированным комбинационным рассеянием, а второй — со спонтанным комбинационным рассеянием.

Для модели Чу—Скотта  $F_+(0, 0) = \sin \beta_0 \approx \beta_0$ , имеем

$$\rho(\lambda, T) \simeq \frac{-i\beta_0}{2\varepsilon} \left[ \exp \left[ -\frac{iT\varepsilon}{2\lambda} \right] - 1 \right] - \frac{iR_+(0, 0)}{2\lambda\delta} \exp \left[ -\frac{iT\varepsilon}{2\lambda} \right]. \tag{91}$$

Здесь  $R_+(0, 0)$  описывает квантовые флуктуации среды и инициирует спонтанное комбинационное рассеяние. Из (91) следует, что спонтанное и стимулированное КР описываются разными формами ядра  $F^{(1)}$ . Действительно, как следует из разд. 4 настоящей

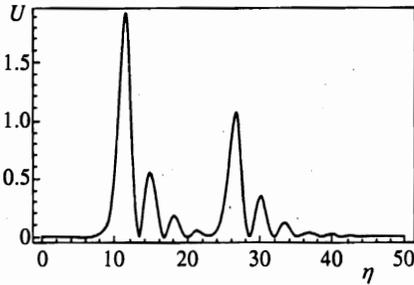


Рис. 5

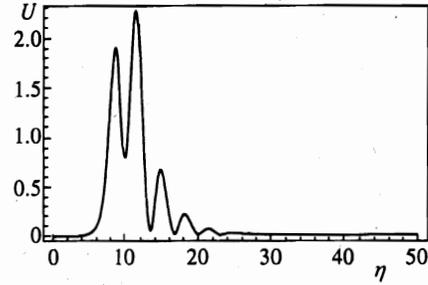


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость  $U(\eta) = |(\eta/4T)V(\eta, T)|^2$  от  $\eta = \sqrt{4zT}$ . Показаны аномалии в форме стокова импульса, вызванные смещением вкладов спонтанного и вынужденного комбинационного рассеяния.  $\beta_0 = 0.01\pi$ ,  $\rho_0 = 10^{-4}$ . Учтена конечность времени «поперечной» релаксации  $T_2$ . В единицах уравнений (2)  $T_2 = 3$ . Вклады вынужденного и спонтанного комбинационного рассеяния в форму стокова поля вычислялись по отдельности. На рисунке представлена суперпозиция полей

Рис. 6. То же, что на рис. 5, для  $\beta_0 = 10^{-3}\pi$ ,  $\rho_0 = 0.01$

работы, первый и второй члены в правой части (91) приводят к выражениям для ядра, пропорциональным функциям Бесселя  $I_1$  или  $J_1$  и  $I_0$  или  $J_0$  соответственно. В том случае, если отношение  $|F_+(0, T)/R_+(z, 0)|$  много больше или много меньше единицы, форма стокова импульса будет сильно отличаться от найденной, например, в работах [7, 14] и представленной на рис. 1–3. Выражение (91) позволяет, на наш взгляд, впервые объяснить аномалии формы импульса стокова поля, которые наблюдались при кооперативном комбинационном рассеянии в парах водорода [22]. В этих экспериментах в среду инжектировался мощный импульс поля накачки и экспериментально определялась форма стокова поля. «Толчком» для генерации стокова импульса являлись флуктуации среды и поля. При многократном повторении эксперимента было обнаружено, что форма генерируемого стокова импульса может сильно варьироваться раз от разу [22]. Например, амплитуда первого пика в генерируемом пакете может быть как выше, так и ниже, чем амплитуда следующего. Примерно в одном случае из десяти наблюдалось появление мощного импульса на заднем, затухающем фронте стокова поля. Такое поведение не нашло, на наш взгляд, адекватного описания в литературе. На рис. 5, 6 приводятся результаты численных расчетов для модели Чу—Скотта для различных значений  $F_+(0, T)/R_+(z, 0)$ . Численные результаты показывают, что приведенная выше теория может дать объяснение описанных выше аномалий формы стокова поля.

