

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ГАМИЛЬТОНОВ ХАОС В РЕЗОНАТОРНОЙ ПОЛУКЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

С. В. Пранц*, Л. Е. Коньков

Тихоокеанский океанологический институт
Дальневосточного отделения Российской академии наук
690041, Владивосток, Россия

Поступила в редакцию 9 июля 1998 г.

Аналитически и численно исследуется нелинейная динамика взаимодействия двухуровневых атомов с выделенной модой высокодобротного резонатора с модулирующей частоты. В отсутствие модуляции соответствующие полуклассические уравнения Гейзенберга для ожидаемых значений коллективных атомных наблюдаемых и амплитуд полевой моды допускают в приближении вращающейся волны и в пределе сильной связи точное решение при произвольной расстройке. С помощью этого решения обнаружен когерентный эффект пленения населенности атомных уровней и пленения числа фотонов, возникающий вследствие деструктивной интерференции атомных диполей и полевой моды. У интегрируемой системы выявлена сепаратриса, в окрестности которой при включении модуляции образуется стохастический слой, постепенно уширяющийся с увеличением глубины модуляции, заполняя в конце концов весь энергетически разрешенный объем фазового пространства. Показано, что приближение вращающейся волны не препятствует возникновению гамильтонова хаоса в резонаторной полуклассической электродинамике. Вычисление максимальных показателей Ляпунова нелинейных в этом приближении уравнений движения в зависимости от частоты модуляции δ и частоты собственных осцилляций Раби атомно-полевой системы Ω подтверждает, что гамильтонов хаос возникает прежде всего в зоне основного параметрического резонанса, $\delta/2\Omega \simeq 1$. Параметрическая неустойчивость возрастает с ростом глубины модуляции и уменьшением расстройки атомно-полевого резонанса, порождая при точном резонансе новые зоны хаоса, соответствующие кратным параметрическим резонансам. Результаты численных экспериментов и оценка характерных параметров показывают, что перспективными объектами для наблюдения проявлений параметрической неустойчивости и динамического хаоса в квантовых системах являются ридберговские атомы, помещенные в высокодобротный микроволновый резонатор.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основной резонаторной квантовой электродинамики (для обзора см., например, [1]) является микролазер [2] — реальной устройство, оперирующее с ридберговскими атомами в высокодобротном сверхпроводящем микроволновом резонаторе, которое в одномодовом пределе и пределе сильной связи описывается моделью Джейнса—Камминга [3]. Помимо прочего, привлекательной особенностью таких систем является возможность экспериментально исследовать взаимодействие атомов с полем излучения на полуклассическом, полуквантовом и полностью квантовом уровнях, варьируя число атомов в резонаторе. Изучение квантового поведения атомно-полевой системы в режимах, где ее полуклассическое описание приводит к динамической неустойчивости

*E-mail: prants@medphys.marine.su

и хаосу, затрагивает новый аспект старой проблемы квантово-классического соответствия — связь квантовой механики и нелинейной классической механики.

В настоящей работе аналитически и численно изучается гамильтонов хаос в параметрической атомно-полевой системе, уравнения движения которой находятся из операторных уравнений Гейзенберга с помощью полуклассической процедуры факторизации квантовых корреляторов. С одной стороны, такой подход позволяет получить динамическую систему, которую можно анализировать методами нелинейной классической механики, а с другой стороны, он дает возможность принимать во внимание некоторые эффекты квантовых корреляций, проводя полуквантовую факторизацию.

Полуклассическая факторизация стандартной модели Джайнса—Каммингса приводит к системе уравнений, точно интегрируемых в приближении вращающейся волны. Известно, что при отказе от этого приближения, т. е. при учете в гамильтониане нерезонансных членов, описывающих виртуальные переходы, полуклассическая модель становится хаотической [4–6]. Однако эти члены играют заметную роль в случае чрезвычайно высокой плотности атомов $\simeq 10^{21} \text{ см}^{-3}$, когда сомнительным становится использование приближения невзаимодействующих атомов, принятое в работах [4–6].

В недавних работах [7, 8] было показано, что при движении двухуровневых атомов сквозь одномодовый резонатор гамильтонов хаос возникает даже в приближении вращающейся волны в отсутствие каких-либо внешних воздействий. Такая ситуация может быть реализована в экспериментах микромазерного типа. Хаотические осцилляции атомной инверсии и числа фотонов могут возникать как в полуклассической модели [7], так и в полуквантовой [8]. В последнем случае при выводе уравнений движения для ожидаемых значений учитываются полевые, межатомные и атомно-полевые квантовые корреляции первого порядка [9]. В результате возникает новый эффект резонаторной квантовой электродинамики — хаотические вакуумные осцилляции Раби [8]. Он отражает динамическую неустойчивость и хаос при взаимодействии атомов с вакуумом в высокочастотном резонаторе. Следует отметить, что для достоверной диагностики хаоса в численных экспериментах по значениям максимального показателя Ляпунова требуются высокие скорости атомов, $v \simeq 10^8 \text{ см/с}$, и большие значения вакуумной частоты Раби $\Omega_0 \simeq 10^7 \text{ рад/с}$. Для движущихся атомов механизм возникновения хаоса связан с модуляцией вакуумной частоты Раби $\Omega_0 f(r)$, вызванной пространственно-неоднородной структурой резонаторной моды, описываемой некоторой функцией $f(r)$ [10]. При этом естественные ограничения на скорость атомов, а следовательно на величину частоты модуляции, ограничивают параметрические колебания в атомно-полевой системе адиабатическим режимом.

В случае модуляции энергии рабочего атомного перехода и/или выделенной моды резонатора с частотой ω_m атомно-полевая система может демонстрировать различные режимы параметрических колебаний: адиабатический ($\omega_m \ll \Omega_0 \sqrt{N}$), неадиабатический ($\omega_m \gg \Omega_0 \sqrt{N}$) и нелинейный параметрический резонанс ($n\omega_m \simeq 2\Omega_0 \sqrt{N}$, $n = 1, 2, \dots$, где N — число атомов в резонаторе). В данной работе мы с помощью аналитических решений и численных экспериментов показываем, каким образом в режиме параметрического резонанса система покоящихся двухуровневых атомов в одномодовом высокочастотном резонаторе становится экстремально чувствительной к малейшим изменениям начального состояния атомов и полевой моды, что находит свое проявление в хаотических осцилляциях атомной инверсии и числа фотонов.