## 7. СОЛИТОННАЯ АСИМПТОТИКА

Исследуем генерацию солитонов на переднем фронте стокова поля, имеющего вид бесконечно длинной ступеньки. Воспользуемся свойством симметрии системы (2) относительно замены

$$F_3 \leftrightarrow R_3, \quad F_{\pm} \leftrightarrow R_{\pm}, \quad z \leftrightarrow T. \quad (92)$$

С учетом расстройки и замены (92) спектральная проблема принимает вид

$$\partial_T \Phi = \begin{pmatrix} -i\lambda F_3 & (\lambda + \phi_+)F_+ \\ -(\lambda + \phi_-)F_- & i\lambda F_3 \end{pmatrix} \Phi + \begin{pmatrix} iv_0 & 0 \\ 0 & -iv_0 \end{pmatrix} \Phi, \quad (93)$$

где  $\phi_{\pm} = \pm(1/2)\sqrt{1 - g^2}$ . Все приведенные выше результаты остаются в силе, меняется только их физическая интерпретация. Для изучения динамики пакета солитонов теперь следует: а) найти решение спектральной проблемы (93) для длинного ступенчатого импульса стокова поля, распространяющегося на фоне бесконечно длинного импульса поля накачки, таких что

$$F_+(0, T) = 0, \quad T \geq T_0, \quad F_+(0, T) = A_0 \neq 0, \quad T < T_0; \quad (94)$$

б) найти зависимость коэффициента рассеяния от  $z$ , используя линейную систему

$$\partial_z \Phi = \frac{1}{4\lambda + 2g} \begin{pmatrix} i(2\lambda g - 1 + g^2)R_3 & 2(\lambda + \phi_+)R_+ \\ -2(\lambda + \phi_-)R_- & i(2\lambda g - 1 + g^2)R_3 \end{pmatrix} \Phi. \quad (95)$$

Предполагая, что в начальный момент среда частично инвертирована  $R_+(z, 0) = R_+(0, 0) \neq 0$ . Зависимость данных рассеяния от  $z$  дается формулами, приведенными в Приложении с учетом замены (92). Там же показано, что если зависимость  $F_+(0, T)$  от  $T$  имеет вид бесконечно длинной ступеньки, то возможно появление части непрерывного спектра, лежащей в верхней полуплоскости. Эта часть спектра ассоциируется с генерацией пакета солитонов.

Влиянием солитонов на асимптотику в случае конечной длины  $E_{1,2}(0, T)$  можно пренебрегать для достаточно больших времен. Это связано с различием групповых скоростей радиационного и солитонных решений. Действительно, пусть пересечение полей  $E_{1,2}$  во времени занимает конечный интервал  $[0, T_0]$ . Радиационное решение описывает эволюцию системы к устойчивому состоянию. Если начальное условие  $F_+(z, 0)$  приводит к появлению полюса в верхней части комплексной плоскости, то возникает солитонное решение, которое распространяется на фоне основного состояния. Время существования солитона ограничено его временем жизни в интервале  $[0, T_0]$ . В случае стимулированного комбинационного рассеяния этот факт был отмечен в работе [23].

Исследование солитонной асимптотики имеет практический смысл для достаточно большого  $T_0$ . Для физических приложений важно найти условия, когда солитон стокова поля, имеющий наибольшую амплитуду, обладает наибольшей групповой скоростью и распространяется на фоне основного устойчивого состояния. При таком условии асимптотически формируется пакет солитонов с наиболее мощным солитоном на переднем фронте.

Найдем условия реализации такого режима для модели ВКР (2). Важная информация о характеристиках солитонов может быть получена из (15). Рассмотрим спектр, ассоциированный с бесконечно длинной ступенькой (см. рис. 7). Вклад в интеграл (15) вносят  $F_c$  — интеграл вдоль действительной оси,  $F_1$  — интеграл вдоль части спектра  $\mathcal{S}_1$ , лежащей в верхней полуплоскости, кроме окрестности вершины  $\lambda_0$ , и  $F_0$  — интеграл вокруг вершины:

$$F(T + T', z) = F_c(T + T', z) + F_1(T + T', z) + F_0(T + T', z).$$

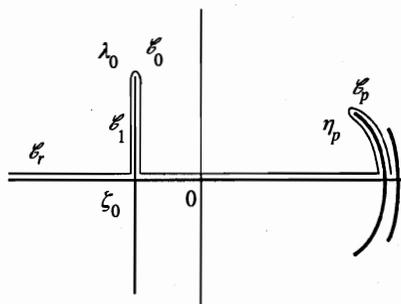


Рис. 7

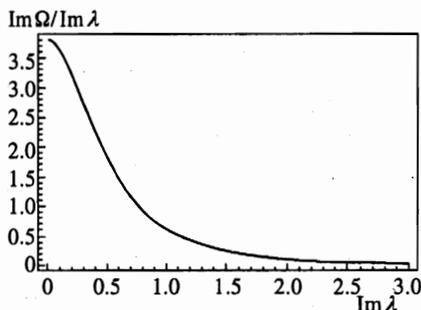


Рис. 8

Рис. 7. Непрерывный спектр, ассоциированный с бесконечно длинным прямоугольным импульсом  $T_0 \rightarrow \infty$ . Спектр включает всю действительную ось  $\mathcal{C}_r$  и  $\mathcal{C}_s = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$  — «солитонную часть» непрерывного спектра, где  $\mathcal{C}_0$  — окрестность вершины  $\lambda_0$ .  $\mathcal{C}_p$  — часть спектра, которая ассоциируется с конечно-зонной волной,  $\lambda_p$  — точка этого спектра, имеющая максимальную мнимую часть

Рис. 8. Зависимость  $\text{Im}\Omega(\lambda)/\text{Im}\lambda$  от  $\text{Im}\lambda$  для  $g = 0.5, \zeta_0 = -0.3$

Рассмотрим фазу  $\Theta = i [ -(\lambda - g)(T + T') + \Omega z ]$  в (15), где  $\Omega(\lambda)$  определяется значениями  $R_{3,+}(T, z) \equiv R_{3,+}(T, 0)$  при  $T = 0$ . Групповую скорость  $\Upsilon$  солитонного пакета находим, полагая  $\text{Im}\Theta = 0$ . В физических переменных  $x, t$  имеем

$$\Upsilon = c/n(\omega_1) \gamma (1 + \gamma)^{-1},$$

где  $\gamma = \text{Im}\Omega/\text{Im}\lambda > 0$  ( $\text{Im}\Omega(\lambda) > 0$ ).

Анализ фазы  $\Theta(z, T)$  и  $\Upsilon$  показывает, что более быстрый солитон, распространяющийся на фоне основного состояния, имеет меньшую амплитуду, если зависимость  $F_+(0, T)$  имеет вид прямоугольного импульса (94). Покажем, что если первоначально среда находится не в основном состоянии, то возможен качественно иной режим генерации солитонов.

Проанализируем фазу  $\Theta(\lambda)$  для  $\lambda \in \mathcal{C}_s$  в окрестности вершины  $\lambda_0$ . Поскольку вершине солитонного спектра точке  $\lambda_0$  отвечает наиболее высокий и узкий солитон, представляет интерес найти условия, когда этот солитон имеет наибольшую групповую скорость. Это условие для произвольной точки спектра  $\lambda$ , лежащей на монотонной непрерывной кривой в солитонной части спектра, имеет вид

$$\frac{d}{d\text{Im}\lambda} \frac{\text{Im}\Omega(\lambda)}{\text{Im}\lambda} < 0, \quad \text{Im}\Omega(\lambda) > 0 \tag{96}$$

и означает, что солитон, ассоциированный с точкой  $\lambda$ , такой что  $\text{Im}\lambda = \eta < \eta_0 = \text{Im}\lambda_0$ , имеет меньшую групповую скорость, чем солитон, ассоциированный с точкой  $\lambda_0$ .