2. МОДЕЛЬ

Взаимодействие N двухуровневых атомов с единственной модой в высокочастотном резонаторе с параметрической модуляцией описывается N -атомным гамильтонианом Джейнса—Каммингса в приближении вращающейся волны, числовые параметры которого изменяются со временем:

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sum_{j=1}^N \sigma_z^j + \hbar \omega_f (a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \hbar \Omega_0 \sum_{j=1}^N (a \sigma_+^j + a^\dagger \sigma_-^j). \quad (1)$$

Для простоты считаем, что все атомы покоятся, имеют одинаковую частоту электродипольного перехода ω_a и одинаковую вакуумную частоту Раби Ω_0 , т. е. линейные размеры атомного образца предполагаются много меньшими длины волны излучения. В принципе возможна модуляция частоты как атомного перехода с помощью внешнего поля, так и модуляция частоты выделенной резонаторной моды. Последнее можно осуществить в резонаторах с движущимися стенками [11] или в резонаторе, заполненном однородной средой с переменной во времени диэлектрической проницаемостью [12]. Такого рода системы вызывают большой интерес в последнее время в связи с возможностями генерации фотонов из вакуума [13] и генерации сжатых состояний электромагнитного поля [12]. Пренебрегая всеми квадратичными эффектами, выделенную моду резонатора моделируем простым гармоническим осциллятором с переменной частотой ω_f . Полученные в этой работе результаты без труда обобщаются на случай модуляции атомной частоты ω_a , так как фактически переменным параметром задачи является отношение этих частот (6).

Мы изучаем сложность гамильтоновой полуклассической динамики, порождаемой оператором (1). Следовательно, полученные результаты справедливы лишь на временах много меньших времен затухания полевой моды T_f и времени атомной релаксации T_a . Такая ситуация реализуется, например, с ридберговскими атомами в высокочастотных ($Q \simeq 10^{10}$) микроволновых резонаторах, охлажденных до субкельвинских температур. При этих условиях время жизни микроволновых фотонов в резонаторе $T_f \simeq 10^{-1} \div 10^{-2}$ с и время жизни циркулярных ридберговских состояний атомов $T_a \simeq 10^{-2}$ с [1] на несколько порядков величины больше периода даже одноатомных вакуумных осцилляций Раби $T_0 = 2\pi/\Omega_0 < 10^{-5}$ с. Напомним, что характерной собственной частотой многоатомной системы является коллективная вакуумная частота Раби $\Omega_N = \Omega_0 \sqrt{N}$, с которой N -атомный ансамбль когерентно обменивается энергией с полевой модой. Таким образом, гамильтонов подход адекватно описывает атомно-полевую динамику только в так называемом режиме сильной связи, $\Omega_N \gg T_a^{-1}, T_f^{-1}$.

Классическая динамическая система, порожденная гамильтонианом (1), получается в результате перехода от уравнений Гейзенберга для операторов к уравнениям для их средних значений. При этом возникает, вообще говоря, бесконечная иерархия уравнений для средних. В полуклассическом приближении эту бесконечномерную систему уравнений обрывают, чтобы получить простейшую замкнутую самосогласованную систему, в которой учитывается обратное влияние поля излучения на атомы, но не учитываются квантовые корреляции. Можно показать (см. Приложение), что полуклассическое приближение для N атомов справедливо с относительной ошибкой $O(1/N)$. В полуклассическом пределе естественными квантовыми состояниями, по которым производится усреднение, являются обобщенные когерентные состояния, а именно, прямое

произведение глауберговского полевого когерентного состояния на блоховское атомное когерентное состояние. В результате получим нелинейную динамическую систему:

$$\dot{x} = -y - \Omega z P, \quad \dot{y} = x - \Omega z E, \quad \dot{z} = \Omega(xP + yE), \quad \dot{E} = \omega P - \Omega y, \quad \dot{P} = -\omega E - \Omega x \quad (2)$$

для трех атомных переменных:

$$x = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{j=1}^N \sigma_x^j \right\rangle, \quad y = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{j=1}^N \sigma_y^j \right\rangle, \quad z = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{j=1}^N \sigma_z^j \right\rangle \quad (3)$$

и двух полевых:

$$E = \frac{1}{\sqrt{N}} \langle a + a^\dagger \rangle, \quad P = \frac{i}{\sqrt{N}} \langle a^\dagger - a \rangle. \quad (4)$$

Дифференцирование в (2) проводится по безразмерному времени $\tau = \omega_a t$, а управляющими параметрами являются безразмерная коллективная вакуумная частота Раби

$$\Omega = \frac{\Omega_0 \sqrt{N}}{\omega_a} \quad (5)$$

и безразмерная переменная расстройка резонанса, которая для определенности выбрана в виде

$$\omega = \omega_0(1 + \alpha \sin \delta \tau), \quad (6)$$

где $\omega_0 = \omega_f / \omega_a$, $\delta = \omega_m / \omega_a$ — безразмерная частота гармонической модуляции полевой моды, α — глубина модуляции.

Простая факторизация корреляторов в сущности означает, что мы проектируем движение наблюдаемых в бесконечномерном пространстве полностью квантовой модели на пятимерное пространство переменных (3), (4) полуклассической модели. Наличие естественных интегралов движения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad E^2 + P^2 + 2z = W, \quad (7)$$

являющихся отражением унитарности атомной эволюции и сохранения полной энергии, ограничивает движение динамической системы (2) трехмерным пространством. Вводя новые комплексные переменные

$$\eta = x + iy, \quad \xi = P + iE, \quad (8)$$

систему из пяти нелинейных уравнений можно свести к единственному комплексному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами

$$\ddot{\xi} - i(\omega + 1)\dot{\xi} - (\omega + i\dot{\omega} + \frac{1}{2}\Omega^2 W)\xi + \frac{1}{2}\Omega^2 \xi |\xi|^2 = 0. \quad (9)$$

Это — комплексный осциллятор Дюффинга с параметрическим возбуждением, который в нашем случае описывает полуклассическую гамильтонову динамику взаимодействия двухуровневых атомов с одномодовым частотно-модулированным полем. Разумно предположить, что такой осциллятор может быть хаотическим, несмотря на нулевую правую часть его уравнения движения (9).