Если поля Стокса и накачки в точке  $z = 0$  представляют собой конечнозонные решения задачи, то ассоциированный спектр может состоять из конечного набора дуг, симметричных относительно действительной оси. Выберем дугу  $\mathcal{C}_p$  с вершиной  $\eta_p$ , имеющей максимальную мнимую часть (см. рис. 7). Можно показать, что для того чтобы солитон, ассоциированный с вершиной, имел наибольшую групповую скорость,

необходимо, чтобы радиус кривизны этой дуги был меньше, чем расстояние от центра комплексной плоскости до вершины дуги.

Условие (96) не выполняется для ступенчатого импульса полей и начального основного состояния среды. В то же время условие (96) может быть выполнено для ступенчатого импульса, если среда частично инвертирована в начальный момент, т. е. начальное условие для среды не является основным. На рис. 8 показана зависимость  $\text{Im}\Omega(\lambda)$  от  $\text{Im}\lambda$  для  $\lambda \in \mathcal{C}_s$ , которая возможна, например, для значений параметров задачи  $g > -0.4$ ,  $\nu_0 F_+(0, 0) < 0$ . При такой зависимости справедливо условие (96).

Покажем, что при выполнении неравенств (96) из волнового пакета отщепляется солитон стоксова поля, имеющий наибольшую амплитуду. Для доказательства сделаем в (15) замену

$$T = \gamma_0 z + \vartheta, \quad T' = \gamma_0 z + \sigma.$$

Введем в (97) малый параметр

$$\varepsilon = \eta(\gamma_0 - \gamma), \quad \gamma_0 = \text{Im}\Omega(\lambda_0)/\text{Im}(\lambda_0).$$

При выполнении условия (96) этот параметр будет положительным. Разлагая по степеням  $\varepsilon$ , находим

$$\begin{aligned} F_0(T + T', z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\eta}^{\eta_0} h(\lambda) \exp[-i(\eta - g)(T + T') + i2\Theta z] d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\eta}^{\eta_0} h(\lambda) \exp\{-i(\zeta_0 - g)(\vartheta + \sigma + 2\gamma_0 z) + i2 \text{Re} \Theta(\lambda_0)z + \eta_0(\vartheta + \sigma) - \\ &\quad - \varepsilon[(\eta_1 - \varepsilon\eta_2 + \dots)(\vartheta + \sigma) + z(1 + im)]\} d\eta, \quad \lambda_0 = \zeta_0 + i\eta_0. \end{aligned} \tag{97}$$

Форма  $h(\lambda)$  для дальнейших оценок не существенна, и мы ее не приводим. В (97) использовано разложение

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 - \varepsilon^2\eta_2 + \dots, \quad m = \text{Re} \frac{d}{d\eta} \Omega(\lambda).$$

Можно показать, что разложение  $h(\eta)$  по степеням  $\varepsilon$  имеет вид

$$h(\eta) = \sqrt{\varepsilon} (h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots).$$

Из (97) следует, что солитон, ассоциированный с точкой  $\lambda_0$ , отщепляется от волнового пакета. Перекрытие солитона и остальной части волнового пакета уменьшается с ростом  $z$ , так как  $\eta_1 > 0$ ,  $\varepsilon z > 0$ . Можно показать, что при выполнении условия (96) расстояние между лидирующим солитоном и остальной частью волнового пакета растёт как  $\log z$ .

Этот результат можно распространить на всю «солитонную» часть спектра  $\mathcal{C}_s$ . Покажем, что при выполнении условия (96) вклад всей солитонной части в лидирующий солитон уменьшается с ростом  $z$ .

Вклад части солитонного спектра  $\mathcal{C}_1$ , не включающей окрестность  $\mathcal{C}_0$  вершины  $\lambda_0$  (см. рис. 7), определим, оценивая интеграл  $F_1$ , который вычисляется вдоль  $\mathcal{C}_1$  в верхней полуплоскости:

$$F_1(T + T', z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{E}_1} h(\lambda) \exp[-i\lambda(T + T') + i2\Omega z] d\lambda. \quad (98)$$

Для оценки интеграла (98) представим мнимую часть фазового множителя в виде

$$\text{Im}[\Theta(z, T, \lambda)]|_{T=\gamma_0 z, T'=\gamma_0 z} = z \text{Im}[\tilde{\Theta}(\lambda)] = 2z \text{Im}[\lambda \text{Im} \Omega(\lambda_0)/\eta_0 - \Omega(\lambda)],$$