3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ

В отсутствие модуляции ($\alpha = 0$) исходная система (2) приобретает дополнительный интеграл движения:

$$\Omega(xE - yP) - (\omega_0 - 1)z = C, \quad (10)$$

отражающий сохранение энергии взаимодействия атомов с полем в приближении вращающейся волны, благодаря которому из системы уравнений (2) можно вывести замкнутое уравнение для атомной инверсии

$$\dot{z} = \pm \Omega \sqrt{(W - 2z)(1 - z^2) - \left[\frac{C + (\omega_0 - 1)z}{\Omega} \right]^2}. \quad (11)$$

Это уравнение имеет точное решение в терминах эллиптических функций Якоби

$$z = z_1 + (z_2 - z_1) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{\frac{1}{2}(z_3 - z_1)\Omega}(\tau - \tau_0); \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right], \quad (12)$$

где

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\Omega} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}}, \quad (13)$$

а $z_1 < z_2 < z_3$ — корни характеристического уравнения:

$$z^3 - \left[\frac{W}{2} + \frac{(\omega_0 - 1)^2}{2\Omega^2} \right] z^2 - \left[1 + \frac{C(\omega_0 - 1)}{2\Omega^2} \right] z + \left[\frac{W}{2} - \frac{C^2}{2\Omega^2} \right] = 0. \quad (14)$$

Решение для остальных неизвестных интегрируемой версии исходной системы (2) при $\alpha = 0$ ищем в виде

$$x = \frac{s}{v} \sin(\omega_0 \tau + \theta) - u \cos(\omega_0 \tau + \theta), \quad y = -\frac{s}{v} \cos(\omega_0 \tau + \theta) - u \sin(\omega_0 \tau + \theta), \quad (15)$$

$$E = v \sin(\omega_0 \tau + \theta), \quad P = v \cos(\omega_0 \tau + \theta).$$

С помощью интегралов движения нетрудно показать, что все новые переменные θ , s , u и v являются функциями единственной старой переменной z :

$$s = \frac{C + (\omega_0 - 1)z}{\Omega}, \quad v = \pm \sqrt{W - 2z},$$

$$u = \pm \sqrt{1 - z^2 - \left(\frac{s}{v}\right)^2}, \quad \theta = \int_0^\tau \frac{C + (\omega_0 - 1)z}{W - 2z} d\tau'. \quad (16)$$

Таким образом, в отсутствие модуляции движение ограничено двумерной поверхностью и полностью характеризуется полученным общим решением (12)–(16), описывающим периодический обмен энергией между атомами и генерированным ими полем.

В терминах новых переменных интегрируемая версия (2) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \Omega u, & \dot{u} &= \frac{1}{2}\Omega v(W - v^2) + \Omega \frac{s^2}{v^3} + (\omega_0 - 1)\frac{s}{v}, \\ \dot{\theta} &= \Omega \frac{s}{v^2}, & \dot{s} &= (1 - \omega_0)uv. \end{aligned} \quad (17)$$

В случае точного резонанса, $\omega_0 = 1$, для $C = 0$ и $W > 0$ система (17) вырождается в уравнение движения свободного осциллятора Дюффинга, на фазовой плоскости uv которого имеется пара гомоклинных траекторий, сходящихся в особой точке S_+ : ($u_0 = 0, v_0 = 0$). В терминах исходных переменных это особая точка с координатами: $x_0 = y_0 = 0, z_0 = 1, E_0 = P_0 = 0$. Она всегда неустойчива при точном резонансе и соответствует ситуации с полностью инвертированными атомами, находящимися в резонаторе с вакуумным полем. Решение на сепаратрисе ($W = 2$) находится с помощью соотношений (15), (16) и выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} x_s &= \pm 2 \operatorname{sh}(\Omega\tau) \operatorname{th}(\Omega\tau) \cos(\tau + \theta_0), & y_s &= \pm 2 \operatorname{sh}(\Omega\tau) \operatorname{th}(\Omega\tau) \sin(\tau + \theta_0), \\ z_s &= 1 - 2 \operatorname{sh}^2 \Omega\tau, & P_s &= \pm 2 \operatorname{sh}(\Omega\tau) \cos(\tau + \theta_0), & E_s &= \pm 2 \operatorname{sh}(\Omega\tau) \sin(\tau + \theta_0), \end{aligned} \quad (18)$$

где θ_0 — произвольный угол. Здесь и далее для правильной записи решения следует выбирать в выражениях с двойным знаком всюду верхние знаки или всюду нижние знаки.

4. ПЛЕНЕНИЕ НАСЕЛЕННОСТИ АТОМНЫХ УРОВНЕЙ

Найденное в предыдущем разделе общее точное решение интегрируемой системы (15) содержит интересное частное решение, описывающее когерентный эффект пленения населенности двухуровневых атомов и пленения числа фотонов в резонаторе. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что решение вида

$$\begin{aligned} x_{tr} &= \pm \sqrt{1 - z_0^2} \cos\left(\frac{\omega_0 + 1}{2}\tau + \varphi\right), & y_{tr} &= \pm \sqrt{1 - z_0^2} \sin\left(\frac{\omega_0 + 1}{2}\tau + \varphi\right), \\ z_0 &= \left(\frac{\omega_0 - 1}{2\Omega}\right)^2, \\ E_{tr} &= \mp \frac{2\Omega}{\omega_0 - 1} \sqrt{1 - z_0^2} \cos\left(\frac{\omega_0 + 1}{2}\tau + \varphi\right), & P_{tr} &= \pm \frac{2\Omega}{\omega_0 - 1} \sqrt{1 - z_0^2} \sin\left(\frac{\omega_0 + 1}{2}\tau + \varphi\right) \end{aligned} \quad (19)$$

с произвольной фазой φ описывает процесс взаимодействия, в котором плотность инверсии z и фотонная плотность $n = (E^2 + P^2)/4$ остаются неизменными. Положив в (19) $\tau = 0$, найдем соответствующие начальные условия, которые приводят к эффекту пленения населенности и излучения. Это явление возникает, если атомы приготовлены в суперпозиционном состоянии с некоторой фазой, а поле — в когерентном состоянии с той же фазой. Заметим, что начальная инверсия z_0 может принимать любое значение из верхней полусферы Блоха, $0 \leq z_0 \leq 1$. Подчеркнем, что решения (19) справедливы для произвольной расстройки резонанса между частотами моды и атомного перехода.