где  $\lambda \in \mathcal{E}_1$ . Переходя от интегрирования по  $\lambda$  к интегрированию по  $\tilde{\Theta}(\lambda)$  и интегрируя по частям, находим

$$F_1(T + T', z) = \frac{h(\lambda_0) \exp[iz \text{Re} \tilde{\Theta}(\lambda_0)] - h(\zeta_0) \exp[iz \tilde{\Theta}(\zeta_0)]}{iz \tilde{\Theta}'(\zeta_0)} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \quad (99)$$

Здесь  $\zeta_0 = \text{Re} \lambda_0$ . Из оценки (99) следует, что вклад спектра  $\mathcal{E}_1$  в форму лидирующего солитона уменьшается с расстоянием пропорционально  $1/z$ , т.е. расстояние между лидирующим солитоном и остальной частью пакета растет как  $\log z$ .

В работе показано, что поставленные начальные условия и граничные условия (см. конец разд. 2) приводят к формированию радиационного и солитонного пакетов импульсов при ВКР. При выполнении условий (96), (99) на переднем фронте солитонного пакета возникает солитон, имеющий максимальные амплитуду и групповую скорость.

Результаты этого раздела представляют интерес также для обоснования применимости эвристического метода Уизема [2]. Этот метод используется для описания развития модуляционной неустойчивости в нелинейных средах. Наиболее часто для описания процесса преобразования ступенчатого импульса в пакет солитонов используется однофазное решение. В рамках этого метода медленное изменение параметров периодической волны описывает трансформацию плоской волны в пакет солитонов. Поскольку развитие модуляционной неустойчивости связано с длинноволновыми возбуждениями, задний фронт пакета следует описывать квазигармонической волной, тогда на переднем фронте пакета должен быть солитон с максимальной амплитудой. Для рассмотренной выше модели ВКР это условие выполняется при частичной начальной инверсии  $R_+(z, 0) \sim O(1)$ . В то же время начальная инверсия приводит к радиационному решению, которое не описывается в рамках такого подхода Уизема.

Заметим, что начальное условие в виде ступенчатого импульса приводит к возникновению аналогичного спектра, состоящего из действительной оси и отрезка прямой, лежащего в солитонной части спектра, и для других моделей, допускающих представление Лакса типа Абловица—Крускала—Ньювелла—Сегура [2]. В частности, условие (96) выполняется для (модифицированного) уравнения Кортевега—де-Вриза. Для этих уравнений прямоугольный импульс распадается в пакет солитонов с солитоном максимальной амплитуды на переднем фронте. Для (модифицированного) нелинейного уравнения Шредингера неравенство (96) превращается в равенство. Неравенство (96) выполняется для специальных начальных условий, для которых солитонный спектр  $\mathcal{E}_s$  находится в области  $\text{Re} \lambda < 0$  и расстояние от точки спектра до мнимой оси монотонно уменьшается при уменьшении  $\text{Im} \lambda > 0$  [24]. Анализ ряда интегрируемых моделей нелинейной оптики показал, что для моделей с сильными нелинейностями, такими как уравнения Максвелла—Блоха для двухуровневой среды, модели двухчастотного взаимодействия в двухуровневой среде [3, 4], модели четырехволнового смешения [5, 16], также возможны начальные и граничные условия, приводящие к формированию мощного солитона на переднем фронте волнового пакета. Для этого требуются условия,

родственные частичной начальной инверсии. При таком условии необходимо учитывать вклад радиационного решения, которое может определять форму асимптотического решения. Результаты и подход настоящей работы могут быть использованы для этих моделей нелинейной оптики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-02-17904) и Немецкого научно-исследовательского общества (Deutsche Forschungsgemeinschaft) (грант № 426 RUS 113/89/0(R,S)).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Временная зависимость данных рассеяния

Рассмотрим вначале задачу на конечном интервале  $z \in [0, L_f]$ . Считаем, что  $F_{3,+}(0, T) = \text{const}$  и  $F_+(L_f, T)$  — произвольная функция от  $T$ . Зависимость данных рассеяния от  $T$  находится с помощью линейной системы (6). Чтобы найти эту зависимость, представим решение обеих линейных систем (5) и (6) в виде

$$\Psi = \chi^+ \Phi^+ = \chi^- \Phi^-, \tag{100}$$

где  $\chi^\pm$  — функции Йоста. Эти функции являются решениями системы (5), но не удовлетворяют (6). Функции  $\Phi^{-,+}$  — решения системы (6) для  $z = 0, L_f$  соответственно, такие что

$$\partial_T \Phi^\mp = A \Phi^\mp. \tag{101}$$

Сравнивая (9) и (100) находим, что матрица  $\mathcal{S}$  удовлетворяет уравнению

$$\partial_T \mathcal{S}(z) = -\mathcal{S} A(z=0) + A(z=L_f) \mathcal{S}. \tag{102}$$

Компоненты матрицы  $A_{11}, A_{22}, A_{21}$  при  $z = L_f$  не дают вклада в зависимость данных рассеяния от  $T$ . Вкладом компоненты матрицы  $A_{12}$  при  $z = L_f$  следует пренебречь. Этот вопрос детально обсуждался в работах Каупа [3, 13], который показал, что значения матрицы  $\|A(z = L_f, T)\|$  определяют динамику вне «физической» области, т. е. для  $z > L_f$ . Мы отсылаем читателя к этим работам. Для бесконечного интервала  $L_f = \infty$  система достигает основного состояния при  $z \rightarrow \infty$ . При этом в рассматриваемой задаче  $A_{12} \rightarrow 0$ , т. е. значения полей на бесконечности не дают вклада в зависимость спектрального параметра от  $T$ . Для нахождения временной зависимости данных рассеяния достаточно ограничиться значениями матрицы  $\|A\|$  в точке  $z = 0$ . Решение (102) для коэффициентов  $a$  и  $b$  с точностью до общего множителя имеет вид

$$a = [(i\Omega + A_{11})e^{-i\Omega T} + (i\Omega - A_{11})e^{i\Omega T}] a_0 - b_0^* A_{21} (e^{-i\Omega T} - e^{i\Omega T}), \tag{103}$$

$$b^* = -a_0 A_{12} (e^{-i\Omega T} - e^{i\Omega T}) + b_0^* [(i\Omega - A_{11})e^{-i\Omega T} + (i\Omega + A_{11})e^{i\Omega T}], \tag{104}$$

здесь  $A_{ij}$  компоненты  $A(z=0)$  такие, что  $A_{11} = -A_{22}, \Omega^2 = -A_{11}^2 - A_{12}A_{21}$ .

Таким образом, коэффициент рассеяния  $\rho$  имеет вид

$$\rho(T) = \frac{b^*}{a} = -\frac{A_{12} (e^{-i\Omega T} - e^{i\Omega T}) - \rho_0 [(i\Omega - A_{11})e^{-i\Omega T} + (i\Omega + A_{11})e^{i\Omega T}]}{(i\Omega + A_{11})e^{-i\Omega T} + (i\Omega - A_{11})e^{i\Omega T} - \rho_0 A_{21} (e^{-i\Omega T} - e^{i\Omega T})}, \tag{105}$$

где

$$\rho_0 = \rho(z=0, \lambda) = \frac{b_0^*}{a_0}(\lambda).$$

Найдем коэффициент рассеяния  $\rho_0$ , предполагая, что масштаб изменения полей функций  $R_{+,3}(z, 0)$  много меньше, чем  $\lambda$ . Решение спектральной проблемы (5) имеет вид

$$f_1(z) = f_1(0)e^{-i\lambda z} + \frac{\lambda + \phi_+}{\lambda} \int_0^z \frac{R_+(u, 0)}{R_3(u, 0)} f_2(u) e^{-i\lambda(z-u)} du, \quad (106)$$

$$f_2(z) = f_2(0)e^{i\lambda z} - \frac{\lambda + \phi_-}{\lambda} \int_0^z \frac{R_-(u, 0)}{R_3(u, 0)} f_1(u) e^{i\lambda(z-u)} du. \quad (107)$$