Предельный случай $z_0 = 0$ реализуется при точном резонансе, $\omega_0 = 1$. Ему отвечает начальная атомная суперпозиция $|x_0 = \cos \varphi, y_0 = \sin \varphi, z_0 = 0\rangle$ и начальное поле с бесконечным числом фотонов, которое можно трактовать как фазовое состояние поля. Другой предельный случай, $z_0 = 1$, отвечает начальному состоянию

$|x_0 = y_0 = E_0 = P_0 = 0, z_0 = 1\rangle$, которое является точкой равновесия S_+ в полуклассическом приближении, так как в этом приближении игнорируются источники спонтанного излучения. Учет межатомных квантовых корреляций [9] приводит к тому, что состояние с полностью возбужденными атомами распадается в вакууме, приводя в режиме сильной атомно-полевой связи к вакуумным осцилляциям Раби.

Известно [14], что эффект пленения населенности возможен в модели Джейнса—Каммингса [3], описывающей в приближении вращающейся волны взаимодействие двухуровневого атома с единственной модой квантованного поля в случае нулевой расстройки. В этом случае инверсия населенности выражается аналитически в виде ряда по числам заполнения, численное интегрирование которого показывает [14], что в случае одинаковой фазы начальных состояний атома и поля амплитуда осцилляций z очень мала. Причиной пленения населенности является деструктивная интерференция атомного диполя и полевой моды. В полуклассическом пределе можно найти явный вид соответствующих начальных условий для N одинаковых атомов и поля, приводящих при точном резонансе, $\omega_0 = 1$, к пленению населенности и излучения

$$\begin{aligned} x_0 &= \pm \sqrt{1 - z_0^2} \cos \psi, & y_0 &= \pm \sqrt{1 - z_0^2} \sin \psi, & z_0 &= -\beta^2, \\ E_0 &= \mp \sqrt{z_0 - z_0^{-1}} \cos \psi, & P_0 &= \pm \sqrt{z_0 - z_0^{-1}} \sin \psi, \end{aligned} \quad (20)$$

где β — произвольное число из интервала $0 \leq \beta^2 \leq 1$, ψ — произвольная фаза. Очевидно, что в условиях резонанса эффект пленения возможен, если начальный вектор Блоха расположен в нижней полусфере Блоха. Предельный случай $z_0 = -1$ соответствует начальному состоянию $|x_0 = y_0 = E_0 = P_0 = 0, z_0 = -1\rangle$, являющемуся тривиальной точкой равновесия S_- системы (2).

5. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСЫ И ГАМИЛЬТОНОВ ХАОС: ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вернемся к системе (2) с модуляцией частотной расстройки (6). В третьем разделе у ее интегрируемой версии были выявлены особые гомоклинные траектории (18). На фазовом портрете интегрируемой системы эти траектории представляют собой семейство двумерных гомоклинных торов, стянутых к седловой точке S_+ и параметризованных значением полной энергии W . Каждый такой тор является местоположением состояний атомно-полевой системы с полностью возбужденными атомами, бесконечно долгое время излучающими и поглощающими свет в резонаторе с изначальным вакуумом. Можно ожидать, что при включении возмущения (частотной модуляции в нашем случае) устойчивое и неустойчивое многообразия седлового движения начнут трансверсально пересекаться, порождая хаотические осцилляции атомно-полевой системы.

Наглядное представление о разрушении инвариантных многообразий и возникновении хаоса дают сечения Пуанкаре. На рис. 1 представлены результаты последовательного отображения состояний системы в плоскости полевых переменных E и P для различных значений глубины модуляции α и фиксированных значений других управляющих параметров ($\omega_0 = \delta = 1, \Omega = 0.5$). Начальное состояние системы $|x_0 = y_0 = 0, z_0 = 1, E_0 = P_0 = 0.1\rangle$, соответствующее определенным значениям интегралов движения $W_0 = 2.02$ и $C = 0$, находится вблизи особой точки S_+ . Траектории движения интегрируемой системы ($\alpha = 0$) отвечает регулярное сечение Пуанкаре

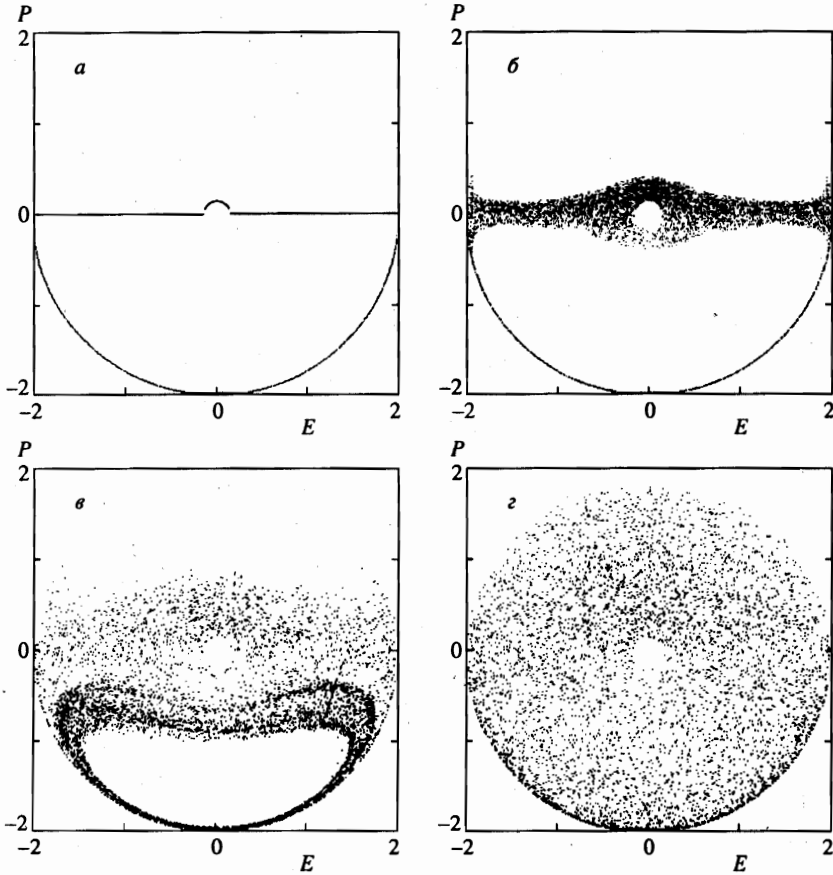


Рис. 1. Сечения Пуанкаре в плоскости полевых переменных E и P при $\delta = \omega_0 = 1$, $\Omega = 0.5$, $W_0 = 2.02$, $C = 0$: $a - \alpha = 0$, $б - \alpha = 0.01$, $в - \alpha = 0.07$, $г - \alpha = 0.2$

(рис. 1а). При включении модуляции даже с очень малой глубиной в окрестности сепаратрисы появляется стохастический слой. С увеличением глубины модуляции α ширина стохастического слоя увеличивается, что проявляется в соответствующих сечениях (рис. 1б и 1в). Наконец, при достаточно большом значении α траектория заполняет всю энергетически доступную часть плоскости $E-P$ (рис. 1г). На всех этих рисунках изображены сечения Пуанкаре для одной единственной траектории. Заметно, что при выбранном начальном значении полной энергии $W = 2.02$ точки отображения не могут попасть в область вблизи центра $E_0 = P_0 = 0$ из-за ограничений, наложенных законами сохранения (7).

Показатели Ляпунова служат количественной характеристикой хаоса, так как они являются мерой локальной неустойчивости динамической системы. Для систем, имеющих несколько управляющих параметров, наглядную картину хаоса обеспечивают топографические λ -карты [6, 7], на которых величины максимального показателя Ляпунова λ изображаются (обычно оттенками цвета) в виде функции двух управляющих параметров при фиксированных значениях остальных параметров.

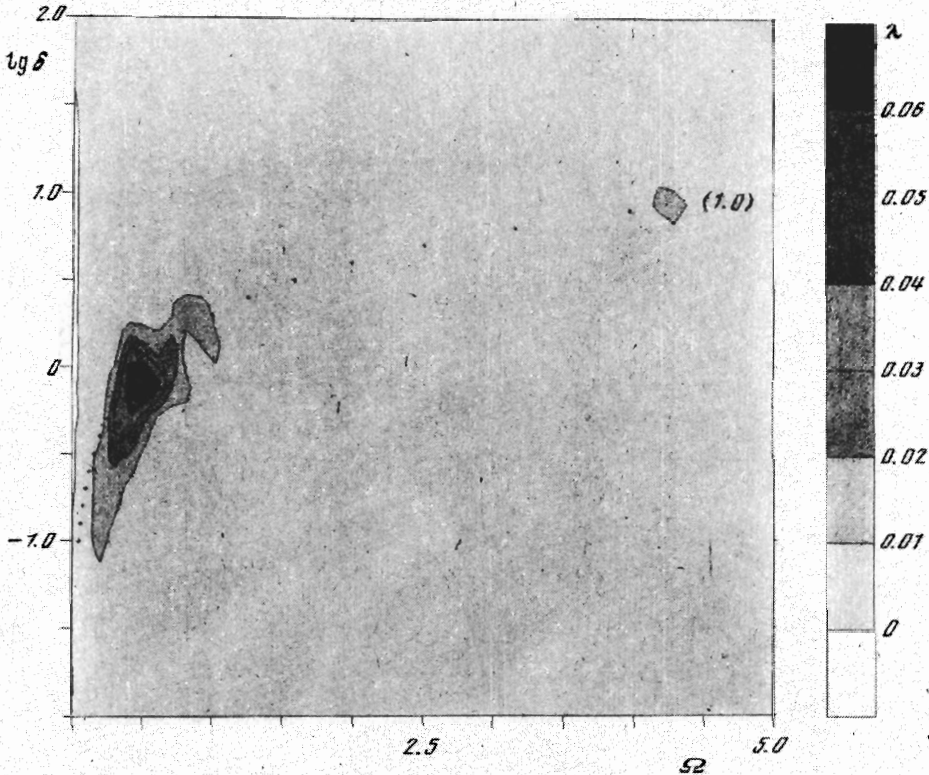


Рис. 2. Топографическая карта максимальных показателей Ляпунова λ в зависимости от частоты модуляции δ (в логарифмическом масштабе) и частоты осцилляций Раби Ω для $\alpha = 1$ и $\omega_0 = 0.9$

Результаты вычисления максимальных показателей Ляпунова в зависимости от двух характерных частот атомно-полевой системы, частоты модуляции δ (в логарифмическом масштабе) и коллективной частоты Раби Ω приведены на рис. 2 и 3 для глубины модуляции $\alpha = 1$ и разных значений амплитуды расстройки, $\omega_0 = 0.9$ (рис. 2) и $\omega_0 = 1$ (рис. 3). Сила гамильтонова хаоса характеризуется величиной λ , шкала значений которого представлена на рисунках справа оттенками серого цвета. В качестве начального выбрано состояние системы $|x_0 = y_0 = 0, z_0 = 1, E_0 = P_0 = 1\rangle$ с полностью возбужденными атомами и плотностью фотонов $n = 1/2$. На этих картах отчетливо видны зоны хаоса, число которых и сила хаоса в них растут с приближением несущей частоты моды ω_f к частоте атомного перехода ω_a , т.е. при $\omega_0 \rightarrow 1$. Рассчитанная, но не приведенная здесь, λ -карта для $\omega_0 = 0.1$ при тех же условиях свидетельствует, что хаос очень слаб (в расчетном диапазоне $0 < \Omega \leq 5$ максимальный показатель Ляпунова не превышает 0.006), его сила монотонно возрастает с ростом Ω и практически не зависит от величины δ .