Здесь

$$Z = \int_0^z R_3(u, 0) du, \quad U = \int_0^u R_3(u, 0) du.$$

Решаем систему (106), (107) итерациями, используя следующее решение в низшем порядке:

$$f_1(z) \simeq f_1(0) \exp(-i\lambda \delta z), \quad f_2(z) \simeq f_2(0) \exp(i\lambda \delta z),$$

где  $\delta = \pm 1 = \text{sign } R_3(0, 0)$ . Интегрирование по частям дает

$$f_1(z) = f_1(0)e^{-i\lambda z} - \frac{\lambda + \phi_+}{i\lambda} \left[ \frac{R_+(0, 0)}{\delta + R_3(0, 0)} f_2(0) e^{-i\lambda z} - \frac{R_+(z, 0)}{\delta + R_3(z, 0)} f_2(z) \right] - \\ - \frac{\lambda + \phi_+}{i\lambda} \int_0^z \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{R_+(u, 0)}{\delta + R_3(u, 0)} f_2(u) e^{-i\lambda u} \right] e^{-i\lambda(z-u-\delta u)} du, \quad (108)$$

$$f_2(z) = f_2(0)e^{i\lambda z} - \frac{\lambda + \phi_-}{i\lambda} \left[ \frac{R_-(0, 0)}{\delta + R_3(0, 0)} f_1(0) e^{-i\lambda z} - \frac{R_-(z, 0)}{R_3(z, 0)} f_1(z) \right] - \\ - \frac{\lambda + \phi_-}{2i\lambda} \int_0^z \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{R_-(u, 0)}{\delta + R_3(u, 0)} f_1(u) e^{i\lambda u} \right] e^{i\lambda(z-u-\delta u)} du. \quad (109)$$

Продолжая интегрировать по частям, находим асимптотическое разложение по степеням  $\lambda^{-1}$ . Предполагается, что  $R_+(u)/(\delta + R_3(u))$  и все производные существуют. Это условие выполняется для физически оправданных начальных условий. Используя асимптотическое разложение, мы найдем соответствующее разложение для данных рассеяния, требуемых для данной задачи. Поскольку основной вклад в радиационное решение дают большие  $\lambda$  (см. разд. 3), можно ограничиться первыми членами разложения. Полагая  $f_1(0) = 1$ ,  $f_2(0) = 0$  и  $R_+(z, 0) = 0$ ,  $z > l_0$ , находим

$$a_0 \simeq 1 + \frac{\lambda + \phi_+}{i\lambda} \frac{R_+(l_0, 0)}{\delta + R_3(l_0, 0)} f_2(l_0) e^{-i\lambda l_0 \delta} \simeq 1, \tag{110}$$

$$b_0 \simeq -\frac{\lambda + \phi_-}{i\lambda} \frac{R_-(0, 0)}{\delta + R_3(0, 0)} + \frac{\lambda + \phi_-}{i\lambda} \frac{R_-(l_0, 0)}{\delta + R_3(l_0, 0)} f_1(Z_0) e^{-i\lambda l_0 \delta} \simeq \\ \simeq -\frac{\lambda + \phi_-}{i\lambda} \frac{R_-(0, 0)}{\delta + R_3(0, 0)}. \tag{111}$$

Аналогично, полагая  $f_1(0) = 0, f_2(0) = 1$ , находим для второго столбца матрицы  $\mathcal{S}$

$$a_0 \simeq 1, \quad b_0^* \simeq +i \frac{\lambda + \phi_-^*}{\lambda} \frac{R_+(0, 0)}{\delta + R_3(0, 0)}. \tag{112}$$

Рассмотрим граничные и начальные условия, которые исследовались в разд. 7. Для случая бесконечно длинного ступенчатого импульса поля Стокса найдем ассоциированный спектр задачи. Рассматриваем случай полубесконечной среды, лежащей на полуинтервале  $[0, +\infty)$ , в которую инжектируется конечный прямоугольный импульс (94).

Для постоянной  $A_0$  решение (5) легко найти. Для физических приложений представляет интерес рассмотрение начальных условий, отвечающих ненулевой расстройке, поскольку учет расстройки  $\nu_0 \neq 0$  приводит к существенной модификации спектра задачи.