При небольшой расстройке резонанса, $\omega = 0.9$, имеются две зоны хаоса (рис. 2), центры которых на плоскости δ - Ω соответствуют следующему отношению частот

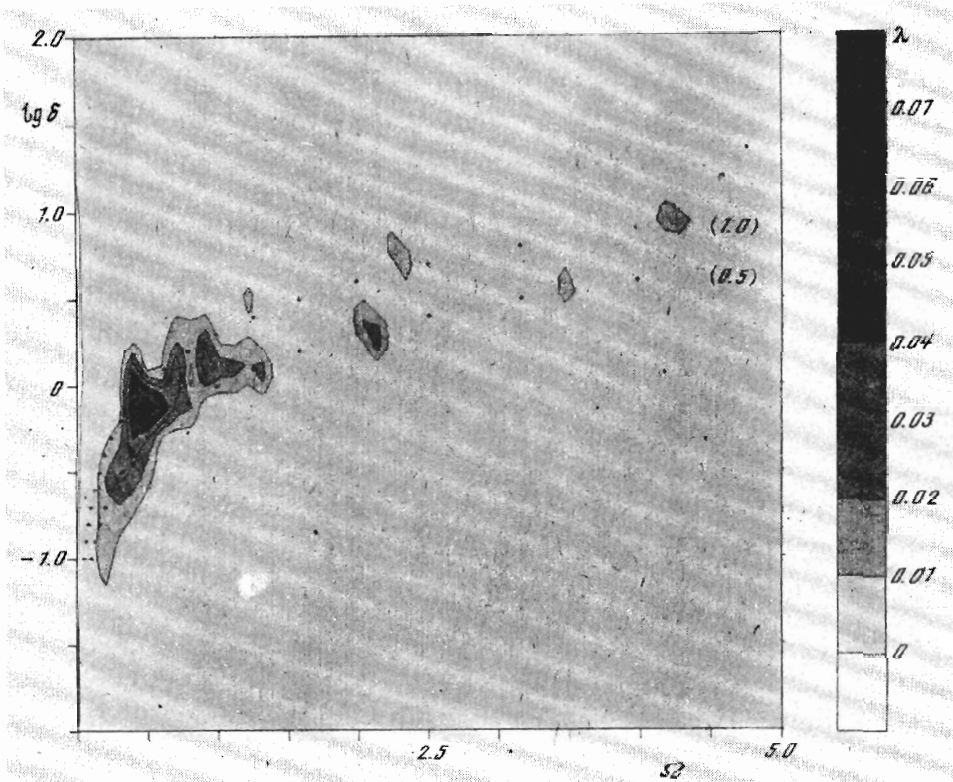


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, для $\omega_0 = 1$ и $\alpha = 1$

$\delta/2\Omega \simeq 1$. Величина Ω есть не что иное, как частота собственных колебаний невозмущенной атомно-полевой системы $\Omega_0\sqrt{N}$, отнесенная к ω_a (см. (5)). Таким образом, $\delta/2\Omega \simeq 1$ есть просто условие основного параметрического резонанса. При точном резонансе атомов с модой, $\omega_0 = 1$, проявляются новые зоны хаоса (рис. 3), соответствующие основному резонансу и первому субрезонансу с $\delta/2\Omega \simeq 1/2$. На рис. 2–4 крестиками показаны изолинии параметра $\delta/2\Omega$, а в круглых скобках приведены его значения (1/2); (1); (2), отвечающие соответственно субрезонансу, основному резонансу и суперрезонансу. Вполне естественно, что атомно-полевая система хаотизируется наиболее сильным образом, когда частота модуляции и частота Раби удовлетворяют условию основного параметрического резонанса. Однако из всей зоны параметрической неустойчивости, заданной величиной отношения частот $\delta/2\Omega \simeq 1$, выделяются значения δ , кратные другим характерным частотам системы — ω_a и ω_f .

Как и следовало ожидать, с уменьшением глубины модуляции сужаются зоны параметрической неустойчивости системы. На рис. 4 представлена λ -карта δ – Ω при тех же условиях, что и на рис. 3, но для меньшего значения глубины модуляции, $\alpha = 0.2$. Обширная зона хаоса при $\alpha = 1$ (рис. 3) распадается на цепь малых «островов» хаоса при $\alpha = 0.2$ (рис. 4). Хаос на островах гораздо слабее хаоса в зоне: соответствующий

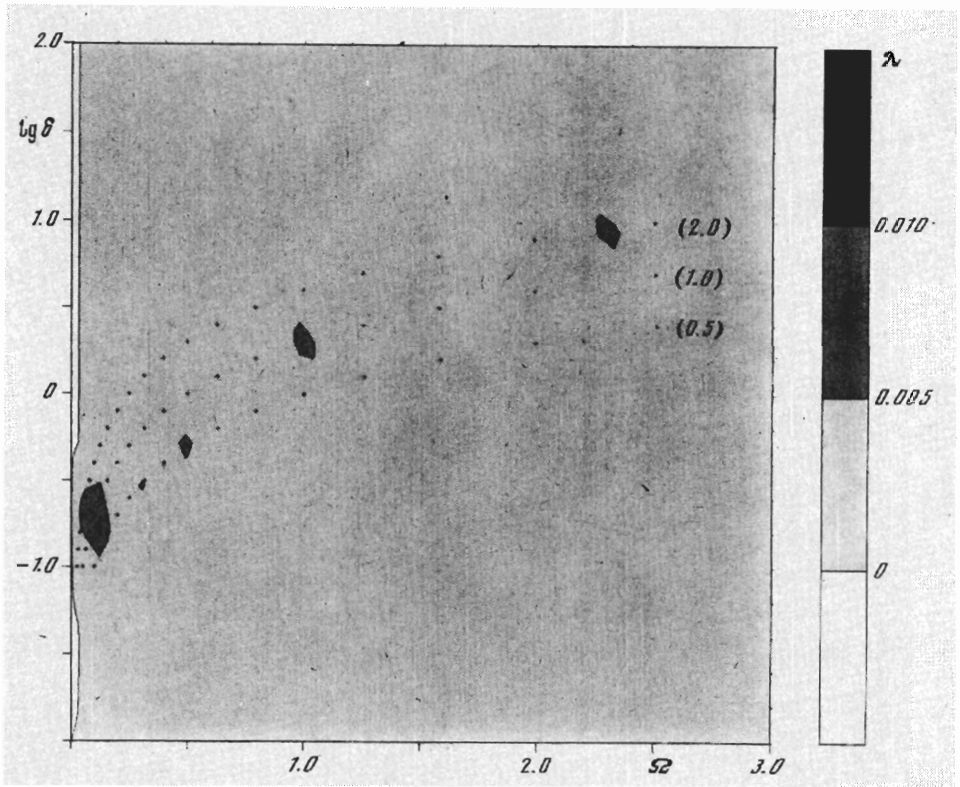


Рис. 4. То же, что и на рис. 2, для $\omega_0 = 1$ и $\alpha = 0.2$

максимальный показатель Ляпунова не превышает на островах 0.01.

Показатели Ляпунова являются, как известно [15], мерой скорости деформации фазового объема по различным направлениям. У m -мерной системы имеется m показателей Ляпунова ($\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$), упорядоченных по величине $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \equiv \lambda$ и зависящих, вообще говоря, от начальных условий. Если $\lambda_j > 0$ ($\lambda_j < 0$), то элемент объема в процессе эволюции системы увеличивается (уменьшается) в соответствующем направлении. В гамильтоновой системе, каковой является наша полуклассическая атомно-полевая модель, фазовый объем есть инвариантная мера, и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0.$$

Положительные показатели Ляпунова определяют метрическую энтропию Крылова—Колмогорова—Синяя $h = \sum_{j=1}^{n < m} \lambda_j^{(+)}$ [16]. Согласно алгоритмической теории динамических систем [17, 18], энтропия h формально эквивалентна алгоритмической сложности траектории K , которая является мерой случайности последовательности, генерируемой этой траекторией. С другой стороны, чисто динамическая характеристика системы λ связана со статистической характеристикой — обратным временем

расцепления корреляций $1/\tau_c$, входящим в выражение для корреляционной функции $C(t) = C_0 \exp(-t/\tau_c)$. В результате максимальный показатель Ляпунова λ , метрическая энтропия h , алгоритмическая сложность K и обратное время расцепления корреляций $1/\tau_c$ являются величинами одного порядка. Таким образом, статистические закономерности могут возникать в результате локальной неустойчивости хаотической динамики [19, 20].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовалась нелинейная динамика взаимодействия ансамбля одинаковых двухуровневых атомов с выделенной модой резонатора. В приближении вращающейся волны, в полуклассическом приближении и в пределе сильной связи получено в явном виде общее точное решение соответствующих уравнений Гейзенберга для ожидаемых значений атомных и полевых наблюдаемых при произвольной расстройке. С помощью этого решения обнаружен когерентный эффект пленения населенности атомных уровней и пленения излучения в резонаторе, который возникает вследствие деструктивной интерференции атомных диполей, приготовленных в суперпозиционном состоянии с некоторой фазой, и полевой моды, приготовленной в когерентном состоянии с той же фазой.

С помощью сечений Пуанкаре показано, что модуляция частоты выделенной моды приводит даже в приближении вращающейся волны к образованию стохастического слоя вблизи сепаратрисы интегрируемой модели, ширина которого увеличивается с ростом глубины модуляции. Результаты численного исследования гамильтонова хаоса в атомно-полевой системе представлены топографическими λ -картами, на которых показаны (оттенками цвета) зоны одинаковых значений максимального показателя Ляпунова системы λ в зависимости от значений двух управляющих параметров. Наиболее сильным образом система хаотизируется в области основного параметрического резонанса ($\delta/2\Omega \simeq 1$), когда частота модуляции приблизительно равна удвоенной частоте обмена энергией между атомами и модой. Параметрическая неустойчивость возрастает с уменьшением расстройки резонанса между атомной и полевой частотами ($\omega \rightarrow 1$), порождая при точном резонансе новые зоны хаоса, соответствующие кратным параметрическим резонансам. С уменьшением глубины модуляции α система становится более устойчивой, что проявляется в распаде обширной зоны хаоса на δ - Ω карте с $\alpha = 1$ (рис. 3) в цепь малых «островов» хаоса для $\alpha = 0.2$ (рис. 4) и в резком уменьшении значений λ .

Итак, в полуклассической модели Джейнса—Каммингса с параметрической модуляцией гамильтонов хаос возникает даже в приближении вращающейся волны. Если в системе без приближения вращающейся волны хаос является пороговым эффектом, возникающим при условии $\Omega \geq 0.5 \div 1$ [4, 6], то в параметрической модели, как показывают наши численные эксперименты, измеримый хаос проявляется при гораздо меньших значениях частоты Раби, $\Omega \simeq 0.05$. Это означает, что динамика ридберговских атомов с типичной частотой рабочего перехода $\omega_a \simeq 10^{11}$ рад/с, взаимодействующих с частотно-модулированным микроволновым излучением миллиметрового диапазона, становится параметрически неустойчивой при выполнении условия $\Omega_0 \sqrt{N} \geq 10^{10}$. Очевидно, это должно проявляться в уширении спектра осцилляций Раби. Таким образом, хаос возникает для типичных в пределе сильной связи значений однофотонной вакуумной частоты Раби ридберговских атомов $\Omega_0 \simeq 10^5$ рад/с [1], когда число этих атомов

сравнительно невелико, $N \simeq 10^{10}$. Для таких N приближение вращающейся волны, полуклассическое приближение, приближение невзаимодействующих атомов и малых линейных размеров атомного образца можно считать удовлетворительными.

В заключение кратко остановимся на перспективах исследования квантово-классического соответствия на примере гамильтонова хаоса в атомно-полевых системах в резонаторах. В рамках гейзенберговского подхода возможен учет квантовых корреляций и флуктуаций (см. Приложение и цитированные там работы [8, 9, 21, 22]). В нашей недавней статье [8] получена замкнутая система уравнений, которая описывает в приближении вращающейся волны динамику взаимодействия двухуровневых атомов с резонаторной модой с учетом полевых, межатомных и атомно-полевых квантовых корреляций первого порядка.