Следуя известной процедуре (см., например, [2]), находим решение (28) для «потенциала» (94). Коэффициент  $a_0$  имеет вид

$$a_0 = e^{2i\zeta T_0} \left[ \cos(2\zeta T_0) + \frac{2\lambda}{\zeta} \sin(2\zeta T_0) \right]. \tag{113}$$

Здесь

$$\zeta = \sqrt{\left( \lambda - \nu_0 \sqrt{1 - A_0^2} \right)^2 + \frac{1}{4} (1 - g^2 + 4\nu_0^2) |A_0|^2}.$$

Нули  $a_0(\zeta_n) = 0$ , задающие спектр задачи, определяются следующим равенством:

$$2\zeta_n T_0 = -\operatorname{arctg} \frac{\zeta_n}{2\lambda} + n\pi + \frac{\pi}{2}. \tag{114}$$

Анализ (114) показывает, что для конечного  $T_0$  имеется конечный набор изолированных полюсов, те из них, которые лежат в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $\lambda$ , ассоциируются с солитонными решениями. С ростом  $T_0$  число полюсов растет и расстояние между ними уменьшается пропорционально  $1/T_0$ . В пределе  $T_0 \rightarrow \infty$  нули  $\zeta_n$  заполняют всю действительную ось. Для  $1 > g^2 - 4\nu_0^2$  часть спектра может лежать на линии, параллельной мнимой оси. Эта часть спектра описывается отрезком  $[\zeta_0 - i\eta_0, \zeta_0 + i\eta_0]$ , где  $\zeta_0 = \nu_0 \sqrt{1 - A_0^2}, \eta_0 = (1/2) |A_0| \sqrt{1 - g^2 + 4\nu_0^2}$ , см. рис. 7. Половина этого отрезка, лежащая в верхней полуплоскости, ассоциируется с солитонной частью спектра, поскольку получается в результате слияния бесконечного числа полюсов, лежащих в этой части плоскости.

## Литература

1. F. Reintjes, *Nonlinear Optics Parametric Processes in Liquids and Gases*, New York, Academic (1984).
2. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
3. D. J. Kaup, *Physica D* **6**, 143 (1983).
4. H. Steudel, *Physica D* **6**, 155 (1983).
5. В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ* **45**, 279 (1987).
6. С. В. Манаков, *ЖЭТФ* **83**, 68 (1982).
7. И. Р. Габитов, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ* **37**, 234 (1983).
8. И. Р. Габитов, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *ЖЭТФ* **86**, 1204 (1984).
9. И. Р. Габитов, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *ТМФ* **63**, 11 (1985).
10. С. В. Манаков, В. Ю. Новокшенов *ТМФ* **69**, 40 (1986).
11. I. R. Gabitov and S. V. Manakov, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 495 (1983).
12. F. Y. F. Chu and A. C. Scott, *Phys. Rev. A* **12**, 2060 (1975).
13. D. J. Kaup and C. R. Menyuk, *Phys. Rev. A* **42**, 1712 (1990).
14. C. R. Menyuk, *Phys. Rev. A* **47**, 2235 (1993).
15. H. Steudel, *Quantum Opt.* **2**, 387 (1990).
16. A. A. Zabolotskii, *Physica D* **40**, 283 (1989).
17. R. Meinel, *Opt. Commun.* **49**, 224 (1984).
18. И. В. Чередник, *ТМФ* **47**, 225 (1981).
19. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **93**, 84 (1987).
20. H. Steudel, *Exp. Tech. Phys.* **20**, 409 (1972).
21. *Handbook of Mathematical Functions*, ed. by M. Abramovitz and I. A. Stegun, U. S. GPO, Washington. DC (1964).
22. С. Г. Раутиан, В. П. Сафонов, Б. М. Черноброд, *Изв. АН СССР, серия физ.* **50**, 1513 (1986).
23. С. Р. Менюк, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2937 (1989).
24. В. П. Котляров, Е. Я. Хруслов, *ТМФ* **68**, 172 (1986).