В последующей публикации мы планируем получить точное решение интегрируемой версии этой *полуквантовой* системы, исследовать возникновение хаоса в ней при включении параметрической модуляции и сравнить результаты полуквантового и полуклассического анализа.

Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 96-02-19827 и проект 96-02-18746).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Введем новые операторы, нормированные на число атомов N :

$$A = \frac{1}{\sqrt{N}}a, \quad A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}}a^\dagger, \quad (21)$$

$$S_x = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{j=1}^N \sigma_x^j \right\rangle, \quad S_y = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{j=1}^N \sigma_y^j \right\rangle, \quad S_z = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{j=1}^N \sigma_z^j \right\rangle.$$

Их коммутаторы равны

$$[A, A^\dagger] = \frac{1}{N}, \quad [S_i, S_j] = \frac{2i}{N} \epsilon_{ijk} S_k, \quad i, j, k = x, y, z. \quad (22)$$

Уравнения Гейзенберга в терминах новых операторов и коллективной вакуумной частоты Раби Ω_N имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_x &= -\omega_a S_y - \Omega_N S_z i(A^\dagger - A), \\ \frac{d}{dt} S_y &= \omega_a S_x - \Omega_N S_z (A^\dagger + A), \\ \frac{d}{dt} S_z &= i\Omega_N S_x (A^\dagger - A) + \Omega_N S_y (A^\dagger + A), \\ \frac{d}{dt} A &= -i\omega_f A - \frac{i}{2} \Omega_N (S_x - iS_y), \\ \frac{d}{dt} A^\dagger &= i\omega_f A^\dagger + \frac{i}{2} \Omega_N (S_x + iS_y). \end{aligned} \quad (23)$$

В полуклассическом пределе уравнения движения для соответствующих ожидаемых значений операторов

$$\mathcal{X} = \langle S_x \rangle, \quad \mathcal{Y} = \langle S_y \rangle, \quad \mathcal{X} = \langle S_z \rangle, \quad \mathcal{E} = \langle A^\dagger + A \rangle, \quad \mathcal{P} = i \langle A^\dagger - A \rangle \quad (24)$$

и безразмерного времени $\tau = \omega_a t$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{X}} &= -\mathcal{Y} - \Omega \mathcal{X} \mathcal{P}, & \dot{\mathcal{Y}} &= \mathcal{X} - \Omega \mathcal{X} \mathcal{E}, & \dot{\mathcal{X}} &= \Omega (\mathcal{X} \mathcal{P} + \mathcal{Y} \mathcal{E}), \\ \dot{\mathcal{E}} &= \omega \mathcal{P} - \Omega \mathcal{Y}, & \dot{\mathcal{P}} &= -\omega \mathcal{E} - \Omega \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (25)$$

Коммутаторы нормированных операторов исчезают в пределе больших N . Очевидно, что в этом пределе справедливо полуклассическое приближение. Для конечных N относительная ошибка составляет величину порядка $1/N$. Уравнения движения для этих операторов и их ожидаемых значений не зависят от N . С помощью нормировки (21) на основе полуклассической динамической системы можно построить иерархию динамических систем, в которых явным образом учитываются квантовые поправки, обусловленные квантовыми корреляциями и флуктуациями. Действительно, когда коммутаторы (22) не обращаются в нуль, то зависимость от малого параметра $1/N$ проявляется только в квантовых корреляторах. Квантовые коррекции можно учитывать с помощью метода $1/N$ -разложения, вводя кумулянты порядка $(1/N)^n$ (о применении этого подхода к модели Джейнса—Каммингса см. работу [21]), метода, основанного на усреднении операторов по обобщенным когерентным состояниям в начальный момент времени (см. работу [22] о модели Дикке в когерентном внешнем поле) или с помощью других методов [9] (см. работу [8] о модели Дикке с движущимися атомами).

Литература

1. J. M. Raimond and S. Haroche, in: *Confined Electrons and Photons*, ed. by E. Burstein and C. Weisbuch, Plenum Press, New York (1995), p. 383.
2. Y. Kaluzny, P. Goy, M. Gross, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1175 (1983); G. Rempe, H. Walter, and N. Klein, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 3523 (1987).
3. E. T. Jaunes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
4. П. И. Белобров, Г. М. Заславский, Г. Х. Тартаковский, *ЖЭТФ* **71**, 1799 (1976).
5. R. F. Fox and J. C. Eidson, *Phys. Rev. A* **34**, 482 (1986).
6. L. E. Kon'kov and S. V. Prants, *J. Math. Phys.* **37**, 1204 (1996).
7. S. V. Prants and L. E. Kon'kov, *Phys. Lett. A* **225**, 33 (1997).
8. Л. Е. Коньков, С. В. Пранц, Письма в *ЖЭТФ* **65**, 801 (1997).
9. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).
10. I. L. Kirilyuk, L. E. Kon'kov, and S. V. Prants, submitted to *Rep. Math. Phys.*
11. G. T. Moore, *J. Math. Phys.* **11**, 2679 (1970).
12. В. В. Додонов, А. Б. Климов, В. И. Манько, Препринт ФИАН № 41 (1991).
13. B. S. Dewitt, *Phys. Rep.* **19**, 295 (1975); V. V. Hizhnyakov, *Quantum Opt.* **4**, 277 (1992).
14. K. Zaheer and M. S. Zubairy, *Phys. Rev. A* **39**, 2000 (1989).
15. В. И. Оселедец, *Труды Моск. мат. общ.* **19**, 179 (1968).
16. Ю. Б. Песин, *ДАН СССР* **226**, 774 (1976).
17. А. А. Брудно, *УМН* **33**, 207 (1978).
18. V. M. Alekseev and M. V. Yakobson, *Phys. Rep.* **75**, 287 (1981).
19. Д. В. Аносов, Я. Г. Синай, *УМН* **22**, 107 (1967).
20. Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, *УФН* **105**, 3 (1971).
21. A. Heidmann, J. M. Raimond, S. Reynaud, and N. Zagury, *Opt. Comm.* **54**, 189 (1985).
22. G. P. Berman, E. N. Bulgakov, and D. D. Holm, *Phys. Rev. A* **49**, 4943 (1994).